

ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLIV

1957

---

SERIE OTTAVA

---

RENDICONTI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

VOLUME XXIII

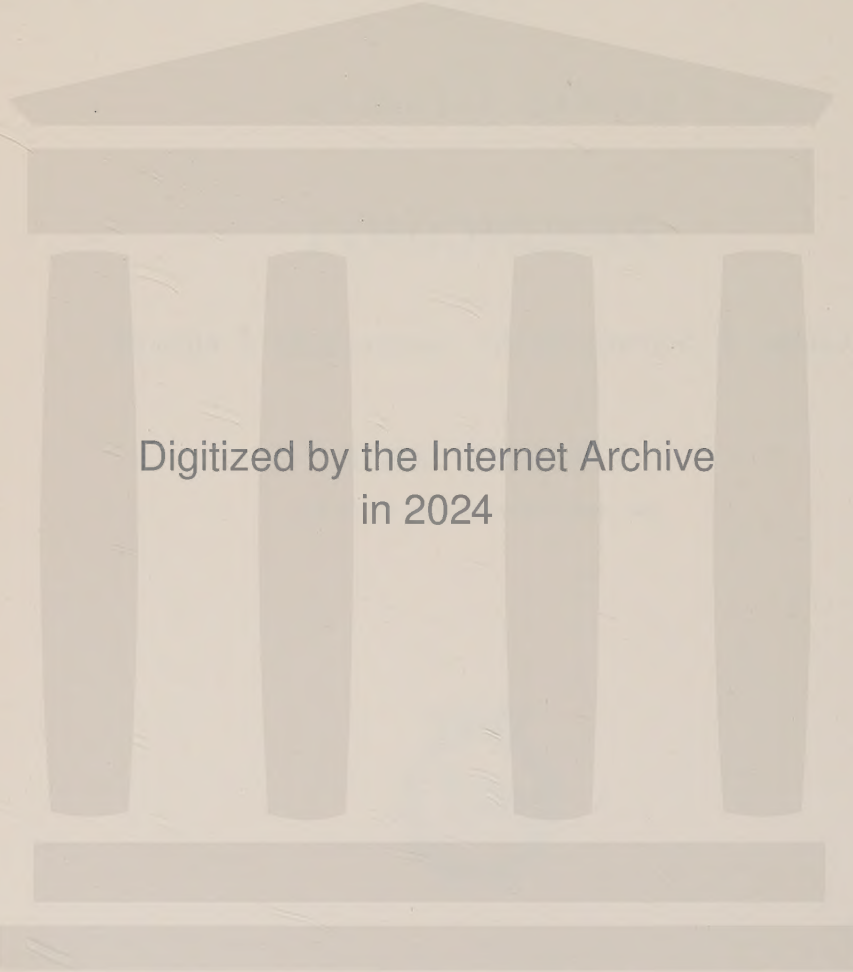
(2° semestre 1957)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1957



Digitized by the Internet Archive  
in 2024



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Ferie 1957 Luglio-Agosto*

---

## NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

---

**Geologia.** — *Geologia e genesi delle rocce bentonitiche italiane.*  
Nota (\*) del Corrisp. ANTONIO CAVINATO.

### PREMESSE.

Svolgiamo il tema nei limiti di cui al titolo ed in forma di opportuna didascalia: anticipiamo che sono rocce vulcaniche che hanno conservato gli stessi requisiti e caratteri che avevano all'origine.

Pertanto l'idea corrente ed accettata che le bentoniti conseguano da modificazione di rocce e di tufi vulcanici cineritici o vetrosi operata da agenti atmosferici, o da acque marine, o da convogli idrotermalici, non è accettata.

Desta doloroso stupore constatare che si battezzarono per sedimentarie bentoniti italiane che sono invece vulcaniche e che presentano i più franchi e più palesi caratteri geopetrografici dell'eruttivo.

### DESCRIZIONE DI GIACIMENTI.

1° *Castelgomberto.* — Sono due depositi stratiformi di una potenza media di 4-5 metri; notevolmente estesi tanto da raggiungere una complessiva cubatura di alcune centinaia di migliaia di m<sup>3</sup>.

Poggiano su un piroclastico basaltoide; alla base di uno di essi ricorre un piccolo strato di marne miste a tufo. Il profilo ci dispensa dal riferire ulteriori dettagli. Sul luogo son conosciuti quali « Cave di terra rossa » stante il colore: in realtà talora giallognolo (fig. 1).

Le peculiarità « bentonitiche » sono largamente assicurate dall'uso: esse sono discrete tanto che servono per correggere le filoniane scadenti dell'alto Vicentino. (Principale uso possibile: la confezione di sabbie sintetiche da fonderia).

Il tipo magmatico francamente basico consegue dalle seguenti due mie analisi: 1<sup>a</sup>: SiO<sub>2</sub> = 41, TiO<sub>2</sub> = 2,75, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 16,20, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> = 8,12, MgO = 2,62, CaO = 2,40, H<sub>2</sub>O

(\*) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1957.

(sino a 1200) = 18,00,  $H_2O$  (sino a 1200) = 6,20;  $Na_2O + K_2O = 1,70$ ; somma 98,99;  $2^a$ :  $SiO_2 = 40,5$ ,  $TiO_2 = 3,7$ ,  $Al_2O_3 = 12,2$ ,  $Fe_2O_3 = 10,00$ ,  $MgO = 3,8$ ,  $CaO = 3,3$ ,  $H_2O$  (totale) = 24 %,  $Na_2O + K_2O = 1,3$ ; somma 99,2.

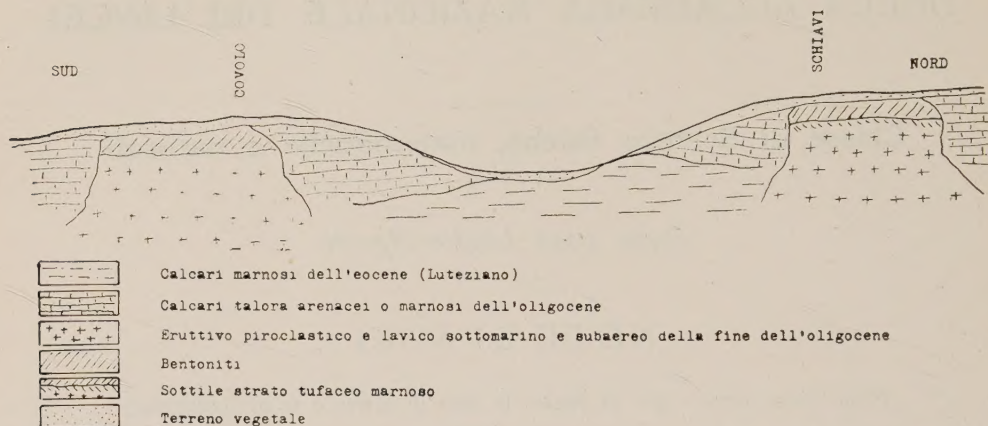


Fig. 1. - Profilo generale traverso i due centri eruttivi a sud di Castelgomberto.

2° *Pesaro*. - Allineati per diciotto chilometri da Belvedere Fogliense sino a Gemmano, su una direzione media N — 20° ovest, ricorrono, a diversi orizzonti stratigrafici, ma sempre entro alle marne del tortoniano numerosi filoni stratoidi e discordanti di bentonite (fig. 2). Lo spessore dei singoli filoni varia da pochi centimetri a poco più di due metri. Talvolta, come a Gemmano, il bentonitico si configura a grossa mandorla, anche discordante.

Analoghi depositi ricorrono a Cagli, Pergola, Fossombrone, ecc.

Il materiale presenta caratteristiche petrografiche e requisiti industriali variabili: buono, saponoso, verdastro, omogeneo, a casa Cecchini, ottimo ai cantieri di Mondaino; ecc.; sino a scadente, e pressoché inutilizzabile a Gemmano, dove presenta distinti caratteri di una porfirite talora anche caolinica.

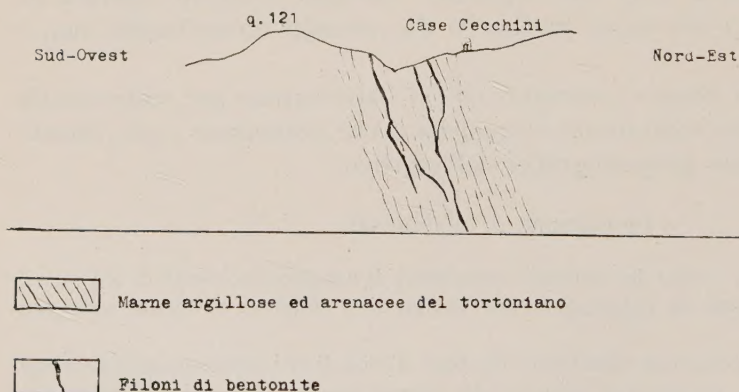


Fig. 2. - Profilo - Cantiere Case Cecchini.

Non insistiamo perché tutto ciò esula dal nostro scopo. Per il quale basta far sottolineare, per quanto andremo a concludere, che la bentonite dei singoli filoni e filoncini è omogenea sino ad una profondità di circa cento metri: che le salbande dei singoli filoni sono nettissime; che le sfrangiature, superficiali o profonde, anche le più esili (qualche centimetro) sono di bentonite identica a quella dei più grossi dischi, ecc. che in nessun punto le rocce incassanti presentano tracce di metasomatismi, ecc.



3° *Puglia e Molise*. — Qui ricorrono buone rocce bentonitiche, in decine di località, in filoni stratoidi e discordanti, entro all'oligocene (o miocene inferiore) marnoso e calcareo. Poiché la configurazione morfologica ed i rapporti con l'incassante ripetono i motivi del pesarese, ci limitiamo a far notare che si tratta di bentoniti tipicamente eruttive iniettate, tardivamente, nelle preesistenti formazioni sedimentarie.

In alcune località esse presentano i limpidi caratteri macroscopici della « porfirite » con i plagioclasti solo in parte « argillificati » per *autometasomatismo* compiutosi nella fase idrotermale del raffreddamento.

Furono erroneamente interpretate quale deposito sedimentario, coevo coi sedimenti e con essi interstratificato. Dalle analisi chimiche eseguite da altri consegue che il tipo magmatico è dioritico: ossia ben più acido della roccia bentonica di Castelgomberto.

4° *Isola di Ponza*. — È ben noto il deposito di questa Isola (Savelli, Lupino, Falini, ecc.). Lo studio in posto da me eseguito mi consente di aggiungere, correggendo affermazioni precedenti, che esso consegue da esplosioni vulcaniche laviche e tufacee sottomarine e, da ultimo, anche subaeree, lungo camini vulcanici traversanti una piattaforma sedimentare miocenica. La formazione eruttiva infatti poggia su di questa, e include frammenti, ben conservati, di calcari e marne mioceniche.

Nel piroclastico sottomarino sono pure inclusi fossili: cosa che è ovvia.

Il produttivo è molto: il coltivabile pregiato è solo una sua frazione, che ammonta a qualche centinaio di migliaia di tonnellate, ed è localizzato in lingue in lenti in ammassi entro al vulcanico, sempre però nelle sue parti più basse: raramente nelle parti superficiali. Le molte analisi chimiche eseguite (Prever e Gorla, Savelli, ecc.) hanno dato percentuali che permettono di concludere che il tipo magmatico è nettamente acido (granitoide).

La *localizzazione* delle parti di maggior pregio in zone di ribasso fanno escludere con sicurezza che il bentonico possa conseguire da azioni di acque marine o di altri agenti atmosferici sul piroclastico o sul lavico. Le stesse localizzazioni sono lontane dagli ombelichi vulcanici e pertanto al riparo dalla aggressione di eventuali convogli che avrebbero potuto agire investendo la roccia *dopo* la sua formazione.

L'ipotesi formulabile più probativa e convincente è anche in questo caso che gli elementi fluidi fossero già presenti nell'edotto, vi siano rimasti imprigionati ed abbiano operato un'argillificazione in uno stadio del raffreddamento in cui era bassa la temperatura: oppure si potrebbe anche assumere che l'edotto sia giunto sul posto ove attualmente si trova nello stesso stato in cui noi oggi lo osserviamo (salvo ben s'intende, i soliti fenomeni diaenetico-metamorfici che intervengono su ogni specie di rocce).

Il solfurato è presente in quantità affatto accessoria: poiché esso è diffuso in modo uniforme sul bentonico e sul normale lavico, non può dar suggerimenti circa la genesi (Falini, Atti Congresso Minerario, 1948).

I passaggi dalla ottima roccia bentonica a quella mediocre o scadente sono gradual.

5° *Sardegna*. — Nell'Isola ricorrono rocce bentonitiche a Nurallao, a Villanova Tulo, ad Alghero, all'Isola di S. Pietro, a Carbonia, ecc. Sono rocce vulcaniche tipiche: presentano tutte le sfumature da rocce profiritiche a rocce tipicamente bentonitiche (Nurallao), da rocce trachitoidi ad argilloso-bentonitiche (Isola di S. Pietro), da tufi andesitici a tufi bentonici (Nugheddu-Tirso).

*Nurallao*. — Entro alle formazioni sedimentarie preesistenti (siluriano, triassico, giurassico, come in fig. 3) ricorre una intrusione vulcanica terziaria (elveziana) di andesite profirica.

Nella parte alta della intrusione per uno spessore di quattro-cinque metri la roccia bentonica è alquanto « sabbiosa » (oltre il tollerato 5 % quarzifero): ma dopo tre-quattro metri essa ricorre con un 3-5 % di quarzo (andesite profirica) ed è utilizzata industrialmente su larga scala.

In questi due orizzonti, quello coltivabile e quello non coltivabile, la roccia presenta i tipici caratteri dell'eruttivo: su una pasta di fondo non risolvibile ad occhio nudo, spiccano

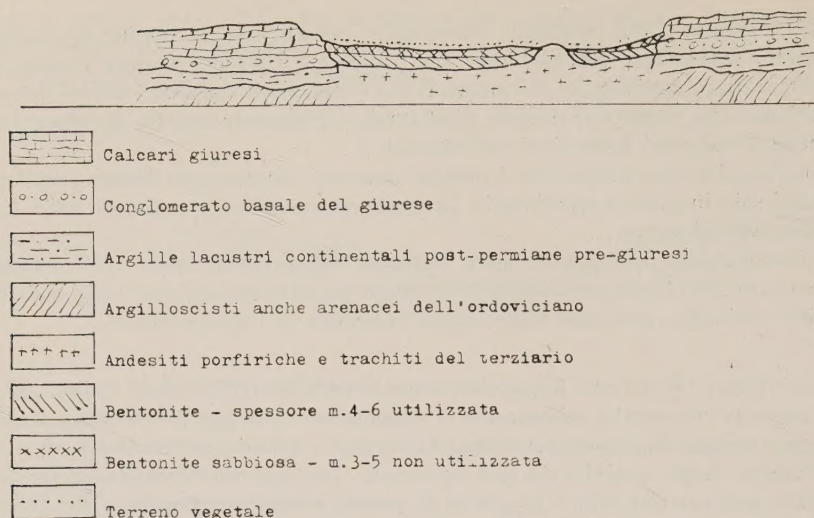


Fig. 3. - Profilo generale del giacimento di Nurallao.

interclusi di plagioclasio « bentonizzato » (pastoso bianco ma contenente ancora sodio, potassio, calcio, pertanto fenomeno differente dalla « caolinizzazione »).

*Villanova Tulo.* - Sulla sinistra orografica del Flumendosa, alcune centinaia di metri a valle del Ponte sul fiume stesso, ricorre una buona roccia bentonica. Ha colore verdognolo chiaro con sfumature verso il giallo ed il marron-chiaro. Si tratta ancora di una andesite porfirica: infatti essa ne ha, talora, i più limpidi caratteri. Alcuni saggi da me eseguiti mi hanno permesso di assodare che essa ha buone qualità leganti, e di vischiosità; mediocri caratteristiche di rigonfiamento e di dispersione.

Ovest

Est

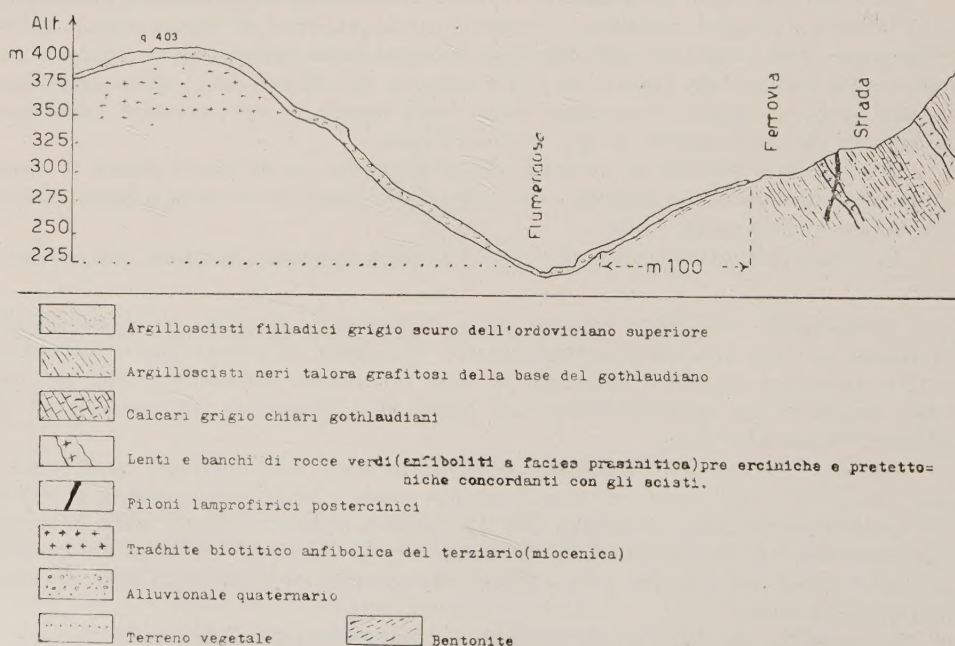


Fig. 4a. - Profilo generale del vulcanico di Villanova Tulo.



In superficie essa affiora su un'area  $100 \times 150$  metri: non sono state eseguite ricerche in profondità (Cfr. profilo in fig. 4).

Anche in destra del Flumendosa si sviluppano talora facies rocciose bentonitiche, quale varietà dell'eruttivo trachitico e andesitico che forma tutto il sistema collinoso che è intorno alla stazione ferroviaria di Villanova Tulo <sup>(1)</sup>; ad esempio in vicinanza del cimitero del paese, parimenti a q. 403, ecc.

*Altre località della Sardegna.* — Le rocce bentonitiche mediocri od addirittura scadenti ricorrono frequentemente in Sardegna.

Così a M. Scovas, presso Alghero, è dato osservare alcuni filoni di una mediocre bentonite intrusi nei tufi trachitici. La salbanda dei filoni è netta, il passaggio dalla roccia bentonica al tufo trachitico è netto: si tratta, ovviamente, di filoni intrusi tardivamente.

A Capo Rosso ed A Capo Beciu, nell'Isola di S. Pietro, ricorre una trachite argillificata con incipienti proprietà bentonitiche <sup>(2)</sup>; a Carbonia presso Nuraghe Figus si sviluppano facies di trachiti ricche di idrosilicati della famiglie delle montmorilloniti: pertanto, da queste per lavaggio si potrebbe estrarre un prodotto con buone proprietà bentonitiche, specie di plasticità; a Copoterra vi sono filoni di una roccia a silicati idrati della famiglia delle illiti, delle cloriti, delle sericiti che spappolano nell'acqua e danno frazioni di prodotti gelatinosi, aventi proprietà e composizioni delle comuni bentoniti del commercio; sulla strada da Nugheddu S. Nicolò verso Sorradile vi è un filone di roccia « bentonica » intruso entro ai tufi trachitici cineritici, a salbande che staccano nettamente.

Ricorrono dunque nell'Isola, come del resto ovunque, una estesa varietà di rocce che contengono « idrosilicati » a comportamento « bentonitico » in percentuali variabilissime: da un 90-95 % quali quelle di Nurallao e Villanova, le quali sono pertanto commerciabili; sino a tenori minimi del 20-25 % e quindi non utilizzabili almeno nelle attuali condizioni del mercato di questa materia prima.

#### GIACIMENTI DESCRITTI DA ALTRI AUTORI.

I numerosi depositi del Vicentino ricorrono nei dintorni di Posina, di Schio, di Arsiero ecc. (si veda la copiosa letteratura): 1° in filoni (lingue e lenti) intrusi sia nei calcari dell'anisico e del ladinico, sia nell'eruttivo porfirítico od ai margini di esso; 2° in piccoli ammassi entro alle porfiriti, di cui rappresentano una facies particolare in cui gradualmente sfumano. Cronologicamente *sono riferibili al tardo triass.* (Fabiani).

I filoni ad incassamento regolare conseguono dalla consueta comune intrusione in spaccature del suolo (Fabiani); e non già da materiale già solidificato sospinto da movimenti tettonici (« strizzato ») entro alle screpolature in cui attualmente ricorre, come, per qualche filone, si è da taluno supposto, col solo risultato di complicare le cose semplici..

In base alle analisi chimiche da altri eseguite su queste rocce bentonitiche, esse sono riferibili a tipi magmatici *dioritici*.

Le peculiarità tecniche sono variabilissime, è sono in funzione sia della varia natura dell'idrosilicato (talvolta anche caolinitico) sia in funzione dei tenori percentuali dell'idrosilicato contenuto, per cui sono variamente utilizzate, non mai però per usi pregiati o per confenzioni di prodotti di qualità.

(1) A proposito di questo centro vulcanico tanto interessante e non mai precedentemente segnalato nonostante ricorra su un itinerario percorso da molti geologi si veda: *Il centro Vulcanico terziario di Villanova Tulo* in « Rendiconti dell'Associazione Mineraria Sarda », 1956.

(2) Si veda in proposito: A. CAVINATO, « Resoconti Ass.ne Mineraria sarda », 1956, *Ocre e diaspri di Capo Rosso e di Capo Beciu*.

## CONCLUSIONI.

1) *Giaciture.*

Le giaciture delle rocce bentonitiche italiane *tutte di franca natura vulcanica*, si classificano come segue: *a)* in filoni, anche ad incassamento regolare, sia in terreni sedimentari, sia entro terreni eruttivi; *b)* quali facies particolari in cui sfuma gradualmente l'eruttivo: ed in tal caso il coltivabile ha forme variabilissime (lingue, piccoli ammassi lenti, ecc.), *c)* espandimenti lavici e piroclastici subaerei e sottomarini (forme stratoidi).

2) *Età.*

Appartengono al terziario: solo alcune del Vicentino sono del mesozoico. Le eventuali che si fossero prodotte in tempi più remoti, è ovvio che susseguenti processi diagenetico-metamorfici ne avrebbero facilmente cancellate le peculiarità e le avrebbero trasformate in altri tipi di rocce: ad esempio in scisti sericitici od in cloritoscisti più o meno micacei.

3) *Composizione e facies.*

Sono caratterizzate dalla presenza di idrosilicati della famiglia della montmorillonite, della illite, della clorite <sup>(3)</sup>, ecc., associati a feldspati, a miche specie sericitiche e vermiculitiche ma anche biotitiche, ed ai comuni minerali accessori: zircone, rutilo, ossidi di ferro, solfurati metallici, ecc.

Il tipo magmatico cui appartengono spazia dal liparitico (Ponza) al basaltico (Castelgomberto).

Si utilizzano attualmente solo quelle che hanno alte percentuali in idrosilicati gelatinizzanti.

Sottoponendo le subbentoniti (bentoniti scadenti) a trattamenti idrogravimetrici intesi ad eliminare la parte non colloidale si potranno garantire alla industria i necessari rifornimenti per un tempo lunghissimo.

Nei depositi ricordati si osservano tutte le facies di graduale passaggio sia alla roccia eruttiva normale (liparite, porfiriti, trachite, tufi cineritici e vetrofirici, ecc.) sia a tipi rocciosi caolinici (S. Ulderico dei Tretti).

## GENESI DEL FILONIANO.

La genesi dei depositi utili, che è un aspetto particolare della genesi delle rocce, esercita un particolare fascino sullo studioso.

Invero il tentativo di precisare, sia pure talora in modo approssimativo, le condizioni ambientali complessive (geologiche, geochimiche, geofisiche) esistenti durante il formarsi dell'accumulo utile è il tema scientifico fondamentale: se risolto, non solo porta a superare l'empirismo che mortifica alcuni capitoli della minerogenesi e della petrogenesi elevandoli a dignità di scienza esatta; ma suggerisce una interpretazione (ed anche una previsione) dei conseguenti problemi di forma, di sviluppo, di struttura, di tessitura, di ganghe ecc.; anzi fa tutt'uno con questi.

Soprattutto dalla risoluzione del problema genetico consegue il *più sicuro*, il *più utile*, il *più pratico* criterio per la prospezione geomineraria, per la ricerca di nuovi giacimenti, ed anche per la minuta ricerca che in ogni singola miniera tanto affanna i dirigenti.

Nel caso in esame la fedele descrizione dei fatti scrupolosamente osservati consentirà delle considerazioni, forse non prive di interesse.

(3) Per la chimica-fisica cristallografica dell'idrosilicato si rimanda alla letteratura. Si veda tra l'altro: GRIM CLAY MINERALOGY, p. 55; *Clay and Clay minerals*, « Proceedings of the third national conference on clays and clay minerals ». Washington 1955, ecc.



L'opinione corrente è che le rocce bentonitiche conseguano da alterazione superficiale operata da acque (marine o di precipitazione a seconda dei casi), agenti per *descensum* su tufi cineritici o vetrofirici o su rocce già consolidate; oppure da metasomatosi operata da convogli idrotermali, agenti, quindi, per *ascensum*, su gli stessi materiali.

Con tali assunzioni non si spiega la genesi delle bentoniti della Puglia, della Sardegna e del Pesarese: per le quali si può escludere con sicurezza che dopo la loro messa in posto abbiano subito delle trasformazioni di natura chimica indotte da « agenti » operanti per *descensum* o per *ascensum*.

Infatti ricordiamo, che nelle Puglie e nel Pesarese i *filoni*, sia stratoidi che discordanti, sono entro, alle marne, alle argille marnose ecc.; che essi sono ricchi di minute apofisi, di sfrangiamenti che si spingono ad oltre cento metri di profondità, con rigorosa uniformità di facies, entro terreni sedimentari ad alta impermeabilità, e facciamo osservare sia la improbabilità di una trasformazione operata da acque discendenti; sia la impossibilità di una metasomatosi indotta per *ascensum*, da convogli idrotermali che abbiano agito solo sull'eruttivo « bentonitico » inseguendolo nelle sue tortuose diramazioni, nelle sue minute sfrangiature, rispettando, *rigorosamente*, le rocce incassanti che sono più permeabili e più aggredivibili.

E ricordiamo pure che alcune bentoniti della Sardegna (Alghero, Nugheddu, ecc.) ricorrono in filoni, in lenti, in lingue, entro ai tufi trachitici e andesitici cineritici e vetrofirici e nelle trachiti anche porose; che tali filoni e lenti e lingue sono talora verticali ed a salbande che staccano nettissime, e facciamo osservare che l'aggressione per *descensum* o per *ascensum* non avrebbe potuto certamente compiersi solo su di essi, e non anche sull'adiacente vulcanico.

Nel mentre invece su di questo è assente sia alle salbande di contatto con il bentonitico, sia in ogni sua altra parte, ogni traccia di alterazione superficiale, ed ogni traccia, anche minima, di azioni metasomatizzanti.

Per queste rocce bentonitiche in giaciture filoniane la supposizione più probativa e convincente che si può formulare è che derivino da particolari « magmi » ricchi in vapori d'acqua, che all'atto della messa in posto avevano una composizione chimica (*non* quella mineralogica) non molto diversa da quella che hanno le relative rocce, cui consolidando misero capo.

Durante il raffreddamento di detti « magmi » non si è compiuta nessuna sensibile migrazione di materia da essi verso le rocce incassanti (che è fatto osservato ed inconfutabile), e neppure nessuna immissione in essi di materia.

Durante il raffreddamento può bensì essersi compiuto quell'insieme di mutamenti nella composizione mineralogica, vistosa in ambienti ricchi in elementi fluidi, riferibile però ad « evoluzione autometamorfiche »: tra cui la « argillificazione » dei silicati bianchi e scuri, che eventualmente si fossero trovati a nuotare nel « magma » all'atto della messa in posto, dovrebbe essere la più palese e frequente (autometasomatosi. Cfr. anche Grubenmann-Niggli-Gesteinsmet. pp. 186 e 187): fatto questo compiutosi nello stadio idrotermale del raffreddamento.

Uno stadio di cui è innegabile esistenza anche in rocce abissali sia pure con effetti minimi e localizzati (sausuritizzazione o sericitizzazione o cloritizzazione o talcizzazione etc. di silicati).

Circa la temperatura di questi particolari magmi all'atto della messa in posto, si può solamente inferirne che non doveva essere alta, perché mancano anche alle salbande dei più grossi filoni, di Puglia, del Pesarese, del Vicentino, di Sardegna accenni di metamorfismo termico. È quindi ammissibile che l'azione autometamorfica propria dello stadio idrotermale del raffreddamento possa essersi iniziata anche prima della messa in posto.

Queste considerazioni circa la genesi delle descritte rocce bentonitiche filoniane ci sembrano le più adatte a spiegare i fatti. Invitiamo gli studiosi a dirci in merito il loro parere.

## GENESI DEGLI ALTRI DEPOSITI.

Anche per gli altri depositi di cui in *b*) e *c*) delle conclusioni saremo tentati di attribuire una genesi analoga per i seguenti motivi.

Ad esempio a Ponza le migliori qualità sono in profondità (si coltivano in sotterraneo a pannelli); e sono inviluppate da ogni parte da qualità scadenti o sfumano in facies rocciose liparitiche. Come spiegarne la genesi con azioni di acque o convogli penetrativi?!

Nello stratiforme (vicentino e sardo) le parti alte sono rifiutate, perché scadenti: il basale o sfuma gradualmente nella roccia normale, o poggia su altri tipi rocciosi senza che vi sia sulla superficie di separazione i « crostoni » basali che sempre si formano nelle azioni di alterazione per descensum (esempio crostoni di silice alle basi delle lateriti; zone di cementazioni nei solfurati, ecc.).

*Osservazione 1<sup>a</sup>.* - La argillificazione (e la caolinizzazione e la sericitizzazione ecc.) si può produrre anche per via idrotermale, o per azione per descendum di acque acidule od alcaline, o per lateritizzazione, o per azione degli acidi organici dalle piante, ecc. (Cavinato *Depositi Minerari*, p. 391 e sg.; R. E. Grim. *Clay Mineralogy*, p. 316 e sg. ecc.). Ma non è questo il tema che si voleva trattare.

*Osservazione 2<sup>a</sup>.* - È ovvio che l'affiorante bentonitico in giacitura primaria può subire rimaneggiamenti (compresi eventuali trasporti e ridepositi): e che per tal quisa può formarsi un deposito secondario (es. Villanova Tulo; Vicentino ecc.) di « detritical o transported clay ».

Ho riscontrato che il rimaneggiato (detritico o trasportato) ha più alti tenori in allumina, più bassi tenori in alcali, e specie in calcio, magnesio e quarzo, in conseguenza di dilavamenti e delle selezioni che si compiono nel rimaneggiamento; che le proprietà bentonitiche sono in esso sensibilmente smorzate e talora cancellate; che le sue peculiarità si spostano verso quelle delle ordinarie argille sedimentari (lacustri, palustri, marine, glaciali ecc.).

Tuttavia è d'uopo far osservare che anche nel rimaneggiato (come pure in tante argille sedimentarie) l'idrosilicato colloidale, idrofilo, gelatinizzante, assorbente, gonfiante, attivabile, a basi sostituibili ecc., è sempre presente, ma in quantità limitate ed insufficienti ad impartire peculiarità per cui possa prestarsi agli ordinari usi cui si prestano le bentoniti in giacitura primaria <sup>(4)</sup>. Da tale rimaneggiato (come pure da talune argille sedimentarie) può estrarsi la frazione di idrosilicato colloidale: così come sopra si è supposto possibile per le nostre rocce bentonitiche scadenti. In tal modo si possono avere bentoniti artificiali anche pregiate.

(4) Per gli usi si veda specialmente: *La Bentonite*, Paris Dunod, 1951.



## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Calcolo delle Probabilità.** — *Propriétés asymptotiques des chaînes à liaisons complètes.* Nota (\*) di GEORGE CIUCU, presentata dal Socio M. PICONE.

Dans cette Note nous allons donner quelques résultats sur les chaînes à liaisons complètes ayant un ensemble dénombrable d'états possibles, et sur les chaînes à liaisons complètes dont les probabilités de passage s'expriment par des densités.

## LES CHAÎNES A LIAISONS COMPLÈTES DE TYPE (B).

Soit: (i)  $S$  un ensemble dénombrable; (ii)  $W = \prod_{j \in -N} S^{(j)}$  où  $\overset{(j)}{S} = S$ , pour tout  $j \in -N$  (1); (iii) pour toute partie  $I \subset N^*$ ,  $S^I = \prod_{j \in I} \overset{(j)}{S}$  où  $\overset{(j)}{S} = S$ , pour  $j \in I$ . Pour toute suite  $(x_1, \dots, x_s) \in S^{\{1, 2, \dots, s\}}$  désignons par  $u_{x_1, \dots, x_s}$  l'application de  $W$  en  $W$  définie pour  $c = (x_{-n})_{n \in N} \in W$  par l'égalité  $u_{x_1, \dots, x_s}(c) = (\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_s)$ .

Soit  $P_x^1(c)$  une fonction définie pour  $x \in S$  et  $c \in W$  satisfaisant les conditions

$$(1) \quad 0 \leq P_x^1(c) \leq 1$$

$$(2) \quad \sum_{x \in S} P_x^1(c) = 1.$$

Pour tout  $n > 1$  posons

$$(3) \quad P_x^n(c) = \sum_{y \in S} P_y^1(c) P_x^{n-1}(u_y(c)).$$

Les fonctions  $P_x^n(c)$  définies par l'égalité (3) peuvent être considérées comme des probabilités de passage correspondant à une chaîne à liaisons complètes ayant une infinité dénombrables d'états (2).

Pour  $c \in W$  et  $A \subset S^{\{1, \dots, s\}}$  posons

$$P_A^1(c) = \sum_{(a_1, \dots, a_s) \in A} P_{a_1}^1(c) P_{a_2}^1(u_{a_1}(c)) \cdots P_{a_s}^1(u_{a_1, \dots, a_{s-1}}(c)).$$

Posons encore pour tout  $n > 1$

$$P_A^n(c) = \sum_{y \in S} P_y^1(c) P_A^{n-1}(u_y(c)).$$

(\*) Pervenuta all'Accademia il 24 giugno 1957.

(1)  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$  et par suite  $-N = \{0, -1, -2, \dots\}$ . Nous posons encore  $N^* = \{1, 2, \dots\}$ .

(2) Voir l'article [11] de O. ONICESCU et G. MIHOC, et l'article [1] de W. DOEBLIN et R. FORTET.

Une chaîne à liaisons complètes définie par les probabilités  $P_x^i(c)$  est une chaîne de type (B) si, quels que soient:

$$c, c' \in W, y \in S \quad \text{et} \quad (x_1, \dots, x_s) \subset S^{\{1, \dots, s\}}$$

on a

$$P_y^i(u_{x_1, \dots, x_s}(c)) = P_y^i(u_{x_1, \dots, x_s}(c')) (1 + \theta \varepsilon_s)$$

où

$$|\theta| = |\theta(c, c', y, s)| < 1, \varepsilon_s > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{s \in N^*} \varepsilon_s < \infty.$$

Une chaîne à liaisons complètes vérifie la condition (K) s'il existe un  $\lambda > 0$  tel qu'on ait  $P_x^i(c) \geq \lambda P_x^i(c')$  quels que soient  $c, c' \in W$  et  $x \in S$ .

**THÉOREME A.** — *Considérons une chaîne à liaisons complètes de type (B) dont les probabilités de passage  $P_x^i(c)$  vérifient la condition (K). Alors il existe une suite décroissante  $(\eta(n))_{1 \leq n < \infty}$  convergeant vers zero et une fonction  $P_A^\infty$  définie pour toute partie  $ACS^{\{1, \dots, s\}} (s \in N^*)$  telle qu'on ait, quels que soient  $n \in N^*, c \in W$  et  $ACS^{\{1, \dots, s\}}$ , l'inégalité*

$$|P_A^n(c) - P_A^\infty| \leq \eta(n).$$

Si  $\varepsilon_s = a^s$  ( $0 < a < 1$ ) on peut prendre  $\eta(n) = Le^{-\lambda \sqrt{n}}$  ou  $L$  et  $\lambda$  sont deux constantes convenablement choisies<sup>(3)</sup>.

#### CHAÎNES À LIAISONS COMPLÈTES VÉRIFIANT LA CONDITION (G).

Une chaîne à liaisons complètes définie par les probabilités  $P_x^i(c)$  vérifie la condition (G) s'il existe une fonction  $P_A^\infty$  définie pour toute partie  $ACS^{\{1, \dots, s\}}$  et deux nombres  $L > 0$  et  $\lambda > 0$  tels que pour tout  $n \in N^*, c \in W$  et  $ACS^{\{1, \dots, s\}} (s \in N^*)$  on ait l'inégalité

$$|P_A^n(c) - P_A^\infty| \leq Le^{-\lambda \sqrt{n}}.$$

Dans ce paragraphe nous supposons la condition (G) vérifiée.

Désignons par  $\mathfrak{B}$  le corps borelien engendré par les parties du produit  $S^{N^*}$  de la forme  $\prod_{j \in N^*} A_j$  où  $A_j \subset S$  pour tout  $j \in N^*$ . Si pour tout ensemble

$$(4) \quad A = pr_{\{1, \dots, s\}}^{-1}(A_1) \in \mathfrak{B}$$

où  $A_1 \subset S^{\{1, \dots, s\}}$  nous posons  $Q_c(A) = P_{A_1}^i(c)$ , alors il existe ([3], [8]) une probabilité et une seule sur  $\mathfrak{B}$  que nous allons noter encore  $Q_c$ , qui coïncide avec  $Q_c$  sur les ensembles (4). Pour tout  $c \in W$  l'objet  $\{S^{N^*}, \mathfrak{B}, Q_c\}$  est un champ de probabilité. La valeur moyenne d'ordre un d'une variable aléatoire  $h$  définie sur  $S^{N^*}$ ,  $Q_c$  intégrable sera désignée par  $M_c(h)$ .

(3) Pour des résultats semblables voir [1] et [11], où sont étudiées des chaînes à liaisons complètes à un ensemble fini d'états. Voir aussi [2], [4], [7] et [12].

Soit  $f$  une fonction bornée définie sur  $S$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  désignons par  $f_n$  la fonction définie sur  $S^{\mathbb{N}^*}$  par l'égalité  $f_n(\omega) = f(pr_n(\omega))$  et par  $g_n$  la somme  $\sum_{j=1}^n f_j$ .

Posons encore

$$M_1^\infty = \sum_{x \in S} f(x) P_{\{x\}}^\infty \quad ; \quad M_2^\infty = \sum_{x \in S} f(x)^2 P_{\{x\}}^\infty$$

et pour  $s > 2$

$$M_1^\infty(f_1 \cdot f_s) = \sum_{(a_1, \dots, a_s) \in S^{\{1, \dots, s\}}} f(a_1) f(a_s) P_{\{(a_1, \dots, a_s)\}}^\infty.$$

On peut démontrer que la série  $\sum_{s=1}^\infty M_1^\infty(f_1 f_{s+1})$  est absolument convergente ce qui nous permet de définir le nombre  $\sigma$  par l'égalité

$$\sigma^2 = M_2^\infty + \sum_{s=1}^\infty M_1^\infty(f_1 f_{s+1}) + (M_1^\infty)^2.$$

**THÉORÈME B.** — *Il existe une constante  $H$ , convenablement choisie qui vérifie l'inégalité*

$$(5) \quad \left| \frac{1}{n} M_c((g_n - M_c(g_n))^2) - \sigma^2 \right| \leq H \left( \frac{1}{n} + \inf_{1 < q < \infty} \left( \frac{q+1}{n} + e^{-\lambda \sqrt{q+1}} \right) \right)$$

quels que soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $c \in W$ .

**THÉORÈME C.** — *Si  $\sigma^2 \neq 0$  on a pour tout  $c \in W$*

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_c \left( \frac{f_1 + \dots + f_n - n M_1^\infty}{\sqrt{n}} < a \right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \quad (4).$$

#### CHAÎNES A LIAISONS COMPLÈTES AVEC DENSITÉ.

Soit  $\{S, \mathfrak{F}, P\}$  un champ de probabilité où le corps borelien  $\mathfrak{F}$  contient toutes les parties de  $S$  de la forme  $\{x\}$ . Soit: (i)  $W = \prod_{j \in -N} S^{(j)}$ , où  $S^{(j)} = S$ , pour  $j \in -N$ ; (ii) pour toute partie  $I \subset \mathbb{N}^*$ ,  $S^I = \prod_{j \in -1} S^{(j)}$  où  $S^{(j)} = S$  pour  $j \in I$ .

Désignons par  $\mathfrak{B}$  le corps borelien engendré par les parties de  $W$  de la forme  $\prod_{j \in -N} A_j$  où  $A_j \in \mathfrak{F}$  pour  $j \in -N$  et pour toute partie  $I \subset \mathbb{N}^*$  par  $\mathfrak{B}^I$  le corps borelien engendré par les ensembles de la forme  $\prod_{j \in I} A_j$ , où  $A_j \in \mathfrak{F}$ , pour  $j \in I$ . Pour toute suite  $(x_1, \dots, x_s) \in S^{\{1, \dots, s\}}$  désignons par  $u_{x_1, \dots, x_s}$  l'appli-

(4) Voir aussi [1] et [13].

tion de  $W$  en  $W$  définie par l'égalité  $u_{x_1, \dots, x_s}(c) = (\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_s)$ . On vérifie sans difficultés que pour  $A \subset \mathcal{B}$ ,  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $c \in W$

$$\{(x_1, \dots, x_s) \mid u_{x_1, \dots, x_s}(c) \in A\} \in \mathcal{B}^{\{1, \dots, s\}}.$$

Soit  $\varphi(c, x)$  une fonction réelle positive et bornée définie sur  $W \times S$  ayant les propriétés

$$(7) \quad \varphi(c, x) \text{ est } \mathcal{B} \times \mathcal{F} \text{ mesurable}$$

$$(8) \quad \text{pour tout } c \in W, \quad \int_S \varphi(c, x) dP(x) = 1$$

pour tout  $n > 1$  posons

$$(9) \quad \varphi^n(c, x) = \int_S \varphi^1(c, z) \varphi^{n-1}(u_z(c), x) dP(z).$$

Les fonctions

$$P^n(c, A) = \int_A \varphi^n(c, x) dP(x), \quad (A \in \mathcal{F}, c \in W)$$

peuvent être considérées comme des probabilités de passage correspondant à une chaîne à liaisons complètes;  $S$  représente l'ensemble d'états possibles, les fonctions  $\varphi^n(c, x)$  sont les densités de probabilités de passage. Nous allons les appeler densités de passage.

Nous disons qu'une chaîne à liaisons complètes définie par les densités de passage  $\varphi^n(c, x)$  est une chaîne de type  $(B^*)$  si quels que soient  $c, c' \in W$ ,  $x \in S$  et  $(x_1, \dots, x_s) \in S^{\{1, \dots, s\}}$  on a

$$\varphi(u_{x_1, \dots, x_s}(c), x) = \varphi(u_{x_1, \dots, x_s}(c'), x) (1 + \theta \varepsilon_s)$$

où

$$|\theta| = |\theta(c, c', x, s)| \leq 1, \quad \varepsilon_s > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{s \in \mathbb{N}^*} \varepsilon_s < \infty.$$

La condition  $(K^*)$  est vérifiée s'il existe un  $\lambda > 0$  qui vérifie l'inégalité

$$\varphi(c, x) \geq \lambda \varphi(c', x)$$

quels que soient  $c, c' \in W$  et  $x \in S$ .

**THÉOREME D.** - *Considérons une chaîne à liaisons complètes de type  $(B^*)$  dont les densités de passage vérifient la condition  $(K^*)$ . Alors il existe une suite décroissante  $(\eta(n))_{1 \leq n < \infty}$  convergeant vers zéro et une fonction  $\varphi^\infty(x)$  définie sur  $S$  qui vérifie pour tout  $x \in S, c \in W$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  l'inégalité*

$$|\varphi^n(c, x) - \varphi^\infty(x)| \leq \eta(n).$$

*Remarque.* - Par certaines conditions, on peut obtenir pour les densités  $\varphi^n(c, x)$ , à l'aide des théorèmes démontrés dans [9], des résultats analogues aux résultats obtenus dans [7].



## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] W. DOEBLIN et R. FORTET, *Sur les chaînes à liaisons complètes*, « Bull. Soc. Math. France », 65 (1937).
- [2] W. DOEBLIN, *Remarques sur la théorie métrique des fractions continues*, « Compositio Math. », vol. 7 (1940).
- [3] J. L. DOOB, *Stochastic processes*, John Wiley & Son, New York (1953).
- [4] R. FORTET, *Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et leurs applications à la théorie de probabilité en chaîne*, Thèse, Paris (1938).
- [5\*] R. FORTET et A. BLANC-LAPIERRE, *Théorie des fonctions aléatoires*, Messa, Paris (1953).
- [6\*] T. E. HARRIS, *On a chaîne of infinite order*, « Pacific J. Math. », 5 (1955).
- [7] C. T. IONESCU TULCEA et GH. MARINESCU, *Sur certaines chaînes à liaisons complètes*, « C. R. », 227 (1948).
- [8] C. T. IONESCU TULCEA, *Mesures dans les espaces produits*, « Atti dell'Acad. Naz. dei Lincei », vol. III (1949).
- [9] C. T. IONESCU TULCEA et GH. MARINESCU, *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues*, « Ann. of Math. », 72 (1950).
- [10\*] S. KARLIN, *Some random walks arising in learning models*, « Pacific J. Math. », 3 (1953).
- [11] O. ONICESCU et GH. MIHOC, *Sur les chaînes de variables statistiques*, « Bull. Sci. Math. », 59 (1935).
- [12] O. ONICESCU, *Théorie générale des chaînes à liaisons complètes*, « Act. Scient. », 737, Paris (1937).
- [13] O. ONICESCU et GH. MIHOC, *Comportement asymptotique des chaînes à liaisons complètes*, « Disq. Math. et Phys. », Tom I (1940).
- [14\*] O. ONICESCU, *Calculul Probabilităților*, Editura Tehnica, Bucuresti 1956.

\* Nous citons aussi ces quatre ouvrages qui apportent des contributions aux chaînes à liaisons complètes quoiqu'ils ne soient pas utilisés directement dans le texte.

**Analisi.** — *Sopra una costruzione di sistemi di rappresentanti di classi relative a  $G_2$  di forme quadratiche binarie primitive di seconda specie di determinante  $D > 0$  e  $\equiv 5 \pmod{8}$* . Nota<sup>(\*)</sup> di CARLO CELLITTI, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

I. — Anche questa Nota, al pari delle due <sup>(1)</sup> precedenti, ha il suo addentellato nelle relazioni del Gauss <sup>(2)</sup> tra i numeri delle classi di forme quadratiche binarie primitive di prima e di seconda specie di determinante  $D$ , e nelle ricerche del Dirichlet <sup>(3)</sup> sullo stesso argomento.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 14 giugno 1957.

(1) Cfr. *Sopra una proprietà delle forme quadratiche binarie primitive di determinante  $D \equiv 1 \pmod{4}$* . [« Bollettino dell'U.M.I. », dicembre 1955, n. 4, pp. 527-530]; *Sopra una costruzione di sistemi di rappresentanti di classi di forme quadratiche binarie primitive di prima e di seconda specie rispettivamente, di determinante  $D \equiv 1 \pmod{8}$*  [« Rendiconti Acc. Nazionale dei Lincei », fasc. 1-2, luglio-agosto 1956, pp. 57-60].

(2) Cfr. G. GAUSS, *Disquisitiones arithmeticae*, Lipsiae 1801, artt. 253-256; Werke, I, pp. 270-284 (Gottingen, 1870).

(3) Cfr. P. G. LEJEUNE DIRICHLET, *Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, « Journ. für d. r. u. a. mathem. » (von Crelle), Bd. 19, pp. 324-369; Bd. 21, pp. 1-12, 134-155 (1839-1840); Werke, I Bd., pp. 411-496 (Berlin 1889).

Si consideri la forma quadratica binaria

$$f \equiv (a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

di determinante  $D = b^2 - ac$ , non quadrato, e si ponga m.c.d.  $(a, b, c) = \tau$ , e m.c.d.  $(a, 2b, c) = \sigma$ . Ricordiamo che  $f$  si dice primitiva quando  $\tau = 1$ , primitiva di prima specie se  $\tau = \sigma = 1$ , primitiva di seconda specie se  $\tau = 1$ ,  $\sigma = 2$ . Com'è ovvio, per le primitive di seconda specie dev'essere  $b$  dispari, perché, altrimenti, non sarebbero  $a, b, c$  primi fra loro.

Due forme quadratiche binarie si dicono equivalenti se si può passare dall'una all'altra mediante una sostituzione  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  lineare, unimodulare ( $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ) a coefficienti interi.

Dalle classiche formule

$$a_2 = a_1 \alpha^2 + 2b_1 \alpha\gamma + c_1 \gamma^2$$

$$b_2 = a_1 \alpha\beta + b_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + c_1 \gamma\delta$$

$$c_2 = a_1 \beta^2 + 2b_1 \beta\delta + c_1 \delta^2$$

che legano i coefficienti  $a_1, b_1, c_1$ , ed  $a_2, b_2, c_2$  di due forme equivalenti, si vede che m.c.d.  $(a_1, b_1, c_1) = m.c.d. (a_2, b_2, c_2)$ , e che, essendo  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , risulta  $D = b_1^2 - a_1 c_1 = b_2^2 - a_2 c_2$ .

2. Se consideriamo, ora, le sostituzioni lineari unimodulari a coefficienti interi  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  per le quali è  $\beta \equiv 0 \pmod{p}$ , si vede che esse costituiscono un gruppo  $(4) G_p$ . In particolare, per  $p = 2$ , le sostituzioni aventi  $\beta$  pari costituiscono il gruppo  $G_2$ .

Equivalenza rispetto a  $G_2$ . - Seguendo l'uso, diremo che la forma  $f'$  è equivalente ad  $f$  rispetto a  $G_2$ , e scriveremo  $f' \sim f(G_2)$ , se esiste una sostituzione  $S$  di  $G_2$  tale che  $f' = Sf$ . Questa relazione risulta, evidentemente, riflessiva, simmetrica, transitiva.

Se, analogamente a quanto si fa per l'equivalenza in senso generale, ripartiamo tutte le forme di uno stesso determinante in classi, col criterio di porre in una stessa classe le forme tra loro equivalenti rispetto a  $G_2$ , ci sarà lecito di rappresentare ciascuna classe con una delle sue forme scelta ad arbitrio, e di costruirci, così, un sistema completo di forme non equivalenti rispetto a  $G_2$ .

(4) La legge di composizione

$$S \cdot S' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix}$$

ed il fatto che

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

ci mostrano la proposizione evidente secondo cui, essendo  $\beta$  e  $\beta' \equiv 0 \pmod{p}$ , anche i secondi coefficienti di  $S \cdot S'$ ,  $I$ ,  $S^{-1}$  sono  $\equiv 0 \pmod{p}$ . Tanto basta per affermare che le sostituzioni  $S$  aventi come secondo coefficiente un multiplo di  $p$  costituiscono un gruppo.

3. — Tutto ciò premesso, entriamo nella sostanza del presente lavoro. Come ho dimostrato nella seconda delle citate note, è sempre possibile di costruire un sistema completo (H) di rappresentanti di classi di forme quadratiche binarie primitive di prima specie di determinante D del tipo

$$(H) \quad (4a_1, b_1, c_1), (4a_2, b_2, c_2) \cdots (4a_m, b_m, c_m)$$

ove i coefficienti  $b_i, c_i$  sono dispari, ed  $m$  è il numero delle classi; e di costruirci, altresì, un sistema completo (K) di rappresentanti di classi di forme quadratiche binarie primitive di seconda specie dello stesso determinante D del tipo

$$(K) \quad (2d_1, e_1, 2g_1), (2d_2, e_2, 2g_2) \cdots (2d_n, e_n, 2g_n)$$

ove i coefficienti  $g_i$  sono dispari, ed  $n$  è il numero delle classi.

Essendo le (K) primitive di seconda specie, i coefficienti  $e_i$  sono dispari, e, quindi  $e_i^2 = (4l \pm 1)^2 = 8l' + 1 \equiv 1 \pmod{8}$ . Analogamente, essendo i coefficienti  $b_i$  delle (H) anch'essi dispari, sarà  $b_i^2 \equiv 1 \pmod{8}$ . Sicché, volendo discutere il caso di  $D = b_i^2 - 4a_i c_i = (e_i^2 - 4d_i g_i) \equiv 5 \pmod{8}$ , dobbiamo supporre  $4a_i c_i, 4d_i g_i \equiv 4 \pmod{8}$ , e, quindi, insieme con  $c_i, g_i$ , debbono essere dispari anche  $a_i, d_i$ .

4. — Se dividiamo per 2 il primo coefficiente, e moltiplichiamo, invece, per 2 il terzo coefficiente di ciascuna delle  $m$  forme (H), avremo le altrettante forme (H')

$$(H') \quad (2a_1, b_1, 2c_1), (2a_2, b_2, 2c_2) \cdots (2a_m, b_m, 2c_m)$$

primitive di seconda specie dello stesso determinante  $D \equiv 5 \pmod{8}$ , nelle quali è necessario rilevare, per quello che segue, che, essendo i semicoefficienti  $c_i$  tutti dispari, risultano tutti i coefficienti  $2c_i \equiv 0 \pmod{4}$ .

Proprietà delle forme (H'). — a) In (H') non vi sono forme equivalenti rispetto a  $G_2$ . Infatti, se due forme  $f_r = (2a_r, b_r, 2c_r)$  ed  $f_s = (2a_s, b_s, 2c_s)$  di (H') fossero equivalenti rispetto a  $G_2$ , esisterebbe una sostituzione  $\begin{pmatrix} \alpha & 2\sigma \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  di  $G_2$  per cui  $\begin{pmatrix} \alpha & 2\sigma \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} f_r = f_s$ . Ma, com'è facile verificare, dalle relazioni che legano i coefficienti di  $f_r$  ed  $f_s$  si ricavano (moltiplicando la prima per 2, e dividendo, invece, per due la terza) le formule di passaggio dalla forma  $(4a_r, b_r, c_r)$  alla forma  $(4a_s, b_s, c_s)$  del medesimo sistema (H), quando alla prima si applica la sostituzione unimodulare  $\begin{pmatrix} \alpha & \sigma \\ 2\gamma & \delta \end{pmatrix}$ . Se ne conclude che dovrebbero esser equivalenti  $(4a_r, b_r, c_r)$  e  $(4a_s, b_s, c_s)$ , il che è impossibile.

b) Ogni forma quadratica binaria primitiva di seconda specie di determinante  $D \equiv 5 \pmod{8}$ , la cui terzo coefficiente è  $\equiv 0 \pmod{4}$ , è sempre equivalente, rispetto a  $G_2$ , ad una forma di (H').

Osservazione. — Evidente è il perché della condizione imposta al terzo coefficiente.

Dalla relazione  $2c_i = 2(a_k \beta^2 + b_k \beta \delta + c_k \delta^2)$  che lega i coefficienti  $2c_i$  e  $2c_k$  di due forme quadratiche binarie primitive di seconda specie equivalenti, si vede subito che, se  $\beta$  è pari, le forme sono equivalenti rispetto a  $G_2$ ,

e, in tal caso, se anche  $c_k$  è pari, risulta  $2c_i \equiv 0 \pmod{4}$ ; il che è quanto dire che se una forma quadratica binaria primitiva di seconda specie ha il coefficiente  $2c_k \equiv 0 \pmod{4}$  essa fa parte di una classe relativa a  $G_2$  di forme che godono tutte la proprietà di avere i coefficienti  $2c_i \equiv 0 \pmod{4}$ , e, pertanto, questa classe non può avere alcun rappresentante in  $(H')$  le cui forme hanno tutte il terzo coefficiente  $\equiv 0 \pmod{4}$ . Se ne conclude che le forme quadratiche binarie primitive di seconda specie di determinante  $D \equiv 5 \pmod{8}$ , i cui terzi coefficienti sono  $\equiv 0 \pmod{4}$  costituiscono delle classi a parte non rappresentabili in  $(H')$ .

Passiamo, ora, alla dimostrazione della proprietà b).

Sia, dunque,  $(2d_k, e_k, 2g_k)$  una qualunque forma quadratica binaria primitiva di seconda specie di determinante  $D \equiv 5 \pmod{8}$ , con  $2g_k \equiv 2 \pmod{4}$ , ovvero  $g_k \equiv 1 \pmod{2}$ . Potendosi da essa dedurre l'altra  $(4d_k, e_k, g_k)$  la quale, essendo primitiva di prima specie dello stesso determinante  $D$ , risulta equivalente a una forma di  $(H)$ , per esempio  $(4a_i, b_i, c_i)$ , esisterà una sostituzione lineare unimodulare a coefficienti interi  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  per cui:

$$\begin{aligned} 4a_i &= 4d_k \alpha^2 + 2e_k \alpha\gamma + g_k \gamma^2 \\ b_i &= 4d_k \alpha\beta + e_k (\alpha\delta + \beta\gamma) + g_k \gamma\delta \\ c_i &= 4d_k \beta^2 + 2e_k \beta\delta + g_k \delta^2. \end{aligned}$$

La prima di queste formule ci mostra che, essendo  $g_k$  dispari, deve essere  $\gamma$  pari, e, quindi,  $\gamma/2$  un numero intero. Sicché la sostituzione  $\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \gamma/2 & \delta \end{pmatrix}$  è a coefficienti interi, unimodulare e del gruppo.  $G_2$ . E poiché dividendo la prima delle medesime formule per 2, e moltiplicando, invece, per 2 la terza si ottengono le formule di passaggio dalla forma  $(2d_k, e_k, 2g_k)$  alla forma  $(2a_i, b_i, 2c_i)$ , quando alla prima si applica la sostituzione  $\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \gamma/2 & \delta \end{pmatrix}$ , rimane dimostrata la proprietà b).

*Le proprietà a) e b) ci mostrano che le  $(H')$  costituiscono un sistema di rappresentanti di classi relative a  $G_2$  di forme primitive di seconda specie di determinante  $D \equiv 5 \pmod{8}$ , il cui terzo coefficiente è  $\equiv 0 \pmod{4}$ .*

5. - Vediamo, ora, se non sia possibile di costruirci un sistema avente le stesse proprietà a) e b) utilizzando le forme  $(K)$ .

Premesso che ogni sostituzione  $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  lineare, unimodulare a coefficienti interi può esprimersi in un sol modo mediante il prodotto

$$S = T_r U_r^{(5)}$$

(5) Si tratta di far vedere che  $T_r = SU_r^{-1}$  è del gruppo  $G_2$  per uno solo dei tre valori di  $r$ . Infatti, si ha:

$$T_1 = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha + \beta \\ \gamma & \gamma + \delta \end{pmatrix}$$

Essendo  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  debbono essere entrambi dispari, o l'uno pari e l'altro dispari. Se sono entrambi dispari risulta  $\alpha + \beta$  pari e la sostituzione  $T_3$  è l'unica che risponde alla questione; se è  $\beta$  pari ed  $\alpha$  dispari, risponde alla questione la sostituzione  $T_2$ ; se, infine, è  $\beta$  dispari ed  $\alpha$  pari, risponde alla questione la sostituzione  $T_1$ .



$T_r$  essendo una sostituzione del gruppo  $G_2$ , ed  $U_r$  una delle sostituzioni

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

consideriamo una qualunque forma quadratica binaria primitiva di seconda specie  $(2d_k, e_k, 2g_k)$  di determinante  $D \equiv 5 \pmod{8}$ . Poiché ad essa ne corrisponde una equivalente nel sistema (K), per esempio  $(2d_i, e_i, 2g_i)$ , esisterà una sostituzione lineare unimodulare  $S$  per cui

$$(2d_k, e_k, 2g_k) S = (2d_i, e_i, 2g_i)$$

ovvero, essendo  $S = T_r \cdot U_r$ ,

$$(9) \quad (2d_k, e_k, 2g_k) T_r = (2d_i, e_i, 2g_i) U_r^{-1}.$$

Ricordando, ora, che  $T_r$  appartiene a  $G_2$ , e che, essendo  $d_i, e_i, g_i$  dispari, i terzi coefficienti  $2d_i, 2g_i, 2(d_i + e_i, +g_i)$  di tutte le forme  $(2d_i, e_i, d_i) U_r^{-1}$  sono  $\equiv 0 \pmod{4}$ , la relazione (9) ci dice che ogni forma quadratica binaria primitiva di seconda specie di determinante  $D \equiv 5 \pmod{8}$ , il cui terzo coefficiente è  $\equiv 0 \pmod{4}$ , è equivalente, rispetto a  $G_2$ , a una forma della seguente tabella:

$$A \quad \left( \begin{array}{ccc} f_1 U_1^{-1} & f_1 U_2^{-1} & f_1 U_3^{-1} \\ f_2 U_1^{-1} & f_2 U_2^{-1} & f_2 U_3^{-1} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ f_n U_1^{-1} & f_n U_2^{-1} & f_n U_3^{-1} \end{array} \right)$$

ove  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sono le  $n$  forme del sistema (K).

Rimane, ora, a vedere se nella tabella A vi sono forme equivalenti rispetto a  $G_2$ .

Si osserva, intanto, che forme di linee diverse, non essendo equivalenti in senso generale, non potranno esserlo neppure rispetto a  $G_2$ . Vediamo, allora, se potranno esserlo le forme di una stessa linea qualunque, per esempio

$$f_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_i \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché  $f_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f_i$ , la questione è ricondotta a vedere se possono essere equivalenti, rispetto a  $G_2$ , le forme di ciascuna delle tre coppie

$$f_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ed } f_i; \quad f_i \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ed } f_i; \quad f_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ed } f_i \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Perché si abbia  $f_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sim f_i(G_2)$  deve esistere una sostituzione  $T_1$  di  $G_2$  tale da avere

$$f_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T_1 = f_i$$

il che è quanto dire che la sostituzione  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T_1$  deve esser tale da trasformare la forma quadratica primitiva di seconda specie  $f_i = (2d_i, c_i, 2g_i)$  in se stessa, e, quindi dev'essere <sup>(6)</sup>

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T_1 = \begin{pmatrix} \frac{t - e_i u}{2} & -\frac{2g_i u}{2} \\ \frac{2d_i u}{2} & \frac{t + e_i u}{2} \end{pmatrix}$$

da cui,

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{t - e_i u}{2} & -g_i u \\ d_i u & \frac{t + e_i u}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_i u & -\frac{t + e_i u}{2} \\ \frac{t - e_i u}{2} & -g_i u \end{pmatrix}$$

ove  $t$  ed  $u$  sono una soluzione dell'equazione di Pell

$$t^2 - Du^2 = 4.$$

Con analogo procedimento si dimostra che affinché sia la forma  $f_i \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim f_i (G_2)$  deve esistere una sostituzione  $T_2$  di  $G_2$  per cui

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{t - e_i u}{2} - d_i u & -g_i u - \frac{t + e_i u}{2} \\ d_i u & \frac{t + e_i u}{2} \end{pmatrix}.$$

Infine, per l'equivalenza, rispetto a  $G_2$ , delle forme  $f_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ed  $f_i \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  deve esistere una sostituzione  $T_3$  di  $G_2$  tale che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t - e_i u}{2} & -g_i u \\ d_i u & \frac{t + e_i u}{2} \end{pmatrix}$$

da cui

$$T_3 = \begin{pmatrix} -d_i u & -d_i u - \frac{t + e_i u}{2} \\ \frac{t - e_i u}{2} & \frac{t - e_i u}{2} - g_i u \end{pmatrix}.$$

Rimane, ora, a vedere se le sostituzioni  $T_1, T_2, T_3$  possono appartenere al gruppo  $G_2$  per una soluzione  $(t, u)$  dell'equazione di Pell, essendo  $D > 0$ .

Osserviamo, intanto, che essendo  $D$  dispari ( $D = 8n + 5$ ), i valori  $t$  ed  $u$  di una stessa soluzione debbono essere o entrambi pari o entrambi dispari;

(6) Se  $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}$  è una sostituzione che trasforma la forma  $(a, b, c)$  di determinante  $D$

e divisore  $\sigma$  in se stessa, allora è sempre  $\lambda = \frac{t - bu}{\sigma}$ ,  $\mu = -\frac{cu}{\sigma}$ ,  $\nu = \frac{au}{\sigma}$ ,  $\rho = \frac{t + bu}{\sigma}$ , essendo  $t$  ed  $u$  due interi che verificano l'equazione di Pell  $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ . (Cfr. LEJEUNE DIRICHLET, *Lezioni sulla teoria dei numeri*, traduzione di A. Faifofer, parte 1<sup>a</sup>, pp. 142 e seguenti, 1879).

e poich , d'altra parte, tutte le coppie di soluzioni della equazione di Pell sono date dalla formula

$$\frac{t_n + u_n \sqrt{D}}{2} = \pm \left( \frac{t_1 + u_1 \sqrt{D}}{2} \right)^n$$

ove  $(t_1, u_1)$    la pi  piccola soluzione positiva ed  $n$  un intero qualunque, siamo portati a distinguere il caso di  $t_1$  ed  $u_1$  entrambi pari dall'altro di  $t_1$  ed  $u_1$  entrambi dispari.

1  Caso. — Se  $t_1$  ed  $u_1$  sono entrambi pari, lo stesso avviene di ogni altra soluzione  $(t_n, u_n)$ . Inoltre, siccome  $t_n$  ed  $u_n$  verificano l'equazione  $t^2 - Du^2 = 4$ , i valori  $t_n/2$  e  $u_n/2$  verificheranno l'equazione  $t^2 - Du^2 = 1$ , e, conseguentemente, essendo  $D$  dispari, dovranno essere  $t_n/2$  e  $u_n/2$  l'uno pari, l'altro dispari. Ricordando, ora, che il coefficiente  $e_i$  della forma  $f_i$    dispari, si vede che nessuno dei secondi coefficienti delle sostituzioni  $T_1, T_2, T_3$  risulta pari, e, quindi, nessuna delle medesime sostituzioni appartiene a  $G_2$ .

Se ne conclude che le tre forme di una stessa linea della tabella A non sono equivalenti rispetto a  $G_2$  e, quindi, conserveremo le  $3n$  forme di essa per formarci il sistema di rappresentanti di classi avente le stesse propriet  a) e b) del sistema (H') che contiene  $m$  forme. Pertanto,

$$m = 3n.$$

2  Caso. — Siano  $t_1$  ed  $u_1$  dispari

Dalla formula

$$\frac{t_2 + u_2 \sqrt{D}}{2} = \left( \frac{t_1 + u_1 \sqrt{D}}{2} \right)^2,$$

da cui

$$\begin{cases} t_2 = \frac{1}{2}(t_1^2 + u_1^2 D) \\ u_2 = u_1 t_1, \end{cases}$$

si vede che, essendo  $t_1$  ed  $u_1$  dispari, lo sar  anche  $u_2$ . Moltiplicando la 2  di queste due ultime uguaglianze per il numero dispari  $e_i$ , sommando membro a membro, e sostituendo a  $D$  il suo valore  $e_i^2 - 4d_i g_i$ , avremo:

$$\frac{t_2 + e_i u_2}{2} = \left( \frac{t_1 + u_1 e_i}{2} \right)^2 - d_i g_i u_1.$$

Essendo  $d_i, g_i, u_1$  tutti e tre dispari, i due valori  $(t_2 + e_i u_2)/2$  e  $(t_1 + e_i u_1)/2$  sono uno di essi pari, l'altro dispari: se   pari  $(t_1 + e_i u_1)/2$  e dispari  $(t_2 + e_i u_2)/2$ , la sostituzione  $T_1$  far  parte del gruppo  $G_2$  per i valori  $(t_1, u_1)$ , mentre le sostituzioni  $T_2$  e  $T_3$  ne faranno parte per i valori  $(t_2, u_2)$ ; se, per converso,   pari  $(t_2 + e_i u_2)/2$  e dispari  $(t_1 + e_i u_1)/2$ , la sostituzione  $T_1$  far  parte di  $G_2$  per  $(t_2, u_2)$ , e le sostituzioni  $T_2, T_3$  ne faranno parte per  $(t_1, u_1)$ . Poich , in entrambe le eventualit , le tre forme di una stessa linea della tabella A risultano equivalenti rispetto a  $G_2$ , se ne conclude che baster  scartare due colonne della tabella A e conservare soltanto le  $n$  forme della rimanente colonna, per ottenere un sistema di rappresentanti di classi avente le stesse propriet  a) e b) del sistema (H') che contiene  $m$  forme. Pertanto, sar 

$$m = n.$$

**Analisi matematica.** — *Sopra le estremali di una classe di problemi variazionali.* Nota <sup>(\*)</sup> di SILVIO CINQUINI, presentata dal Socio G. SANSONE.

In due Note pubblicate qualche anno fa in questi « Rendiconti » <sup>(1)</sup> abbiamo comunicato i risultati raggiunti in nostre ricerche dedicate ai problemi di Calcolo delle variazioni relativi a integrali curvilinei in forma parametrica dipendenti dagli elementi differenziali dei primi due ordini.

$$\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(a)} = \int_{C^{(2)}} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s)) ds.$$

Per quanto riguarda l'ordine di idee che ci ha guidati nell'impostazione di tali problemi, rinviamo ai lavori citati in <sup>(1)</sup>, limitandoci a ricordare che, supposta la funzione  $F(x, y, x', y', \theta')$  positivamente omogenea di grado 1 rispetto a  $x', y'$ , abbiamo considerato la classe delle curve ordinarie  $C^{(2)}$

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s), \quad (0 \leq s \leq L),$$

per le quali, indicata con  $s$  la lunghezza dell'arco rettificato, le funzioni  $x(s)$ ,  $y(s)$  sono assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine e tali che esista finito l'integrale (di Lebesgue)  $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ , ove, in virtù delle ipotesi fatte, la curvatura  $\theta'(s)$  esiste finita per quasi tutti gli  $s$  di  $(0, L)$ .

Le nostre precedenti ricerche sono state rivolte a teoremi di esistenza dell'estremo assoluto in campi sia limitati sia illimitati e alle condizioni per la semicontinuità degli integrali  $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ . D'altra parte alcuni risultati relativi alle equazioni differenziali dei problemi variazionali in questione si rilevano nel contenuto di una precedente Memoria di N. Bogoliouboff <sup>(2)</sup>, nelle quale tali problemi erano impostati in una forma un po' diversa dalla nostra.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1957.

(1) S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza dell'estremo nei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore*, « Rend. Accademia Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. I (1946) pp. 500-5; *Sopra la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore*, ibidem, pp. 586-91.

Vedi anche: S. CINQUINI, *Sopra i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore*, « Annali Scuola Normale superiore di Pisa », vol. XIII (1944) [1947], pp. 19-49. *Sopra le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore*, ibidem, vol. XIV (1945) [1948], pp. 1-19.

(2) N. BOGOLIUBOFF, *Sur l'application des méthodes directes à quelques problèmes du Calcul des Variations*, « Annali di Matematica pura e applicata », T. IX, pp. 195-241 (1931). In particolare § 9, p. 227.

Recentemente, riesaminando il complesso di tutte le ricerche finora citate, abbiamo constatato <sup>(3)</sup> che si può dare alle equazioni delle estremali relative all'integrale  $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$  la forma

$$(1) \quad \begin{cases} F_x - \frac{d}{ds} \left[ F_{x'} - x' \theta' F_{\theta'} + y' \frac{dF_{\theta'}}{ds} \right] = 0 \\ F_y - \frac{d}{ds} \left[ F_{y'} - y' \theta' F_{\theta'} - x' \frac{dF_{\theta'}}{ds} \right] = 0, \end{cases}$$

che non ci risulta sia stata finora rilevata.

Le equazioni (1), le quali sono valide nella massima generalità di ipotesi, offrono il duplice vantaggio di essere geometricamente espressive e di contenere, come caso particolare, le equazioni di Eulero relative al problema del primo ordine: si ha, così, una riconferma dell'efficacia dell'impostazione che noi abbiamo dato ai problemi variazionali in questione.

Nelle presenti righe, che hanno soprattutto carattere preliminare, ci limitiamo, per ragioni di spazio, a soggiungere qualche osservazione sopra le equazioni (1), rinviando a una successiva e imminente Nota alcuni significativi risultati relativi alla teoria delle estremaloidi.

1. GENERALITÀ. — Per tutte le generalità rinviamo ai nostri precedenti lavori citati in <sup>(1)</sup>, soggiungendo che nella presente Nota supponiamo, salvo avviso contrario, che  $F(x, y, x', y', \theta')$  sia una funzione: 1° definita e continua, insieme con le proprie derivate parziali  $F_x, F_y, F_{x'}, F_{y'}, F_{\theta'}$ , in ogni punto  $(x, y)$  del campo  $A$ , per ogni coppia di numeri  $x', y'$  non entrambi nulli e per ogni valore finito di  $\theta'$ ; 2° positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle variabili  $x', y'$ ; 3° tale che sia  $F(x, y, 0, 0, \theta') = 0$ .

Ricordiamo che si chiama *curva ordinaria*  $C^{(2)}$  ogni curva rettificabile  $C^{(2)}$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (0 \leq s \leq L),$$

ove  $s$  è la lunghezza dell'arco rettificato, per la quale le funzioni  $x(s), y(s)$  sono assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine  $x'(s), y'(s)$ , ogni punto  $(x(s), y(s))$  con  $0 \leq s \leq L$  appartiene al campo  $A$  ed esiste finito l'integrale (di Lebesgue)

$$\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)} = \int_{C^{(2)}} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s)) ds,$$

ove  $\theta'(s)$  è la curvatura della curva  $C^{(2)}$  e quindi

$$\theta'(s) = \frac{d\theta(s)}{ds} = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s),$$

$\theta(s)$  essendo l'angolo di direzione.

(3) In una conferenza, tenuta al Seminario matematico dell'Università di Genova l'11 maggio 1957 e rivolta ai problemi variazionali in questione, abbiamo comunicato alcuni risultati contenuti nella presente Nota e nella successiva.



È ben noto che, se  $\theta'(s)$  è finita e continua, di tale proprietà godono anche  $x''(s)$ ,  $y''(s)$ , e viceversa.

2. LA CONDIZIONE DI EULERO. - Sia  $K^{(2)}$  una classe di curve ordinarie  $C^{(2)}$ ; allora, se  $\bar{C}^{(2)}$  è una curva di  $K^{(2)}$  che rende minimo l'integrale  $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}$ , ogni arco di  $\bar{C}^{(2)}$

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s), \quad (s_1 \leq s \leq s_2)$$

tale che la curvatura  $\theta'(s)$  sia finita e continua in tutto  $(s_1, s_2)$  <sup>(4)</sup> e i cui punti, esclusi al più quelli terminali, siano interni al campo  $A$  e di indifferenza rispetto ad  $A$  e a  $K^{(2)}$ , soddisfa al sistema di equazioni differenziali

$$(I) \quad \begin{cases} F_x - \frac{d}{ds} \left[ F_{x'} - x' \theta' F_{\theta'} + y' \frac{dF_{\theta'}}{ds} \right] = 0 \\ F_y - \frac{d}{ds} \left[ F_{y'} - y' \theta' F_{\theta'} - x' \frac{dF_{\theta'}}{ds} \right] = 0 \end{cases}$$

La dimostrazione di quanto abbiamo asserito si ottiene con procedimento di tipo ben noto <sup>(5)</sup>.

Basta tener presente nella considerazione delle curve variate

$$C_{\gamma}^{(2)}: \quad x = x(s) + \gamma\varphi(s) \quad , \quad y = y(s) + \gamma\psi(s), \quad (s'_1 \leq s \leq s'_2),$$

[ove tra l'altro è  $s_1 < s'_1 < s'_2 < s_2$ , le funzioni  $\varphi(s)$ ,  $\psi(s)$  sono assolutamente continue in  $(s'_1, s'_2)$  assieme a  $\varphi'(s)$ ,  $\psi'(s)$ , con  $\varphi''(s)$  e  $\psi''(s)$  limitate, è

$$\varphi(s'_1) = \varphi(s'_2) = \psi(s'_1) = \psi(s'_2) = \varphi'(s'_1) = \varphi'(s'_2) = \psi'(s'_1) = \psi'(s'_2) = 0]$$

che è possibile determinare un  $\bar{\gamma} > 0$  in modo che per ogni  $|\gamma| < \bar{\gamma}$  risulti

$$[x'(s) + \gamma\varphi'(s)]^2 + [y'(s) + \gamma\psi'(s)]^2 > 0, \quad \text{per } s'_1 \leq s \leq s'_2.$$

Pertanto la curvatura di  $C_{\gamma}^{(2)}$  è

$$\theta'_{\gamma}(s) = \frac{(x' + \gamma\varphi')(y'' + \gamma\psi'') - (x'' + \gamma\varphi'')(y' + \gamma\psi')}{[(x' + \gamma\varphi')^2 + (y' + \gamma\psi')^2]^{3/2}}$$

e con calcoli elementari si ottiene

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\theta'_{\gamma}(s) - \theta'(s)}{\gamma} = x' \psi'' + y'' \varphi' - x'' \psi' - y' \varphi'' - 3(x' y'' - x'' y') (x' \varphi' + y' \psi');$$

(4) In altre parole: l'arco è di classe 2.

(5) Vedi: L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Due volumi (N. Zanichelli, Bologna 1921-3). Vol. II, Cap. I, n. 32, pp. 90-92. S. CINQUINI, *Sopra le equazioni di Eulero dei problemi variazionali di ordine n*, «Annali di Matematica pura e applicata», T. XVI, pp. 61-100 (1937). In particolare n. 2, pp. 66-71.

allora, dovendo essere  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{J}_{C(2)}^{(2)} - \mathfrak{J}_{C(2)}^{(2)}}{\gamma} = 0$ , risulta

$$\int_{s_1'}^{s_2'} [\varphi F_x + \psi F_y + \varphi' F_{x'} + \psi' F_{y'} + \{x' \psi'' + y'' \varphi' - x'' \psi' - y' \varphi'' - 3(x' y'' - x'' y') (x' \varphi' + y' \psi')\} F_{\theta'}] ds = 0.$$

Facendo successivamente  $\psi(s) \equiv 0$ ,  $\varphi(s) \equiv 0$  e ricordando che è

$$(2) \quad \begin{aligned} x' &= \cos \theta, & y' &= \sin \theta, \\ x'' &= -\theta' \sin \theta = -y' \theta', & y'' &= \theta' \cos \theta = x' \theta', \end{aligned}$$

onde

$$y'' - 3(x' y'' - x'' y') x' = -2 x' \theta', \quad -x'' - 3(x' y'' - x'' y') y' = -2 y' \theta',$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{s_1'}^{s_2'} [\varphi F_x + \varphi' \{F_{x'} - 2 x' \theta' F_{\theta'}\} - \varphi'' y' F_{\theta'}] ds &= 0 \\ \int_{s_1'}^{s_2'} [\psi F_y + \psi' \{F_{y'} - 2 y' \theta' F_{\theta'}\} + \psi'' x' F_{\theta'}] ds &= 0. \end{aligned}$$

Procedendo come nel nostro precedente lavoro <sup>(6)</sup> seguono le equazioni

$$(3) \quad \begin{cases} \int_{s_1'}^s ds \int_{s_1'}^s F_x ds - \int_{s_1'}^s [F_{x'} - 2 x' \theta' F_{\theta'}] ds - y' F_{\theta'} = C_1' + C_2' s \\ \int_{s_1'}^s ds \int_{s_1'}^s F_y ds - \int_{s_1'}^s [F_{y'} - 2 y' \theta' F_{\theta'}] ds + x' F_{\theta'} = C_3' + C_4' s. \end{cases}$$

ove  $C_1'$ ,  $C_2'$ ,  $C_3'$ ,  $C_4'$  sono quattro costanti; dalle (3) si deduce in modo noto che, sempre per ogni  $s$  di  $(s_1', s_2')$ , è

$$(4) \quad \begin{cases} F_x - \frac{d}{ds} [F_{x'} - 2 x' \theta' F_{\theta'} + \frac{d}{ds} (y' F_{\theta'})] = 0 \\ F_y - \frac{d}{ds} [F_{y'} - 2 y' \theta' F_{\theta'} - \frac{d}{ds} (x' F_{\theta'})] = 0, \end{cases}$$

Infine, siccome esistono finite le derivate  $\frac{d}{ds} (y' F_{\theta'})$ ,  $\frac{d}{ds} (x' F_{\theta'})$  e siccome  $y'(s)$ ,  $x'(s)$  non si annullano mai simultaneamente, esiste finita anche la

(6) S. CINQUINI, luogo cit. in (5); in particolare si usufruisca dell'Osservazione della fine del n. 2, p. 71.

derivata  $\frac{dF_{\theta'}}{ds}$ ; pertanto dalle (4), usufruendo ancora delle (2), seguono immediatamente le (1).

3. ESTREMALE DI ORDINE 2. - a) *Definizione*. - Ogni ordinaria curva  $C^{(2)}$

$$(5) \quad x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad , \quad (0 \leq s \leq L)$$

avente curvatura  $\theta'(s)$  finita e continua in tutto  $(0, L)$  e tale che per ogni  $s$  di  $(0, L)$  siano soddisfatte le equazioni differenziali (1) si chiama *estremale di ordine 2* relativa alla funzione  $F$  considerata.

b) Se, ferme restando le ipotesi formulate al n. 1, in ogni punto  $(x, y)$  del campo  $A$ , per ogni coppia di numeri  $x', y'$  non entrambi nulli e per qualunque valore finito di  $\theta'$  esistono finite e continue tutte le derivate parziali del primo ordine di  $F_{x'}$ ,  $F_{y'}$ , e tutte le derivate parziali dei primi due ordini di  $F_{\theta'}$ , e se per  $s = s_0$  è

$$F_{\theta' \theta'}(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s)) \neq 0,$$

allora *nel punto*  $s = s_0$  *dell'estremale* (5) *esistono finite anche le derivate*  $\frac{d^2 \theta(s)}{ds^2}$ ,  $\frac{d^3 \theta(s)}{ds^3}$ .

Infatti dalle (1) segue immediatamente

$$\begin{aligned} \int_0^s F_x ds - F_{x'} + x' \theta' F_{\theta'} - y' \frac{dF_{\theta'}}{ds} &= k_1 \\ \int_0^s F_y ds - F_{y'} + y' \theta' F_{\theta'} + x' \frac{dF_{\theta'}}{ds} &= k_2 \end{aligned}$$

e quindi anche

$$\begin{aligned} \frac{dF_{\theta'}}{ds} &= y' \int_0^s F_x ds - x' \int_0^s F_y ds - y' F_{x'} + x' F_{y'} - k_1 y' + k_2 x', \\ F_{\theta'}(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s)) &= \int_0^s y' ds \int_0^s F_x ds - \int_0^s x' ds \int_0^s F_y ds + \\ &+ \int_0^s [-y' F_{x'} + x' F_{y'}] ds - k_1 y + k_2 x + k_3, \end{aligned}$$

ove  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , sono tre costanti dipendenti dall'estremale considerata. Pertanto per provare l'asserto basta ragionare in modo del tutto analogo ad altro nostro lavoro <sup>(7)</sup>.

(7) Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in (5) n. 4, pp. 72-73.

c) Sotto opportune ipotesi di derivabilità per la funzione  $F(x, y, x', y', \theta')$ <sup>(8)</sup> e tenendo conto delle identità che seguono dalla ipotesi che tale funzione sia positivamente omogenea di grado 1 rispetto a  $(x', y')$ , si verifica che:

1° le equazioni differenziali (I) sono legate dalla relazione

$$Px' + Qy' = 0,$$

ove si sono indicati con P e Q i rispettivi primi membri delle (I);

2° le (I) sono equivalenti all'unica equazione differenziale

$$F_{xy'} - F_{x'y} + \theta' F_{\tau} - \theta'^2 F_{\theta'} + (-y' F_{\theta'x'} + x' F_{\theta'y'}) \theta'' - \frac{d^2 F_{\theta'}}{ds^2} = 0,$$

ove come è noto<sup>(9)</sup>

$$F_{\tau} = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} \equiv - \frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2}.$$

4. ESEMPIO. — Sia

$$F(x, y, x', y', \theta') = \sqrt{x'^2 + y'^2} \theta'^2;$$

le equazioni differenziali (I) si riducono a

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left[ x' \theta'^2 - 2 x' \theta' \theta'' + 2 y' \frac{d\theta'}{ds} \right] = 0 \\ \frac{d}{ds} \left[ y' \theta'^2 - 2 y' \theta' \theta'' - 2 x' \frac{d\theta'}{ds} \right] = 0, \end{cases}$$

vale a dire

$$\begin{cases} -x' \theta'^2 + 2 y' \theta'' = C_1 \\ y' \theta'^2 + 2 x' \theta'' = C_3 \end{cases}$$

ove  $C_1$  e  $C_3$  sono costanti arbitrarie. Ne segue evidentemente

$$(6) \quad \begin{cases} 2 \theta'' = C_1 y' + C_3 x' \\ \theta'^2 = -C_1 x' + C_3 y', \end{cases}$$

od anche, quadrando e sommando,

$$4 \left( \frac{d\theta'}{ds} \right)^2 + \theta'^4 = C_1^2 + C_3^2,$$

vale a dire

$$s = s(a) + 2 \int_a^{\theta'} \frac{du}{\pm \sqrt{C_1^2 + C_3^2 - u^4}},$$

(8) A tal riguardo sono sufficienti le ipotesi formulate nel capoverso  $\delta$ ) del presente numero.

(9) Vedi L. TONELLI, opera cit. in (5), vol. I, n. 75, a) p. 206.

che fornisce, mediante un integrale ellittico, l'equazione intrinseca delle estremali, e ove, d'altra parte, in virtù delle (6) è

$$\theta' = \pm \sqrt{-C_1 \cos \theta + C_3 \sin \theta},$$

onde anche

$$2 \theta' = C_1 y + C_3 x + C_4.$$

5. OSSERVAZIONE. - Le equazioni delle estremali relative alla funzione  $\Phi(x, y, x', y', x'', y'')$  vengono scritte per solito<sup>(10)</sup> nella forma

$$(7) \quad \begin{cases} \Phi_x - \frac{d}{dt} \Phi_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} \Phi_{x''} = 0 \\ \Phi_y - \frac{d}{dt} \Phi_{y'} + \frac{d^2}{dt^2} \Phi_{y''} = 0. \end{cases}$$

È evidente, innanzi tutto, che, per economia di ipotesi, alle (7) si può dare la forma

$$(8) \quad \begin{cases} \Phi_x - \frac{d}{dt} \left[ \Phi_{x'} - \frac{d}{dt} \Phi_{x''} \right] = 0 \\ \Phi_y - \frac{d}{dt} \left[ \Phi_{y'} - \frac{d}{dt} \Phi_{y''} \right] = 0. \end{cases}$$

Infine dalle (8) si ottengono nuovamente le (1), tenendo presente che è

$$\Phi(x, y, x', y', x'', y'') \equiv F\left(x, y, x', y', \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}\right).$$

**Analisi matematica.** - *Recherches concernant l'allure des solutions de l'équation du type parabolique lorsque la variable du temps tend vers l'infini.* Nota<sup>(\*)</sup> di MIROSLAW KRZYŻAŃSKI, presentata dal Socio M. PICONE.

1. Dans la Note récente<sup>(1)</sup> concernant les solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique

$$(1) \quad \mathfrak{L}[u] \equiv a(x, t) u''_{xx} + b(x, t) u'_x + c(x, t) u - u_t = 0$$

déterminées dans la demi-bande  $0 \leq x \leq 1$ ,  $t \geq 0$ , j'ai exposé certains théorèmes sur l'allure de ces solutions lorsque la variable du temps  $t$  tend vers l'infini. Dans la Note présente je vais traiter des problèmes analogues relatifs aux solutions de l'équation (1) déterminées dans le quart  $Q$  défini par les inégalités  $x \geq 0$ ,  $t \geq 0$ .

(10) Vedi A. KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung* (Braunschweig, 1900), Cap. VI, §§ 48-49, p. 193 e sgg.; od anche G. VIVANTI, *Elementi del Calcolo delle Variazioni* (Principato, Messina, 1923), Cap. VI, n. 41, p. 118.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1957.

(1) M. KRZYŻAŃSKI, *Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation du type parabolique*, « Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences », cl. III, Vol. IV, N. 5 (1956), pp. 247-251.



Nous supposons dans la Note présente que les coefficients  $a(x, t)$  et  $b(x, t)$  de l'équation (1) sont continus et bornés à l'intérieur du quart  $Q$ , le coefficient  $a(x, t)$  y étant positif. Le coefficient  $c(x, t)$  est supposé continu et non positif ( $c(x, t) \leq 0$ ) à l'intérieur du quart  $Q$ .

Dans la suite de la Note interviendra l'hypothèse suivante:

**H y p o t h è s e (A).** Le nombre positif  $k$  et les fonctions  $\varphi(x)$ ,  $\Psi_0(t)$  et  $\Psi_1(t)$ , continues pour  $0 \leq x \leq k$  resp. pour  $t \geq 0$  et telles que  $\varphi(0) = \Psi_0(0)$ ,  $\varphi(k) = \Psi_1(0)$ , étant choisis d'une manière arbitraire, l'équation (1) admet une solution  $u(x, t)$  régulière <sup>(2)</sup> dans la demi-bande  $0 \leq x \leq k$ ,  $t \geq 0$  et satisfaisant aux conditions  $u(x, 0) = \varphi(x)$  pour  $0 \leq x \leq k$ ,  $u(0, t) = \Psi_0(t)$ ,  $u(k, t) = \Psi_1(t)$  pour  $t \geq 0$  <sup>(3)</sup>.

2. Le fait que l'ensemble  $Q$  est non borné dans la direction de l'axe des  $x$  nécessite à imposer aux solutions de l'équation (1), déterminées dans  $Q$ , certaines restrictions concernant leur allure pour  $x \rightarrow \infty$ .

Conviendrons de dire que la fonction  $F(x, t)$  continue dans  $Q$  y est de classe  $E_\alpha$  s'il existe deux nombres positifs  $M$  et  $K$  tels que l'on ait

$$|F(x, t)| \leq M \exp K |x|^\alpha \quad \text{pour } (x, t) \in Q.$$

On a les théorèmes suivants:

**THÉORÈME I.** — La seule solution de l'équation (1) régulière et de classe  $E_2$  dans  $Q$ , s'annulant pour  $t = 0$  et pour  $x = 0$  est  $u(x, t) \equiv 0$ .

**THÉORÈME II.** — Supposons que l'hypothèse (A) soit vérifiée et soit  $u(x, t)$  une fonction régulière et de classe  $E_2$  dans  $Q$ , telle que  $u(x, 0) \leq M$  (ou  $u(x, 0) \geq -M$ ) pour  $x \geq 0$ ,  $u(0, t) \leq M$  (resp.  $u(0, t) \geq -M$ ) pour  $t \geq 0$ ,  $M \geq 0$  étant un nombre constant, et  $\mathfrak{L}[u] \geq 0$  (resp.  $\mathfrak{L}[u] \leq 0$ ) à l'intérieur de  $Q$ , la fonction  $\mathfrak{L}[u]$  y étant de classe  $E_2$  par hypothèse.

Ceci supposé, on a  $u(x, t) \leq M$  (resp.  $u(x, t) \geq -M$ ) partout dans  $Q$  <sup>(4)</sup>.

3. Le théorème qui va suivre est analogue au théorème I de ma Note précitée au n-ro 1 et se démontre de même façon.

**THÉORÈME III.** — On suppose l'existence d'une fonction  $V(x, t)$  régulière et de classe  $E_2$  dans  $Q$  et telle que  $1^\circ V(x, t) > 0$  dans  $Q$ , la borne in-

(2) C'est à dire continue dans cette demi-bande et ayant les secondes dérivées continues à son intérieur.

(3) Il résulte des théorèmes connus sur les extrema des solutions des équations du type parabolique (voir M. GEVREY, *Sur l'équation aux dérivées partielles du type parabolique*, « Journal de Math. pures et appliquées », ser. 6, vol. 9 (1913), p. 372) qu'une telle solution est unique. Pour les conditions suffisantes pour que l'hypothèse (A) soit vérifiée voir le travail précité de M. GEVREY, pp. 380-389.

(4) Pour la démonstration des théorèmes I et II voir M. KRZYŻAŃSKI, *Évaluations des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique, déterminées dans un domaine non borné*, à paraître aux « Annales Polonici Mathematici », vol. IV, part. I. La démonstration du théorème I est analogue à celle du th. I du travail M. KRZYŻAŃSKI. *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique*, « Annales de la Société Polonaise de Mathématique », 18 (1945).

féerieure de  $V(x, 0)$  pour  $x \geq 0$  étant positive, 2°  $\mathfrak{L}[V] \leq 0$  à l'intérieur de  $Q$ , la fonction  $\mathfrak{L}[V]$  y étant de classe  $E_2$ , 3°  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x, t) = 0$  uniformément par rapport à  $x \geq 0$ .

Supposons que l'hypothèse (A) soit vérifiée et soit  $u(x, t)$  une solution de l'équation (1) régulière et de classe  $E_2$  dans  $Q$ , telle que la fonction  $\varphi(x) = u(x, 0)$  soit bornée pour  $x \geq 0$  et que l'on ait  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(0, t) = 0$ .

On a alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$  uniformément par rapport à  $x \geq 0$ .

Si, au lieu de 3°, on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x, t) = 0$  uniformément par rapport à  $x$  pour  $0 \leq x \leq R$ , pour tout  $R$  constant positif, il en est de même de la fonction  $u(x, t)$ .

4. Dans certains cas particuliers il est aisé de construire effectivement une fonction  $V(x, t)$  satisfaisant aux hypothèses du théorème III. Nous allons examiner les cas suivants:

1° On a  $c(x, t) \leq -c_0 < 0$ , où  $c_0$  est un nombre constant. Cette fois nous posons simplement

$$(2) \quad V(x, t) = e^{-\lambda t},$$

$\lambda$  étant un nombre positif, inférieur ou égal à  $c_0$ . Il est évident que la fonction  $V(x, t)$  définie par la formule (2) satisfait à toutes les hypothèses du théorème III. On a en particulier

$$\mathfrak{L}[V] = [c(x, t) + \lambda] e^{-\lambda t} \leq (-c_0 + \lambda) e^{-\lambda t} \leq 0.$$

2° On a  $a(x, t) \equiv 1$ ,  $b(x, t) \equiv 0$ ,  $c(x, t) \leq 0$ ; l'équation (1) s'écrit donc sous la forme

$$(3) \quad \bar{\mathfrak{L}}[u] \equiv u''_{xx} - u'_t + c(x, t)u = 0$$

où  $c(x, t) \leq 0$  (5). Nous supposons en outre que le coefficient  $c(x, t)$  est de classe  $E_2$  et continu dans  $Q$ .

Soit  $u_0(x, t)$  une solution de l'équation de la chaleur

$$(4) \quad u''_{xx} - u'_t = 0,$$

régulière, positive et de classe  $E_2$  dans  $Q$ , telle que la fonction  $u_0(x, 0)$  soit bornée inférieurement par un nombre positif pour  $x \geq 0$ .

On a

$$\bar{\mathfrak{L}}[u_0] = c(x, t)u_0(x, t) \leq 0,$$

(5) Si les coefficients  $a(x, t)$  et  $b(x, t)$  admettent les dérivées du premier ordre continues à l'intérieur de  $Q$ , le coefficient  $a(x, t)$  y étant borné inférieurement par un nombre positif, l'équation (1) se ramène à la forme (3) par les transformations connues, voir le travail de M. GEVREY cité au n-ro 1, pp. 370-371.

la fonction  $\mathfrak{L}[u_0]$  étant de classe  $E_2$  dans  $Q$ . Si l'on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_0(x, t) = 0$  uniformément par rapport à  $x \geq 0$ , et au moins par rapport à  $x \in [0, R]$  pour tout  $R > 0$  constant, il suffit de choisir  $V(x, t) = u_0(x, t)$ .

La fonction  $u_0(x, t)$  jouissant des propriétés spécifiées ci-dessus peut être construite effectivement. En effet, posons

$$(5) \quad u_0(x, t) = \int_0^{\frac{x+h}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds,$$

$h$  étant un nombre positif arbitraire. La fonction  $u_0(x, t)$  définie par la formule (5) constitue une solution de l'équation (4); elle est bornée et positive dans  $Q$  et on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_0(x, t) = 0$  uniformément par rapport à  $x \in [0, R]$  pour tout  $R > 0$ .

5. Nous allons déduire du théorème III un théorème concernant les solutions de l'équation non homogène

$$(6) \quad \mathfrak{L}_1[v] \equiv a(x)v''_{xx} + b(x)v'_x + c(x)v - v_t = f(x).$$

Nous supposons que les coefficients  $a(x)$  et  $b(x)$  sont continus et bornés pour  $x > 0$ , le coefficient  $a(x)$  étant positif, et que le coefficient  $c(x)$  est continu, non positif ( $c(x) \leq 0$ ) pour  $x > 0$ . La fonction  $f(x)$  est supposée continue pour  $x > 0$ . Nous supposons en outre l'existence d'une fonction  $V_1(x, t)$  relative à l'opération  $\mathfrak{L}_1[v]$ , analogue à la fonction  $V(x, t)$  intervenant au théorème III. On construit la fonction  $V_1(x, t)$  dans les cas spécifiés au n-ro 4 de même façon que l'on a construit la fonction  $V(x, t)$  au n-ro 4.

Ceci convenu, on a le théorème suivant:

THÉORÈME IV. — Soit  $v(x, t)$  une solution de l'équation (6) régulière et de classe  $E_2$  dans le quart  $Q$  et telle que la fonction  $\varphi(x) = v(x, 0)$  soit bornée pour  $x \geq 0$ . Supposons l'existence de la limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(0, t) = l$ . Nous admettons en outre l'hypothèse (A) relativement à l'opération  $\mathfrak{L}_1[v]$ .

Soit  $w(x)$  une solution de l'équation

$$(7) \quad a(x)w'' + b(x)w' + c(x)w = f(x)$$

régulière et bornée pour  $x \geq 0$  et satisfaisant à la condition aux limites  $w(0) = l^{(6)}$ .

(6) Pour les conditions suffisantes pour l'existence d'une telle solution de l'équation (7) voir G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Bologna 1949, parte II, pp. 47-51; K. TATARKIEWICZ, *Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation différentielle du second ordre*, « *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska* », Lublin-Polonia, Sectio A, vol. VII, 3 (1953), pp. 19-73.



On a

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = w(x) \quad \text{pour } x \geq 0.$$

Dans la formule (8) la convergence de la fonction  $v(x, t)$  vers  $w(x)$  est uniforme par rapport à  $x$  pour  $x \geq 0$ , respectivement pour  $x \in [0, R]$ ,  $R$  étant un nombre positif arbitraire, suivant la manière de la convergence de la fonction  $V_1(x, t)$  vers zéro pour  $t \rightarrow \infty$ .

Pour la démonstration du théorème IV il suffit d'observer que la fonction  $u(x, t) = v(x, t) - w(x)$  satisfait à l'équation homogène  $\mathcal{L}_1[u] = 0$  à l'intérieur de  $Q$  et d'appliquer à la fonction  $u(x, t)$  le théorème III, en remplaçant la fonction  $V(x, t)$  par  $V_1(x, t)$ .

**Analisi matematica.** — *Nuova dimostrazione dei teoremi di esistenza per i problemi al contorno regolari relativi alle equazioni lineari a derivate parziali di tipo ellittico* (\*). Nota (\*\*) di BENEDETTO PETTINEO, presentata dal Socio M. PICONE.

Nella presente Nota mi occuperò dei teoremi di esistenza per i problemi al contorno regolari, precisamente per i problemi di Dirichlet e di Neumann <sup>(1)</sup>, relativi alle equazioni lineari di tipo ellittico.

La trattazione di tali problemi col metodo dei potenziali, fatta dal Giraud, presuppone, com'è noto, la conoscenza di una particolare *soluzione fondamentale* per un certo operatore ellittico, la cui costruzione è alquanto riposta (cfr. C. Miranda [2], pp. 44-71). L'analisi esistenziale relativa a tali problemi presenta peraltro qualche difficoltà anche quando, nell'ambito dell'Analisi funzionale, si seguano metodi alquanto ingegnosi, quali quelli di Caccioppoli e Schauder, i quali presuppongono la maggiorazione *a priori* della soluzione della data equazione (cfr. C. Miranda [2], pp. 111-137).

Voglio qui esporre una dimostrazione dei medesimi teoremi, fondata su un comodo artificio che mi consentirà di evitare soluzioni fondamentali, formule di maggiorazione e risultati di Analisi funzionale.

1. In tutto ciò che segue procurerò di adottare la terminologia e le notazioni del Miranda [2].

In un campo  $A$  dello spazio euclideo  $S_m$  a  $m (\geq 2)$  dimensioni sia assegnata l'equazione lineare

$$(1) \quad E[u] \equiv \sum_{h,k} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_h b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu = f(x),$$

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1956.

(1) La classificazione dei problemi al contorno, per le equazioni a derivate parziali, in problemi regolari, misti, di Cauchy e di propagazione è dovuta al Picone [4].

coi coefficienti  $a_{hk}$  di classe  $C^{(\lambda)}$  (cioè a derivate prime  $\lambda$  — hölderiane) ( $\lambda > 0$ ) e con  $b_h, c, f$  di classe  $C^{(0, \lambda)}$  (cioè funzioni  $\lambda$  — hölderiane) <sup>(2)</sup>. La (1) sia di tipo ellittico, anzi ellittico-positiva; inoltre il determinante  $\|a_{hk}\|$  abbia costantemente il valore 1.

Sia  $\Gamma$  un dominio ipersferico contenuto in  $A$  e sia  $D$  un dominio *interno* a  $\Gamma$  con la frontiera  $FD$  costituita da un numero finito di ipersuperficie (varietà) regolari, chiuse e semplici, i cui punti abbiano per coordinate  $(x_1, \dots, x_m)$  delle funzioni di classe  $C^{(\lambda)}$  (localmente).

Nel dominio  $D$  (limitato) studierò i problemi di Dirichlet e di Neumann. Si mutino eventualmente i coefficienti della (1) in  $\Gamma - D$  (mantenendoli in  $\Gamma$  con la prescritta regolarità) <sup>(3)</sup>, in modo che abbia

$$(2) \quad E \equiv \Delta_a \equiv \sum_h \partial^2 / \partial x_h^2 \quad \text{in } F\Gamma \text{ e nelle sue vicinanze.}$$

Per ogni punto  $x$  di  $FD$  si denotino con  $n_x$  e con  $v_x$  rispettivamente la normale e la conormale a  $FD$  orientate verso l'interno di  $D$ . Si ha

$$(3) \quad a \cos(x_h, v) = \sum_k a_{hk} \cos(x_k, n) \quad (a > 0) \quad (h = 1, \dots, m).$$

Si consideri quindi l'operatore

$$(4) \quad L \equiv a \partial / \partial v + \beta \quad (\text{con } \beta \text{ hölderiana in } FD).$$

Si denoti con  $\alpha_{hk}$  il complemento algebrico di  $a_{hk}$  nella matrice  $\|a_{hk}\|$  e si ponga

$$(5) \quad H(x, y) = \begin{cases} \chi_2 \log \left\{ \sum_{h,k} \alpha_{hk}(x) (x_h - y_h) (x_k - y_k) \right\}^{-1/2} & \text{per } m = 2 \\ \chi_m \left\{ \sum_{h,k} \alpha_{hk}(x) (x_h - y_h) (x_k - y_k) \right\}^{(2-m)/2} & \text{per } m > 2, \end{cases}$$

con la costante  $\chi_m$  scelta in modo che, quando  $\Phi$  e  $\varphi$  sono hölderiane, si abbia

$$(6) \quad E \left[ \int_{\Gamma} H(x, y) \Phi(y) dy \right] = -\Phi(x) + \int_{\Gamma} E_x [H(x, y)] \Phi(y) dy \quad (x \in \Gamma - F\Gamma)$$

e, per  $x \in FD$ ,

$$\lim_{x' \rightarrow x} \int_{FD} L_y [H(x', y)] \varphi(y) d\sigma_y = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{2} + \int_{FD} L_y [H(x, y)] \varphi(y) d\sigma_y & (\text{se } x' \in D - FD) \\ -\frac{\varphi(x)}{2} + \int_{FD} L_y [H(x, y)] \varphi(y) d\sigma_y & (\text{se } x' \in \Gamma - D). \end{cases}$$

(2) Se poi si vogliono considerare soluzioni *generalizzate*, si possono fare sul termine noto  $f$  altre ipotesi di regolarità. Per esempio, in base a risultati ormai classici di Lichtenstein e Friedrichs sui potenziali di dominio, si può solo supporre che  $f$  sia di quadrato sommabile. (Cfr. C. MIRANDA [2], pp. 25-26).

(3) Sulla possibilità di mutare nella maniera richiesta i coefficienti della (1) vedasi, per esempio, C. MIRANDA [2], pp. 36-39.

La funzione  $\beta$  dell'operatore  $L$  va scelta in modo che, se  $x'$  e  $x''$  sono due punti sulla conormale  $v_x$ , simmetrici rispetto a  $x$ , si abbia (C. Miranda [2], p. 34, teor. 15, V)

$$(8) \quad \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \frac{\partial}{\partial v_x} \int_{FD} L_y [H(x', y)] \varphi(y) d\sigma_y - \frac{\partial}{\partial v_x} \int_{FD} L_y [H(x'', y)] \varphi(y) d\sigma_y \right\} = 0 \quad (x \in FD)$$

Posto  $E_x [H(x, y)] = K(x, y)$ , si formino i nuclei iterati

$$(9) \quad K^{(0)}(x, y) = K(x, y), \quad K^{(n)}(x, y) = \int_{\Gamma} K(x, t) K^{(n-1)}(t, y) dt.$$

e, per  $p \geq 1$ , si ponga

$$(10) \quad H^{(p)}(x, y) = H(x, y) + \sum_n^{1 \dots p} \int_{\Gamma} H(x, t) K^{(n-1)}(t, y) dt.$$

Al sistema di equazioni integrali

$$(11) \quad \Phi(x) - \int_{\Gamma} \mathcal{E}_x [G(x, y)] \Phi(y) dy + 2 \int_{FD} \mathcal{E}_x [L_y [G(x, y)]] \varphi(y) d\sigma_y = f(x) \quad (x \in \Gamma - FD - FF)$$

$$(12) \quad \varphi(x) - \int_{\Gamma} G(x, y) \Phi(y) dy + 2 \int_{FD} L_y [G(x, y)] \varphi(y) d\sigma_y = q(x) \quad (x \in FD)$$

per  $\mathcal{E} = E$ ,  $G = H^{(p)}$  e  $p \geq 2$ , si può applicare allora la teoria di Fredholm (con la conseguente validità del teorema dell'alternativa). (C. Miranda [2], pp. 44-48). Ciò posto, se  $\omega$  è il centro dell'ipersfera  $\Gamma$  ed  $R$  è il raggio, per ogni punto  $y$  di  $\Gamma$ , distinto da  $\omega$ , si consideri il punto  $y'$  sulla semiretta  $\omega y$  tale che si abbia

$$(13) \quad \overline{\omega y} \cdot \overline{\omega y'} = R^2$$

e, per ogni  $x \in \Gamma$ , si ponga

$$(14) \quad \gamma(x, y) = \frac{R}{\overline{xy'} \cdot \overline{\omega y}}, \quad H_0(x, y) = \begin{cases} H(x, y) - \chi_2 \log \gamma(x, y) & \text{per } m = 2 \\ H(x, y) - \chi_m \{ \gamma(x, y) \}^{m-2} & \text{per } m > 2; \end{cases}$$

infine, si fissi una volta per tutte un intero  $p \geq 2$  e si ponga

$$(15) \quad G(x, y) = H_0(x, y) + \sum_n^{1 \dots p} \int_{\Gamma} H_0(x, t) K^{(n-1)}(t, y) dt.$$

Per la (2) si ha (M. Picone [3], p. 63 e p. 91; C. Miranda [2], p. 47, (18.8))

$$(16) \quad \begin{cases} G(x, y) = 0 \\ E_x [G(x, y)] = K^{(p)}(x, y) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{per } x \in FF, \\ \text{per } x \text{ nelle vicinanze di } FF. \end{array}$$



Si riconosce allora che con la scelta (15) di  $G$  e per  $\mathfrak{E} = E$  al sistema (11), (12), può ancora applicarsi la teoria di Fredholm; lo stesso dicasi se si assume

$$(17) \quad \mathfrak{E} = E \text{ in } D; \quad \mathfrak{E} = E - c + c' \text{ (con: } c' \leq 0 \text{ in } \Gamma, \quad c' < 0 \text{ in } D, \quad c' = 0 \text{ nelle vicinanze di } F\Gamma).$$

Evidentemente la seconda delle (16) continua a sussistere ponendo  $\mathfrak{E}$  in luogo di  $E$ ; lo stesso dicasi delle (6), (7), (8) se si pone  $G$  in luogo di  $H$ .

In più si può pretendere che, se  $\Phi_0$  è limitata in  $\Gamma$ , hölderiana in  $D - FD$  ed in  $\Gamma - D - F\Gamma$  e si ha

$$(18) \quad \int_{\Gamma} G(x, y) \Phi_0(y) dy = 0 \quad \text{per } x \in \Gamma,$$

allora risulti necessariamente  $\Phi_0 \equiv 0$ . In effetti, qualora ciò non si verificasse, utilizzando un artificio del Levi [1], si sostituirebbe alla  $G$  la seguente

$$(19) \quad g(x, y) = G(x, y) + \sum_i^{\infty} \alpha_i(x) \beta_i(y),$$

con le  $\alpha_i, \beta_i$ , opportunamente regolari e le  $\alpha_i$  nulle in  $F\Gamma$ . In tal modo la prima delle (16) continuerebbe a sussistere, ma la seconda no; tuttavia il sistema (11), (12) (con  $g$  in luogo di  $G$ ) rimarrebbe Fredholmiano. L'intero  $r$  è il numero delle autosoluzioni indipendenti di ciascuna delle seguenti equazioni

$$(20) \quad \Phi(x) = \int_{\Gamma} E'_x[G(x, y)] \Phi(y) dy, \quad \Psi(x) = \int_{\Gamma} E'_y[G(y, x)] \Psi(y) dy \quad (x \in \Gamma),$$

dove  $E'$  è l'operatore *autoaggiunto*

$$(21) \quad E' \equiv \sum_{h,k} a_{hk} \partial^2 / \partial x_h \partial x_k + \sum_h b'_h \partial / \partial x_h \quad \left( \text{con } b'_h = \sum_k \partial a_{hk} / \partial x_k \right).$$

In tal modo per trasformare opportunamente  $G$  in  $g$ , si utilizza il classico artificio di Levi [1]. Tale artificio si regge sulla possibilità di scegliere le  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  in maniera che si abbia

$$(22) \quad \|(E'[\alpha_i], \Psi_j)\| \equiv \left\| \int_{\Gamma} E'[\alpha_i] \Psi_j dx \right\| = 0, \quad \|(\beta_i, \Phi_j)\| = 0,$$

dove  $\Phi_1, \dots, \Phi_r$  e  $\Psi_1, \dots, \Psi_r$  sono due prefissati sistemi di autosoluzioni, linearmente indipendenti, rispettivamente della prima e della seconda delle (20).

Nel caso in esame la prima condizione (22) si può effettivamente realizzare giacché (ricordando che le  $\alpha_i$  devono esser nulle in  $F\Gamma$  e che  $E'$  è autoaggiunto)

$$(23) \quad \int_{\Gamma} E'[\alpha_i] \Psi_j dx = \int_{\Gamma} \alpha_i E'[\Psi_j] dx = \int_{F\Gamma} \frac{\partial \alpha_i}{\partial n} \Psi_j d\sigma.$$

Da ciò si trae che i vettori

$$(24) \quad \{E'[\Psi_j] \text{ in } \Gamma - F\Gamma, -\Psi_j \text{ in } F\Gamma\} \quad (j = 1, \dots, r)$$

sono linearmente indipendenti (in quanto sono tali le funzioni  $\Psi_j$  ed inoltre dalle condizioni  $E'[\Psi] = 0$  in  $\Gamma - F\Gamma$ ,  $\Psi = 0$  in  $F\Gamma$  segue  $\Psi \equiv 0$ ). Ora è appunto l'indipendenza dei vettori (24) che, come peraltro è noto, conduce all'esistenza delle  $\alpha_i$ . La seconda delle (22) è addirittura banale.

Col classico procedimento di Levi (che qui è inutile ripetere) si conclude allora che la seconda delle (20), con  $g$  in luogo di  $G$ , è sfornita di autosoluzioni (e lo stesso dicasi della prima). Quindi dalla (18) (sempre con  $g$  in luogo di  $G$ ) si trae proprio  $\Phi_0 \equiv 0$ .

2. Ciò premesso (e supposto senz'altro che dalla (18) segna  $\Phi_0 \equiv 0$ ), si prenda in esame il problema di Dirichlet

$$(25) \quad E[u] = f \text{ in } D - FD, \quad u = g \text{ in } FD$$

e si osservi che, se il vettore  $\{\Phi, \varphi\}$  è soluzione del sistema (11), (12), la funzione  $u$  che in  $\Gamma - FD$  è così definita

$$(26) \quad u(x) = - \int_{\Gamma} G(x, y) \Phi(y) dy + 2 \int_{FD} L_y[G(x, y)] \varphi(y) d\sigma_y$$

rappresenta in  $D - FD$  proprio una soluzione del problema (25).

Adesso, per studiare il problema non c'è che da imitare il ragionamento del Miranda ([2], pp. 59-61). Si consideri allora una soluzione  $\{\Phi_0, \varphi_0\}$  del sistema omogeneo

$$(27) \quad \Phi_0(x) - \int_{\Gamma} G(x, y) \Phi_0(y) dy + 2 \int_{FD} L_x[L_y[G(x, y)]] \varphi_0(y) d\sigma_y = 0 \quad (x \in \Gamma - FD - F\Gamma)$$

$$(28) \quad \varphi_0(x) - \int_{\Gamma} G(x, y) \Phi_0(y) dy + 2 \int_{FD} L_y[G(x, y)] \varphi_0(y) d\sigma_y = 0 \quad (x \in FD)$$

e si ponga (per  $x \in \Gamma - FD$ )

$$(29) \quad u_0(x) = - \int_{\Gamma} G(x, y) \Phi_0(y) dy + 2 \int_{FD} L_y[G(x, y)] \varphi_0(y) d\sigma_y.$$

Se pel problema (25) vale il teorema di unicità (nel senso che da  $E[u_0] = 0$  in  $D - FD$  e  $u_0 = 0$  in  $FD$  segna  $u = 0$  in  $D$ ), allora dalla (27), considerata solo in  $D - FD$ , e dalla (28) si deduce che la  $u_0$  rappresentata dalla (29) è nulla in  $D - FD$ . Da tale circostanza, tenuto conto che il potenziale

$$\int_{\Gamma} G(x, y) \Phi_0(y) dy$$

è a derivate prime hölderiane in  $\Gamma$  (C. Miranda [2], p. 23, teor. 13, I) e tenuto conto della (8) (con  $G$  in luogo di  $H$ ) si deduce che la funzione (29), considerata solo in  $\Gamma - D$ , ha la derivata conormale nulla in  $FD$ . D'altra parte tale funzione è nulla in  $F\Gamma$  (per la prima delle (16); ed allora, tenute presenti la seconda delle (17) e la (27) (quest'ultima solo per  $x \in \Gamma - D - F\Gamma$ ), in forza di un noto teorema di unicità (C. Miranda [2], p. 5, teor. 3, IV), si deduce che la  $u_0$  (già nulla in  $D - FD$  è pure nulla in  $\Gamma - D$ . Ne segue, ricordando la seconda delle (7) (con  $G$  in luogo di  $H$ ),

$$(30) \quad -\varphi_0(x) - \int_{\Gamma} G(x, y) \Phi_0(y) dy + 2 \int_{FD} L_y[G(x, y)] \varphi_0(y) d\sigma_y = 0 \quad (x \in FD)$$

e confrontando quest'ultima con la (28), si trae  $\varphi \equiv 0$ .

Se ora si tiene presente che la  $u_0$  è sempre nulla in  $\Gamma$ , cioè che vale la (18), si deduce pure (in forza della premessa iniziale)  $\Phi_0 \equiv 0$ .

Il sistema (11), (12) non ha dunque autosoluzioni, sicché esso possiede sempre una (ed una sola) soluzione  $\{\Phi, \varphi\}$  comunque si assegni il termine noto  $\{f, q\}$  e la funzione (26) rappresenta, in  $D - FD$ , la richiesta soluzione del problema (25).

È utile osservare che, nell'ipotesi di unicità ammessa, la funzione  $f$  può essere assegnata arbitrariamente (per esempio nulla) in  $\Gamma - D$ . È anche utile osservare che, se  $c \leq 0$  in  $\Gamma - D$ , si può assumere pure  $E = E$  in  $\Gamma - D$ .

Nel caso generale, sia  $u'$  una soluzione del problema (25). Posto  $E' = E - c + c'$  in  $\Gamma$ , si osservi che  $u'$  è soluzione del problema

$$(31) \quad E'[u] = f + (c' - c)u' \text{ in } D - FD, \quad u = q \text{ in } FD.$$

Ora ogni soluzione di tale problema assume la forma (26), dove  $\{\Phi, \varphi\}$  è soluzione del sistema (11), (12), con  $E'$  in luogo di  $E$ ,  $f + (c' - c)u'$  in luogo di  $f$  in  $D - FD$  ed  $f$  arbitraria in  $\Gamma - D$ . D'altra parte l'unica soluzione del problema (31) è la  $u'$  (perché con riferimento all'operatore  $E'$  vale il teorema di unicità) e pertanto la funzione  $u'$  è ancora rappresentata in  $D - FD$  dalla (26), dove  $\{\Phi, \varphi\}$  è soluzione del sistema (11) (12) (con  $f$  arbitrariamente prefissata in  $\Gamma - D$ ).

Le condizioni di compatibilità pel problema sono allora espresse dalla ortogonalità del termine noto  $\{f, q\}$  del sistema (11), (12) alle autosoluzioni  $\{\Psi, \psi\}$  del sistema trasposto

$$(32) \quad \Psi(y) - \int_{\Gamma} \mathcal{E}_x[G(x, y)] \Psi(x) dx - \int_{FD} G(x, y) \psi(x) d\sigma_x = 0 \quad (y \in \Gamma - FD - F\Gamma),$$

$$(33) \quad \psi(y) + 2 \int_{\Gamma} \mathcal{E}_x[L_y[G(x, y)]] \Psi(x) dx + 2 \int_{FD} L_y[G(x, y)] \psi(x) d\sigma_x = 0 \quad (y \in FD).$$

(L'analisi si potrebbe ulteriormente approfondire).

In modo analogo si tratterà il problema di Neumann:

$$(34) \quad E[u] = f \text{ in } D - FD, \quad \mathcal{L}[u] \equiv a \frac{\partial u}{\partial \nu} + bu = q \text{ in } FD.$$



In questo caso, in luogo della (26) si partirà dalla seguente posizione

$$(35) \quad u(x) = - \int_{\Gamma} G(x, y) \Phi(y) dy - 2 \int_{FD} G(x, y) \varphi(y) d\sigma_y.$$

3. Con riferimento (per fissare le idee) al problema (25), la funzione

$$(36) \quad s(x, t) \equiv H(x, t) - \int_{\Gamma} G(x, y) \Phi(y, t) dy + 2 \int_{FD} L_y[G(x, y)] \varphi(y, t) d\sigma_y$$

è una soluzione fondamentale per l'equazione (1) (nel senso che  $E_x[s(x, t)] = 0$ ), qualora  $\{\Phi(x, t), \varphi(x, t)\}$ , per ogni  $t \in D$ , sia soluzione del sistema

$$(37) \quad \Phi(x, t) - \int_{\Gamma} \mathcal{E}_x[G(x, y)] \Phi(y, t) dy + 2 \int_{FD} \mathcal{E}_x[L_y[G(x, y)]] \varphi(y, t) d\sigma_y = - \mathcal{E}_x[H(x, t)] \quad (x \in \Gamma)$$

$$(38) \quad \varphi(x, t) - \int_{\Gamma} G(x, y) \Phi(y, t) dy + 2 \int_{FD} L_y[G(x, y)] \varphi(y, t) d\sigma_y = - H(y, t) + q(x, t) \quad (x \in FD)$$

In base a quel che si è detto, tale sistema si può sempre risolvere quando pel problema (25) vale il teorema di unicità e si ottiene una soluzione fondamentale che assume valori  $q(x, t)$  arbitrariamente prescritti per  $x \in FD$  e  $t \in D - FD$ . Per esempio, se si assume  $q(x, t) = 0$ , si ottiene la funzione di Green pel problema di Dirichlet. (E l'indagine potrebbe essere ulteriormente proseguita).

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. E. LEVI, *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, «Mem. Soc. It. dei XL», t. 16, 1909.
- [2] C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, «Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete», Springer-Verlag, Berlin 1955.
- [3] M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli 1940.
- [4] M. PICONE, *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali*, «Rend. Accad. Lincei», 1947 (tre Note).

**Matematica.** — *Sulla varietà dei divisori dello zero nelle algebre.*  
Nota (\*) di MICHELE SCE, presentata dal Socio B. SEGRE.

In questo lavoro, dopo qualche breve considerazione sulle matrici nei corpi (non commutativi), mostriamo come lo studio della varietà dei divisori dello zero nelle algebre alternative su campi di caratteristica diversa da 2 e nelle algebre di Jordan su campi di caratteristica zero si possa ricondurre allo studio di tale varietà nelle algebre centrali semplici.

Si dimostra poi che *la dimensione della varietà dei divisori dello zero nelle algebre alternative su campi di caratteristica diversa da 2 è data dall'ordine dell'algebra diminuito dell'ordine della più piccola algebra primitiva fattore delle componenti semplici dell'algebra.*

Infine, basandoci sulla nota classificazione, diamo qualche risultato parziale per le algebre di Jordan.

I. Sia  $A$  una matrice di ordine  $n$  su un corpo  $\mathbf{C}$  che abbia diverso da zero l'elemento della prima riga e colonna; allora

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21} a_{11}^{-1} a_{12} & \cdots & a_{2n} - a_{21} a_{11}^{-1} a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1} a_{11}^{-1} a_{12} & \cdots & a_{nn} - a_{n1} a_{11}^{-1} a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{11}^{-1} a_{12} & \cdots & a_{11}^{-1} a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = BH.$$

Se  $A$  ha diversi da zero tutti gli elementi della prima colonna, possiamo portare al primo posto una riga qualunque e scomporre la nuova matrice come abbiamo scomposto  $A$ ; in questo modo, partendo da  $A$ , otteniamo  $n$  matrici che hanno nulli tutti gli elementi della prima riga tranne il primo. Così proseguendo, possiamo portare la  $A$  — purché si facciano convenienti ipotesi qualitative sugli elementi delle prime  $n - 1$  colonne — a forma triangolare in  $n!$  modi (1). I prodotti degli elementi delle diagonal principali di queste  $n!$  matrici triangolari — presi con il loro segno o col segno opposto secondo che su  $A$  si è fatto, complessivamente, un numero pari o dispari di scambi di righe — li diremo *valori* di  $A$ .

(\*) Pervenuta all'Accademia l'8 agosto 1957.

(1) Con lo stesso procedimento si possono portare le matrici simmetriche alla forma canonica:

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \text{con } E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times D',$$

dove  $\times$  indica il prodotto diretto di matrici e  $D, D'$  sono diagonal.

Se sugli elementi di  $A$  non si fa nessuna ipotesi, qualcuna o nessuna delle espressioni che davano i valori di  $A$  potrà avere senso; nel primo caso diremo valori di  $A$  gli elementi di  $C$  dati dalle espressioni aventi senso, nel secondo caso diremo che  $A$  ha il valore zero. Talvolta, nel seguito, scriveremo  $|A| = 0$  per indicare che  $A$  ha il valore zero <sup>(2)</sup>.

Sfruttando il legame che abbiamo posto tra i valori di  $A$  e la riduzione di  $A$  a forma triangolare, si dimostra facilmente che se le colonne di  $A$  sono linearmente dipendenti a destra tutti i valori di  $A$  sono nulli e che - viceversa - se un valore di  $A$  è nullo, le colonne di  $A$  sono linearmente dipendenti a destra (e quindi risultano nulli anche gli altri valori di  $A$ ). Dopodiché, con l'uso di noti teoremi sui sistemi lineari <sup>(3)</sup>, si può dimostrare che *i valori della matrice sono nulli se e soltanto se le sue linee sono linearmente dipendenti (a destra o a sinistra)*.

Da qui segue che *i valori del prodotto di due matrici sono nulli se e soltanto se sono nulli i valori di una delle due*. È però facile verificare che i valori del prodotto non sono, in generale, prodotti dei valori delle matrici fattori.

2. Sia  $A$  un'algebra di ordine  $nd$ , dotata di unità, su un campo  $F$ , che contenga un'algebra primitiva associativa  $C$  (eventualmente coincidente con  $F$ ) di ordine  $d$  ed un'algebra  $B$  di base  $(u_1, \dots, u_n)$ , pure dotata di unità. Se gli elementi di  $C$  sono associabili con gli elementi di  $A$  e permutabili con gli elementi di  $B$ , cioè se  $C$  è nel nucleo di  $A$  e nel commutatore di  $B$ , diremo che  $A$  è il prodotto diretto di  $B$  e  $C$ , e scriveremo  $A = B \times C$ . Gli elementi di  $A$  li scriveremo

$$\begin{aligned} x &= x_1 u_1 + \dots + x_n u_n = \xi u_{-1} = u \xi_{-1}, \\ y &= y_1 u_1 + \dots + y_n u_n = \mu u_{-1} = u \mu_{-1} \end{aligned} \quad (x_i, y_i \in C)$$

Se  $x$  è un divisore sinistro oppure destro dello zero, esiste un  $y$  tale che

$$(1') \quad 0 = xy = x u \eta_{-1} = u X' \eta_{-1} \xrightarrow{\leftarrow} X' \eta_{-1} = 0$$

oppure

$$(1'') \quad 0 = yx = \xi u_{-1} x = \xi X'' u_{-1} \xrightarrow{\leftarrow} \xi X'' = 0$$

dove  $X'(X'')$  rappresenta  $x$  nel  $C$ -modulo  $A'(A'')$  prima (seconda) rappresentazione di  $A$ . Le (1) dicono che  $x$  è un divisore sinistro o destro dello zero se e soltanto se sono nulli i valori di  $X'$  o di  $X''$ , che diremo primi e secondi

(2) Se il corpo è commutativo tutti i valori della matrice coincidono con il determinante classico (naturalmente i valori possono coincidere tra loro anche se il corpo non è commutativo). Partendo da considerazioni simili alle nostre, J. DIEUDONNE [*Les déterminants sur un corps non commutatif*, « Bull. Soc. Math. France », vol. 74 pp. 27-45 (1943)], introduce un determinante che gode molte delle proprietà classiche, ma che non è nel corpo.

Le riflessioni fatte sopra si estendono immediatamente ai corpi ad inverso associativo (corpi alternativi).

(3) Cfr. B. SEGRE, *Lezioni di Geometria moderna*, vol. I (Bologna, 1947), n. 97.

valori di  $x$  su  $\mathbf{C}$ ; i valori di  $x$  su  $\mathbf{F}$  si dicono prima e seconda norma  $n'(x)$ ,  $n''(x)$  di  $x$ .

Se  $\mathbf{C}$  è, a sua volta, prodotto diretto di un corpo  $\mathbf{C}_1$  e di un campo  $\mathbf{C}_2$ , gli elementi di  $\mathbf{A}'$  ed  $\mathbf{A}''$  sono formati da matrici che sono la prima o la seconda rappresentazione di  $\mathbf{C}_1$  su  $\mathbf{C}_2$ . Questo, tra l'altro, assicura che le norme di  $x$  sono i valori su  $\mathbf{F}$  dei valori di  $x$  su  $\mathbf{C}$ .

Sia ora  $\mathbf{R}$  un ideale di  $\mathbf{A}$  e sia  $\mathbf{S} = (u_{m+1}, \dots, u_n) = \mathbf{u}^{(2)}$  l'ideale di  $\mathbf{B} = (\mathbf{u}^{(1)} \mathbf{u}^{(2)})$  traccia di  $\mathbf{R}$  su  $\mathbf{B}$ . Si consideri la prima rappresentazione di un elemento di  $\mathbf{A}$ ,  $x = x^{(1)} + x^{(2)} (x^{(2)} \in \mathbf{R})$  su  $\mathbf{C}$ :

$$x \mathbf{u} = (x^{(1)} + x^{(2)}) (\mathbf{u}^{(1)} \mathbf{u}^{(2)}) = (\mathbf{u}^{(1)} \mathbf{u}^{(2)}) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^{(1)} & 0 \\ \mathbf{X}_2^{(1)} + \mathbf{X}_1^{(2)} \mathbf{X}_3^{(1)} + \mathbf{X}_2^{(2)} \end{pmatrix} = \mathbf{u} \mathbf{X}'$$

dove  $\mathbf{X}_i^{(k)}$  dipende dalle coordinate di  $x^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ); la  $\mathbf{X}_1^{(1)}$  rappresenta la classe  $[x^{(1)}]$  in  $\mathbf{A} - \mathbf{R}$ .

Se  $x^{(1)}$  è un divisore dello zero in  $\mathbf{A} - \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{X}_1^{(1)}$  è a colonne e quindi a righe dipendenti; allora  $|\mathbf{X}'| = 0$  e  $x$  è un divisore sinistro dello zero in  $\mathbf{A}$  qualunque sia  $x^{(2)}$  in  $\mathbf{R}$ .

Perciò la varietà  $V_0(\mathbf{A})$  dei divisori sinistri dello zero di  $\mathbf{A}$  ha sempre almeno la dimensione

$$(2) \quad v' + (n - m) d$$

dove  $(n - m) d$  è la dimensione dello spazio rappresentativo dell'ideale  $\mathbf{R}$  e  $v'$  è la dimensione della varietà  $V_0(\mathbf{A} - \mathbf{R})$  dei divisori sinistri dello zero di  $\mathbf{A} - \mathbf{R}$  <sup>(4)</sup>.

Se  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2$  è somma diretta delle due algebre  $\mathbf{A}_1$  ed  $\mathbf{A}_2$  di ordini  $n_1$  ed  $n_2$ , tenendo conto che  $\mathbf{A}_1$  ed  $\mathbf{A}_2$  sono ideali di  $\mathbf{A}$  e che gli spazi vettoriali  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{A}''$  sono isomorfi, si conclude che la dimensione di  $V_0(\mathbf{A})$  è il maggiore dei due numeri  $n_1 + \dim. V_0(\mathbf{A}_2)$ ,  $n_2 + \dim. V_0(\mathbf{A}_1)$ .

3. Sia  $\mathbf{A}$  una  $t$ -algebra, cioè un'algebra che ammette come funzione traccia la traccia degli elementi dell' $\mathbf{F}$ -modulo rappresentazione. Allora possiamo definire il radicale (massimo ideale pseudonullo) di  $\mathbf{A}$  come quell'insieme di elementi  $h$  tali che la traccia  $t(xh)$  è nulla per ogni  $x$  di  $\mathbf{A}$ . Ne segue che  $t(x^i h^k) = 0$  per ogni coppia di interi positivi,  $i$  e  $k$ ; perciò le  $t[(x + h)^j]$ , e quindi la norma  $n(x + h)$ , non dipendono dalle coordinate di  $h$ .

Possiamo dunque concludere che i divisori dello zero di una  $t$ -algebra  $\mathbf{A}$ , che non siano, nel radicale  $\mathbf{R}$  provengono da divisori dello zero della parte semisemplice  $\mathbf{A} - \mathbf{R}$ ; quindi la dimensione di  $V_0(\mathbf{A})$  è proprio quella data dalla (2).

(4) Quando  $\mathbf{A} - \mathbf{R}$  sia una sottoalgebra di  $\mathbf{A}$ , queste considerazioni hanno una semplice interpretazione geometrica: la  $V_0(\mathbf{A})$  contiene un cono - di dimensione  $v' + (n - m) d$  - che ha come vertice la  $V_0(\mathbf{A} - \mathbf{R})$ .



Tenendo poi conto che le algebre semisemplici sono somma diretta di algebre semplici, si ha anche che  $\dim V_0(\mathbf{A})$  è pienamente determinata quando si conosca la dimensione della varietà dei divisori dello zero delle  $t$ -algebre semplici.

Poiché è noto che il radicale delle algebre alternative su campi di caratteristica diversa da 2 è costituito dagli elementi  $h$  tali che  $x + h$  è un divisore dello zero se e soltanto se tale è  $x$  <sup>(5)</sup>, per algebre siffatte sussistono i teoremi enunciati sopra per le  $t$ -algebre.

In forza di questi teoremi, ci possiamo ridurre allo studio delle varietà dei divisori dello zero nelle algebre semplici; se poi - come faremo nel seguito - si considerano soltanto algebre il cui centro sia un campo, possiamo addirittura ridurci alla considerazione delle algebre centrali semplici.

4. Sia  $\mathbf{A}$  un'algebra centrale semplice associativa su un campo  $\mathbf{F}$ ; allora  $\mathbf{A} = \mathbf{M} \times \mathbf{C}$ , dove  $\mathbf{M}$  è un'algebra regolare di grado  $r$  e  $\mathbf{C}$  un'algebra primitiva di ordine  $d$ . Affinché un elemento di  $\mathbf{A}$  sia un divisore dello zero occorre e basta che siano nulli i suoi valori su  $\mathbf{C}$ ; quindi

$$(3) \quad \dim V_0(\mathbf{A}) \geq r^2 d - d^{(6)}.$$

Le algebre alternative centrali semplici che non sono associative sono algebre di Cayley-Dickson; un elemento  $x = \sum_{i=1}^8 x_i u_i$  ( $x_i \in \mathbf{F}$ ) di tali algebre è un divisore dello zero se e soltanto se è nulla l'espressione

$$(4) \quad x_1^2 - (\alpha x_2^2 + \beta x_3^2 - \alpha\beta x_4^2) - \gamma [x_5^2 - (\alpha x_6^2 + \beta x_7^2 - \alpha\beta x_8^2)] \\ (\alpha, \beta, \gamma \text{ in } \mathbf{F}).$$

Quando  $x' = \sum_{i=1}^4 x_i u_i$ ,  $x'' = \sum_{i=5}^8 x_i u_i$  siano elementi di un'algebra primitiva, la (4) si annulla allora e soltanto allora che risulti

$$(5) \quad \gamma = z_1^2 - \alpha z_2^2 - \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 \quad (z_i \in \mathbf{F})^{(7)}.$$

Se non si può soddisfare alla (5), l'algebra è primitiva. Se invece la (5) ammette soluzioni, il cono quadrico dello spazio 8-dimensionale che si ottiene

(5) Si veda R. DUBISCH, S. PERLIS, *The radical of an alternative algebra*, « Amer. J. Math. », vol. 70, pp. 540-546 (1948).

(6) Nel caso delle algebre associative ed alternative non vi è luogo a distinguere tra divisori dello zero destri e sinistri.

Alla (3) si poteva pervenire osservando che, per la forma delle matrici di  $\mathbf{A}'$  (o di  $\mathbf{A}''$ ),  $V_0(\mathbf{A})$  contiene certamente 2 schiere dipendenti da  $(r-1)d$  parametri di spazi lineari  $(r^2 d - rd)$ -dimensionali.

(7) Per tutte queste nozioni, si veda L. E. DICKSON, *Algebren und ihre Zahlentheorie* (Zürich 1927), Kap. XII, § 133. Si noti che la norma, definita nel n. 2, degli elementi di un'algebra di Cayley-Dickson è la quarta potenza della (4).

eguagliando a zero la (4) contiene uno spazio lineare 4-dimensionale (su  $\mathbf{F}$ ) ed è una ipersuperficie (su  $\mathbf{F}$ ).

Nel caso in cui  $x'$  ed  $x''$  non appartengono ad un'algebra primitiva, accadrà, ad esempio, che

$$\beta = t_1^2 - \alpha t_2^2 \quad (t_i \in \mathbf{F});$$

ma si trova di nuovo che il cono  $V_o(\mathbf{A})$  contiene uno spazio 4-dimensionale ed è una ipersuperficie.

Tenendo ora conto del fatto che — per il teorema di Dubisch-Perlis — se  $\mathbf{F}$  è di caratteristica diversa da 2, i valori degli elementi di  $\mathbf{A}$  dipendono da tutte le coordinate, abbiamo che se  $\mathbf{A}$  è un'algebra (associativa o) alternativa semplice, su un campo di caratteristica diversa da 2

$$\dim V_o(\mathbf{A}) = n - d$$

dove  $n$  è l'ordine di  $\mathbf{A}$  e  $d$  è l'ordine dell'algebra primitiva di ordine massimo, fattore di  $\mathbf{A}$ .

Di qui — usando i teoremi dei n. 2 e 3 — segue subito il teorema enunciato nell'introduzione.

5. Le algebre centrali semplici di Jordan su un campo  $\mathbf{F}$  di caratteristica zero sono dei quattro seguenti tipi.

a) Algebre di grado 2 con la base  $u_1, \dots, u_n$  ( $n \geq 4$ ) e lo schema di moltiplicazione  $u_i u_i = u_i u_i = u_i$ ,  $u_i^2 = \alpha_i u_i$  ( $\alpha_i$  in  $\mathbf{F}$ ),  $u_i u_j = u_j u_i = 0$ .

b) Algebre  $\mathbf{A}^+$  che si ottengono da un'algebra centrale semplice associativa  $\mathbf{A} = \mathbf{M} \times \mathbf{C}$  ( $\mathbf{M}$  algebra regolare di grado  $r$ ,  $\mathbf{C}$  algebra primitiva di ordine  $d$ ) considerando come nuova moltiplicazione l'operazione

$$(6) \quad x \cdot y = \frac{xy + yx}{2}$$

c) Algebre  $\mathbf{S}^+$  che hanno — come elementi — gli elementi simmetrici di un'algebra centrale semplice associativa  $\mathbf{A} = \mathbf{M} \times \mathbf{C}$  che possieda un'involuzione  $J$ , e — come moltiplicazione — la (6).

d) Algebre di ordine 27 che hanno come elementi le matrici hermitiane del 3° ordine sulle algebre di Cayley e come moltiplicazione la (6).

Le algebre di Jordan del tipo a) posseggono evidentemente  $n$  iperpiani di divisori dello zero.

Quando si faccia la rappresentazione delle algebre di Jordan del tipo b) su  $\mathbf{F}$ , si ottiene

$$(7) \quad 2x u_{-1} = x u_{-1} + u_{-1} x = (X'_{-1} + X'') u_{-1};$$

$x$  è un divisore dello zero soltanto se è nulla la sua norma, cioè se  $|X'_{-1} + X''| = 0$ .

La matrice  $X'_{-1} + X''$  è formata con le matrici che rappresentano elementi dell'algebra associativa  $\mathbf{C}$  e dell'algebra di Jordan  $\mathbf{C}^+$ . Se  $\mathbf{C}^+$  è un'al-

gebra primitiva, la norma di  $x$  risulta la norma di un elemento di  $\mathbf{C}^+$  e quindi il suo annullarsi porta al più  $d$  condizioni. Una facile verifica assicura poi che le condizioni sono proprio  $d$ .

Meno semplice è la situazione se  $\mathbf{C}^+$  non è primitiva; già  $\mathbf{C}^+$  possiede allora una varietà di divisori dello zero, e risulta <sup>(8)</sup>:

$$(8) \quad \dim V_0(\mathbf{C}^+) = d - \frac{s}{2}$$

dove  $s$  è il grado di  $\mathbf{C}$  (grado dell'equazione minima di  $\mathbf{C}$ ).

Per avvicinarsi alla soluzione della questione ci è sembrato necessario cercare una forma canonica per le matrici su un corpo qualunque <sup>(9)</sup>. Un primo risultato - in questo ordine di idee - è che *i divisori dello zero di  $\mathbf{A}$  sono tutti divisori dello zero di  $\mathbf{A}^+$* , cioè che

$$V_0(\mathbf{A}^+) \supset V_0(\mathbf{A});$$

la  $V_0(\mathbf{A}^+)$  contiene poi una varietà  $W(\mathbf{A})$  costituita dai divisori dello zero di  $\mathbf{A}^+$  che non lo sono di  $\mathbf{A}$ . Il nostro problema si riduce a quello di trovare la dimensione di  $W(\mathbf{A})$ .

Quando si prenda in  $\mathbf{M}$  una base di elementi simmetrici, possiamo rappresentare mediante la (7) anche gli elementi delle algebre di tipo  $c$ ) e  $d$ ). Per le algebre di tipo  $c$ ) si devono ripetere le considerazioni fatte per le algebre di tipo  $b$ ). Invece, per le algebre di tipo  $d$ ), poiché gli elementi simmetrici dell'algebra di Cayley costituiscono ora il campo  $\mathbf{F}$ , possiamo dire che la  $V_0(\mathbf{A})$  è un'ipersuperficie.

Tenendo conto che - a causa della (8) - un'algebra di Jordan proveniente da un'algebra primitiva associativa può essere non primitiva se di grado e quindi di ordine pari, possiamo affermare che *per le algebre di Jordan semplici di tipo a) e d), e per quelle di ordine dispari di tipo b) e c), sussiste l'uguaglianza:*

$$\dim V_0(\mathbf{A}) = n - d,$$

dove  $n$  è l'ordine dell'algebra  $\mathbf{A}$  e  $d$  è l'ordine dell'algebra primitiva di ordine massimo contenuta in  $\mathbf{A}$ .

Di qui si potrebbero ricavare risultati per le algebre di Jordan non semplici, sui quali però non insistiamo.

(8) Si veda C. M. PRICE, *Jordan division algebras and the algebras  $A(\lambda)$*  « Trans. Amer. Math. Soc. », vol. 70, pp. 291 (1951).

(9) Per qualche prima nozione si può vedere, ad esempio, J. L. BRENNER, *Matrices of quaternions*, « Pacific J. Math. », vol. 1, pp. 329-335, nn. 2 e 3 (1951).

**Plasticità.** — *Linearizzazione delle equazioni della plasticità ristretta.*

Nota (\*) di EDOARDO STORCHI, presentata dal Corrisp. B. FINZI.

## INTRODUZIONE.

Le difficoltà di carattere matematico che si riscontrano in generale nello studio dei problemi di plasticità, trovano in gran parte la loro origine nella circostanza che *la plasticità non è lineare*. La condizione di plasticità proposta da Von Mises pone infatti un legame quadratico fra gli sforzi, mentre anche nelle varie modifiche che sono state introdotte, motivate da una non sempre completa aderenza alla realtà fisica della condizione di Mises, viene costantemente ripudiato il semplice legame lineare, considerato inadatto a tradurre il fenomeno plastico.

Per questa circostanza notevole interesse è sempre stato rivolto al risultato di quegli autori che riuscirono con opportune trasformazioni a ridurre al campo lineare problemi abbastanza generali di plasticità. Una tale riduzione è stata ad esempio eseguita da C. W. Oseen nel 1928 <sup>(1)</sup> e successivamente dalla Geiringer nel 1937 <sup>(2)</sup> per il problema della deformazione piana.

Alla luce di queste considerazioni può presentare interesse il risultato che costituisce l'oggetto della presente Nota e che è tradotto dalla seguente proporzione:

*Le equazioni che governano i problemi di plasticità ristretta, qualunque sia la condizione di plasticità, sono sempre linearizzabili.*

Come è ben noto il problema plastico nella sua generalità è un problema che riguarda sia gli sforzi che le velocità. Nelle equazioni, che governano il fluire dei continui plastici, gli sforzi e le velocità risultano però concatenati; per modo che la determinazione degli sforzi non può farsi indipendentemente da quella delle velocità.

Vi sono tuttavia alcuni casi particolari (e fisicamente interessanti) nei quali è possibile disincatenare gli sforzi dalle velocità, almeno in sede indefinita, ed ottenere un sistema determinato di equazioni nelle quali le incognite sono costituite dai soli sforzi. Il problema plastico che nasce in questi casi particolari è detto problema plastico « ristretto » o « staticamente determinato ».

Un problema caratteristico di questo tipo è il problema della deformazione piana, nel quale le tre componenti distinte  $p_{xx} = \sigma_x$ ,  $p_{xy} = \tau$ ,  $p_{yy} = \sigma_y$

(\*) Pervenuta all'Accademia il 12 giugno 1957.

(1) C. W. OSEEN, *Ueber eine in der Theorie der plastischen Körper auftretende partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung*. (« Ark. for Mat. Astron. och Fysik », t. 20, 1928).

(2) H. GEIRINGER, *Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes*. « Memorial des sciences mathématiques », fasc. LXXXVI, 1937.



del tensore degli sforzi, in assenza di forze di campo, obbediscono in sede indefinita al sistema:

$$1' \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad 2' \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$3 \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2 \tau^2 = 4 H^2$$

ed in sede definita alle condizioni al contorno:

$$4 \quad \begin{cases} \sigma_x \cos \gamma + \tau \sin \gamma = f_x \\ \tau \cos \gamma - \sigma_y \sin \gamma = f_y \end{cases}$$

Le (1'), (2') costituiscono le equazioni indefinite di equilibrio dei continui in assenza di forze di campo, la (3) traduce la condizione di plasticità di Tresca, coincidente, in questo caso specifico, con quella di Mises, ed in essa  $H$  denota la costante di plasticità. Nelle (4) poi  $\gamma$  indica l'angolo che la normale al contorno volta verso l'interno forma con l'asse  $x$  del  $(x, y)$ , le componenti, note, della forza unitaria che viene esercitata al contorno.

Le equazioni (1'), (2') sono lineari, *non lineare* invece è la condizione (3) di plasticità. Integrando mediante la funzione  $\chi$  di Airy il sistema formato dalle (1') e (2') e sostituendo nella (3), si ottiene allora, come ben noto, l'equazione alle derivate parziali *non lineare* del 2° ordine:

$$5 \quad \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right)^2 + \left( 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4 H^2$$

che, da sola, governa il problema plastico ristretto della deformazione piana.

Supponiamo ora che la condizione di plasticità non sia tradotta dalla (3), ma da una generica relazione del tipo:

$$6' \quad G(\sigma_x, \tau, \sigma_y) = 0$$

esprimente un legame finito fra i tre sforzi  $\sigma_x, \tau, \sigma_y$ , la quale sia invariante rispetto ad un generico cambiamento del riferimento. Anche in questo caso, col procedimento indicato, si perviene ad una equazione *non lineare* del 2° ordine, facendo eccezione il solo caso del tutto privo di interesse fisico nel quale l'equazione (6') sia a sua volta lineare in  $\sigma_x, \tau, \sigma_y$ . Tipicamente ad esempio, nel problema degli sforzi piani, la (6) si specifica, secondo Mises, anziché nella (3'), nella seguente:

$$3' \quad \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau^2 = 3 H^2.$$

È proprio a causa della non linearità delle condizioni di plasticità che sembrano meglio adeguate a rappresentare la realtà fisica, che ogni problema plastico ristretto, governato in sede indefinita dalle equazioni (1') - (2') - (6'), si presenta come non lineare.

# § 1. - CARATTERE LINEARE DELLE EQUAZIONI DELLA PLASTICITÀ RISTRETTA.

Nello spazio di coordinate  $\sigma_x, \tau, \sigma_y$  la (6) rappresenta l'equazione di una superficie. Scegli due parametri  $\alpha$  e  $\beta$  a piacere, di questa superficie si dia una rappresentazione parametrica nella forma:

$$(7) \quad \sigma_x = f(\alpha, \beta) \quad \tau = g(\alpha, \beta) \quad \sigma_y = F(\alpha, \beta).$$

Le tre funzioni  $f, g, F$  sono pertanto note e la sostituzione delle (7) nella (6) dà luogo ad una identità; in altri termini, esprimendo gli sforzi nella forma (7), la condizione di plasticità è già scontata.

I parametri  $\alpha$  e  $\beta$  che sono stati introdotti risulteranno naturalmente funzioni del posto, cioè di  $x$  e di  $y$ . Se allora derivando le (7) e sostituendo nelle (1) e (2) si scrivono le equazioni differenziali cui soddisfano le funzioni incognite (3):

$$(8) \quad \alpha = \alpha(x, y) \quad \beta = \beta(x, y)$$

ci si avvede che queste equazioni *non sono lineari*.

Se le (8) si possono risolvere rispetto ad  $x$  ed  $y$  e si pone invece attenzione alle funzioni inverse:

$$(9) \quad x = x(\alpha, \beta) \quad y = y(\alpha, \beta)$$

è facile constatare che, eseguendo una trasformazione del tipo di Legendre, le due equazioni differenziali cui esse soddisfano, qualunque sia la condizione di plasticità, sono equazioni lineari.

Dalle (9), segue infatti:

$$(10) \quad \begin{cases} 1 = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} \end{cases} \quad (11) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} \\ 1 = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} \end{cases}$$

Interpretiamo i sistemi formati dalle (10) e (11) come sistemi lineari nelle incognite  $\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial x}{\partial \beta}$  e  $\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \frac{\partial y}{\partial \beta}$  rispettivamente. Il comune determinante di questi sistemi lineari non omogenei è il seguente:

$$J = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = \frac{\partial(x, \beta)}{\partial(\alpha, y)}.$$

Se tale determinante Jacobiano risulta identicamente nullo in una regione plastica, ciò significa che in quella regione  $\alpha$  e  $\beta$  sono funzionalmente dipendenti, che risulta cioè:

$$\beta = \beta(\alpha).$$

In tal caso le soluzioni del sistema (1), (2), (6), cioè del problema plastico ristretto in sede indefinita, dipendono da un sol parametro  $\alpha$ . In un proce-

(3) Seguendo in tal modo un procedimento ormai classico nel problema della deformazione piana. (Vedasi ad esempio per lo studio completo del problema il trattato di W. PÖGGER e G. HODGE Jr., *Theory of perfectly plastic solids*, 1951, pp. 122-168).

dente lavoro ho già individuato *tutte* le soluzioni di questo tipo, *qualunque sia la condizione* (6) di plasticità<sup>(4)</sup> e quindi il problema plastico ristretto per  $J = 0$  può ritenersi genericamente risolto, almeno in sede indefinita. Se invece nella intera *regione* plastica considerata risulta:

$$(12) \quad J \neq 0$$

si può procedere facilmente alla linearizzazione.

Dalle (10) e (11) segue infatti:

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = J \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -J \frac{\partial x}{\partial \beta} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \beta}{\partial x} = -J \frac{\partial y}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \beta}{\partial y} = J \frac{\partial x}{\partial \alpha} \end{cases}$$

Il sistema differenziale *non lineare* cui devono soddisfare le funzioni  $\alpha = \alpha(x, y)$  e  $\beta = \beta(x, y)$  e che si ottiene sostituendo le (7) nelle (1) e (2) è d'altra parte il seguente:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Per la condizione (12) si possono risolvere le (8) rispetto ad  $x$  ed  $y$  ottenendosi le (9) e le conseguenti (10), (11), (13). L'ulteriore sostituzione delle (13) nelle (14) dà poi origine al sistema:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0. \end{cases}$$

Il sistema (15) è un sistema lineare nelle due funzioni incognite  $x = x(\alpha, \beta)$ ,  $y = y(\alpha, \beta)$  e nel quale i coefficienti sono funzioni note di  $\alpha$  e  $\beta$ , dipendenti in definitiva soltanto dalla natura della condizione di plasticità.

La conclusione cui siamo giunti è pertanto la seguente:

*In qualsiasi problema di plasticità ristretta ed in ogni regione nella quale lo Jacobiano  $J$  non si annulla, il sistema differenziale (14) che governa il problema può essere trasformato in un sistema lineare equivalente (15), scambiando l'ufficio delle variabili originariamente dipendenti  $\alpha$  e  $\beta$  ed indipendenti  $x$  ed  $y$ .*

Ad ogni soluzione  $\alpha = \alpha(x, y)$ ,  $\beta = \beta(x, y)$  del sistema (14) corrisponde una ed una sola soluzione del sistema (15), e viceversa ogni soluzione  $x = x(\alpha, \beta)$ ,  $y = y(\alpha, \beta)$  del sistema (15) porta ad una ed una sola soluzione del sistema (14) se  $J' = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{1}{J}$  non è nullo nella regione.

(4) E. STORCHI, *Soluzioni ad un parametro del problema plastico ristretto della deformazione piana*, « Rend. dell'Acc. Nazionale dei Lincei », ser. 8<sup>a</sup>, vol. XXII, fasc. 3, p. 286 (1957).

Dalle (15) segue:

$$(15') \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} = -\frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = A \\ \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = B. \end{cases}$$

Osservando che il determinante:

$$(16) \quad \Delta = \frac{\partial(f, g)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial g}{\partial \alpha}$$

non può risultare identicamente nullo nella *regione* plastica considerata, dalle (15') si desume subito:

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{1}{\Delta} \left( B \frac{\partial f}{\partial \alpha} - A \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right) = M(\alpha, \beta) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + N(\alpha, \beta) \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{1}{\Delta} \left( B \frac{\partial f}{\partial \beta} - A \frac{\partial g}{\partial \beta} \right) = P(\alpha, \beta) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + Q(\alpha, \beta) \frac{\partial x}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Di qui infine segue:

$$(*) \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial \beta} \left[ M(\alpha, \beta) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + N(\alpha, \beta) \frac{\partial x}{\partial \beta} \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ P(\alpha, \beta) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + Q(\alpha, \beta) \frac{\partial x}{\partial \beta} \right]}$$

avendo posto:

$$(18) \quad \begin{cases} M(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta} - \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \beta} \right) & N(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Delta} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right)^2 - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right] \\ P(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{\partial F}{\partial \beta} - \left( \frac{\partial g}{\partial \beta} \right)^2 \right] & Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \beta} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right). \end{cases}$$

$L'(*)$  è l'equazione *lineare* del secondo ordine dalla quale dipende in ultima analisi ogni problema plastico ristretto, qualunque sia la condizione di plasticità. Naturalmente le soluzioni del problema plastico corrispondenti ad  $J = 0$  non si ritrovano attraverso alle (17) e  $L'(*)$ , e sfuggono al procedimento indicato di linearizzazione, ma, come si è detto, esse sono già state individuate per altra via.

L'equazione lineare  $(*)$  è poi di tipo iperbolico, parabolico od ellittico a seconda che risulti:

$$(19) \quad \left[ \frac{\partial(f, F)}{\partial(\alpha, \beta)} \right]^2 - 4 \frac{\partial(F, g)}{\partial(\alpha, \beta)} \cdot \frac{\partial(g, f)}{\partial(\alpha, \beta)} \geq 0.$$

Se in particolare si assume  $\sigma_x = f(\alpha, \beta) = \alpha$ ,  $\tau = g(\alpha, \beta) = \beta$ , la terza delle (7) costituisce la condizione di plasticità risolta rispetto ad uno dei tre sforzi e si giunge così alla seguente conclusione:

« se

$$\sigma_y = F(\sigma_x, \tau)$$

traduce la condizione di plasticità, le equazioni da cui dipende il problema plastico sono di tipo ellittico, parabolico od iperbolico a seconda che risulti:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \tau} \right)^2 + 4 \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \leq 0.$$



In quanto alle condizioni al contorno si osservi che nei problemi plastici ristretti staticamente determinati sono assegnate in generale ai confini della regione plastica due combinazioni lineari degli sforzi, come appare dalle (4). Poiché  $\sigma_x, \tau, \sigma_y$  sono, attraverso alle (7), funzioni *note* di  $\alpha$  e  $\beta$ , le due relazioni (4), tenuto presente che sul contorno  $\Gamma$  la  $y$  è funzione assegnata di  $x$  e che pure  $\cos \gamma, \sin \gamma$  sono funzioni note di  $x$ , possono scriversi nella forma:

$$(20) \quad \varphi(x, \alpha, \beta) = 0 \quad \Psi(x, \alpha, \beta) = 0.$$

Risulterà in tal modo determinata l'equazione:

$$(21) \quad \beta = \omega(\alpha)$$

della linea  $\Gamma'$  che sul piano  $(\alpha, \beta)$  corrisponde al contorno  $\Gamma$  del piano  $(x, y)$ . Risulterà perciò pure noto il valore che la  $x$  assume su  $\Gamma'$  e la risoluzione del problema plastico ristretto comporterà semplicemente l'integrazione dell'equazione lineare omogenea (\*) nell'incognita  $x = x(\alpha, \beta)$ , essendo assegnata tale funzione incognita sul contorno. Una volta individuata la  $x = x(\alpha, \beta)$ , le (17) forniscono tosto la  $y = y(\alpha, \beta)$ ; invertite tali funzioni  $x = x(\alpha, \beta), y = y(\alpha, \beta)$  si ottengono allora  $\alpha = \alpha(x, y), \beta = \beta(x, y)$  e quindi infine, sostituendo nelle (7), i desiderati sforzi.

## § 2. - CONFRONTO CON I PROBLEMI RIDUCIBILI DELL'AERODINAMICA.

Il procedimento di linearizzazione ora descritto è applicabile, come si è detto, a tutti i problemi plastici ristretti, in particolare ai problemi della deformazione piana, degli sforzi piani e della deformazione superficiale; vedremo in seguito l'applicazione a due di questi problemi. Qui vogliamo osservare che il procedimento illustrato, se pur non usato sistematicamente in plasticità, non è affatto nuovo nella fisica matematica.

Poiché dal piano  $(x, y)$  si passa al piano  $(\alpha, \beta)$  considerando le funzioni  $x = x(\alpha, \beta), y = y(\alpha, \beta)$  inverse delle  $\alpha = \alpha(x, y), \beta = \beta(x, y)$ , la trasformazione descritta è una trasformazione di tipo odografo, frequentemente usata ad esempio in aerodinamica, ove si passa dalle coordinate  $x$  ed  $y$  alle componenti  $u = \dot{x}, v = \dot{y}$  della velocità.

Una trasformazione di tipo odografo e quindi la linearizzazione è sempre possibile in ogni problema plastico ristretto, qualunque sia la condizione di plasticità (6); il che significa che quel procedimento di linearizzazione comunemente usato in aerodinamica può costituire uno strumento sistematico per attaccare i problemi di plasticità ristretta, in quanto essi sono sempre governati, per usare il termine ormai classico nella meccanica dei fluidi, da equazioni riducibili, con tutte le conseguenze che ne derivano.

In particolare le soluzioni ad un parametro dei problemi plastici ristretti stabilite nel lavoro sopra citato trovano il loro naturale riscontro nelle « onde

semplici» dell'aerodinamica e quindi, relativamente a tali soluzioni, *indipendentemente dalla condizione di plasticità*, sussiste la proposizione seguente <sup>(5)</sup>: *supposto che le equazioni del problema siano iperboliche e considerate le soluzioni per le quali lo Jacobiano  $J$  si annulla in una intera regione (soluzioni ad un parametro corrispondenti alle onde semplici), una almeno delle due famiglie di caratteristiche in tale regione è costituita da rette. Se lo stato di sforzo in una regione è costante, allora ambedue le famiglie di caratteristiche sono costituite da rette ed inoltre: una regione adiacente ad un'altra nella quale lo stato di sforzo è costante, è sempre una regione di onde semplici, nella quale cioè la soluzione del problema plastico è una soluzione ad un parametro.*

Si osservi da ultimo che la trasformazione, che permette di linearizzare i problemi di plasticità ristretta, presenta nei confronti dell'analoga trasformazione usata nei problemi riducibili dell'aerodinamica il seguente vantaggio:

mentre la trasformazione odografa nel caso aerodinamico implica una complicazione nelle condizioni al contorno, in quanto il contorno nel piano odografo  $(u, v)$  corrispondente ad un dato contorno nel piano  $(x, y)$  dipende dalla soluzione del problema, nel caso plastico questa notevole complicazione non sussiste, come è stato messo in evidenza nel § 1.

**Astronomia** (Astrofisica solare). — *Variazione centro-lembo del Sole del tripletto verde del Magnesio:  $\lambda 5167,3$ – $\lambda 5172,7$ – $\lambda 5183,6$ .* Nota II di TERESA FORTINI e GIUSEPPE CAPRIOLI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio G. ARMELLINI.

Facendo seguito alla Nota I, dallo stesso titolo <sup>(11)</sup>, apparsa di recente su questi « Rendiconti », terminiamo l'esame del comportamento, dal centro al lembo del Sole delle righe:  $\lambda 5167,3$ – $\lambda 5172,7$ – $\lambda 5183,6$ , del tripletto verde del Magnesio. Nella I parte abbiamo descritto il materiale su cui è basata questa ricerca e parlato dei criteri seguiti per la riduzione di esso. Esponiamo ora brevemente i risultati della nostra analisi, confrontandoli anche con i risultati cui sono pervenuti altri autori.

4. PROFILI. — Nella fig. 2 abbiamo disegnato i profili, corretti dei « blends », delle  $\lambda 5172,7$  e  $\lambda 5183,6$  per i tre puntamenti:  $0^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $80^\circ$ . Non abbiamo disegnato i corrispondenti profili della  $\lambda 5167,3$ , perchè tale riga, nella zona centrale, è fortemente disturbata dalla  $\lambda 5167,5$  del Ferro.

(5) In relazione alle equazioni riducibili, alla trasformazione odografa ed alle onde semplici, vedasi ad esempio il trattato di COURANT and FRIEDRICHS, *Supersonic flow and shock waves*, 1948, pp. 37–69.

(\*) Nella seduta del 15 aprile 1957.

(11) Serie VIII, vol. XXII, fasc. 3, p. 294 (1957)

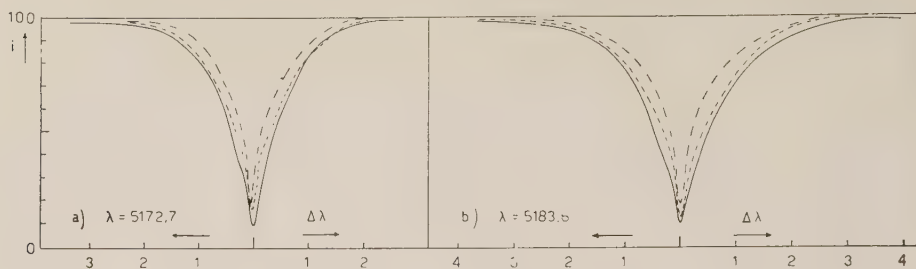


Fig. 2.

a) profili della riga  $\lambda$  5172,7 per i tre puntamenti:
$$\begin{aligned} \delta = 0^\circ & \text{ ————— } \\ \delta = 60^\circ & \text{ - - - - - } \\ \delta = 80^\circ & \text{ - . . - } \end{aligned}$$
b) profili della riga  $\lambda$  5183,6 per i tre puntamenti
$$\begin{aligned} \delta = 0^\circ & \text{ ————— } \\ \delta = 60^\circ & \text{ - - - - - } \\ \delta = 80^\circ & \text{ - . . - } \end{aligned}$$

5. INTENSITÀ CENTRALI. — Le righe del tripletto verde del Magnesio hanno origine dalle transizioni  $3^3P_0 - 4^3S_1$ ;  $3^3P_1 - 4^3S_1$ ;  $3^3P_2 - 4^3S_1$ . La teoria prevede per esse che il rapporto  $\chi_v/\sigma_v$  tra il coefficiente di assorbimento selettivo e quello per pura diffusione abbia valore molto piccolo, ma diverso da zero. In altre parole, è previsto che la riga si origini per un processo di diffusione e assorbimento selettivo insieme, pur prevalendo il primo. Infatti le intensità residue osservate, come è indicato nella Tabella III raggiungono valori molto bassi, tuttavia diversi da zero, come si verificherebbe in caso di pura diffusione.

TABELLA III.

*Intensità centrali per lo spettro del centro del Sole.*

	Fortini-Caprioli <sup>(1)</sup>	Houtgast <sup>(2)</sup>	Cherrington
5167,3 <sup>(3)</sup>	—	—	—
5172,7	10,9	6	10
5183,6	11,5	6	6

(1) Valori leggermente elevati per la presenza probabile di luce diffusa.

(2) Valori corretti per il potere risolutivo finito del reticolo.

(3) Valori omissi, essendo il centro della  $\lambda$  5167,3 fortemente disturbato dalla  $\lambda$  5167,5 del Fe.

Per le variazioni, dal centro al lembo del Sole delle stesse intensità centrali residue, le osservazioni mostrano una leggera dipendenza dalla stratificazione dell'atmosfera solare, in buon accordo, anche in questo caso, con quanto prevede la teoria. Infatti per valori di  $\chi_v/\sigma_v$  non troppo elevati, le

intensità residue centrali  $I_c(\delta)$ , per gli angoli  $\delta$  corrispondenti ai diversi puntamenti, sono date con buona approssimazione dalla relazione <sup>(12)</sup>:

$$i_c(\delta) = i_c(0) \left[ \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{3}{2} \cos \delta \right)}{1 + \beta_0 \cos \delta} \right] \sqrt{\frac{\chi_v}{\sigma_v}}$$

da cui si può notare che essendo nella regione spettrale da noi esaminata  $\beta_0 \approx 2$  <sup>(13)</sup>, le intensità residue dovranno tendere ad aumentare per puntamenti prossimi al lembo; come appunto risulta dalle osservazioni, ed è indicato nel grafico della fig. 3.

6. ALI. — Il comportamento delle ali dipende in modo considerevole dalla stratificazione dell'atmosfera solare. Nelle righe che hanno origine in strati atmosferici molto sollevati, la depressione delle ali tende ad aumentare o si mantiene presso a poco invariata fino a puntamenti per cui  $\cos \delta = 0,4$  circa. Nelle righe in cui i rapporti  $\chi_v/\chi$  e  $\sigma_v/\chi$  tra i coefficienti di assorbimento selettivo  $\chi_v$  e di diffusione  $\sigma_v$ , al coefficiente di assorbimento del continuo  $\chi$ , conservano valori diversi da zero fino a livelli ottici considerevoli, le ali hanno profondità che tendono a diminuire progressivamente dal centro verso il lembo.

Per misurare la depressione delle ali abbiamo utilizzato la nota formula di Minnaert <sup>(14)</sup>

$$i_0 - i = i \frac{C_\delta}{\Delta \lambda^2}$$

( $I_0$  intensità del continuo = 100)

e ricavati graficamente, ponendo in ascissa  $I/\Delta \lambda^2$  e in ordinata  $I_0 - I$ , i valori delle  $C_\delta$  corrispondenti ai diversi puntamenti  $\delta$  dal centro al lembo del Sole. Le  $C_\delta$  sono riportate nella Tab. IV, e i loro rapporti alla  $C_0$  corrispondente al puntamento al centro del Sole sono riportati nel grafico della fig. 4.

(12) Cfr. A. UNSOLD, « Physik der Sternatmosphären », S. 396.

(13) È il coefficiente del termine lineare della funzione di Planck sviluppata in serie secondo le potenze della profondità ottica.

(14) Cfr. M. MINNAERT, « Zs. f. Astr. », vol. X, 40 (1935).

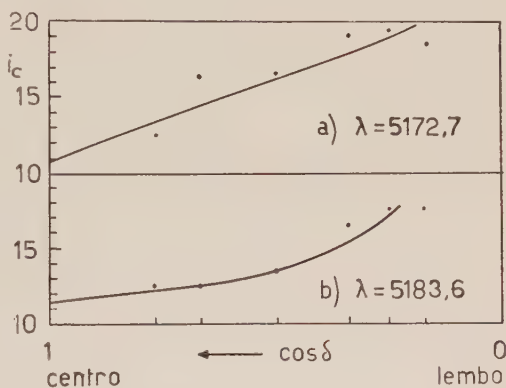


Fig. 3. — Variazione centro-lembo delle intensità centrali osservate.



TABELLA IV.  
Valori della costante  $C_\delta$ .

$C_\delta \backslash \delta$	$0^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$75^\circ$	$80^\circ$	Houtgast $0^\circ$
$\lambda 5172,7$	0,24	0,22	0,24	0,21	0,20	0,19	0,15	0,23
$\lambda 5183,6$	0,36	0,37	0,34	0,31	0,30	0,24	0,21	0,37

Le curve teoriche disegnate nel grafico, sono quelle calcolate da Houtgast<sup>(15)</sup> per  $\beta_0 = 1,75$  e per un modello atmosferico in cui le righe si originano fino a una profondità ottica  $\tau_i = 1,5$ , nei casi di assorbimento selettivo e pura diffusione. I risultati delle osservazioni di Houtgast si accordano abbastanza bene con i nostri. Essi sarebbero meglio rappresentati da curve teoriche corrispondenti a una profondità ottica  $\tau_i = 0,5$ .

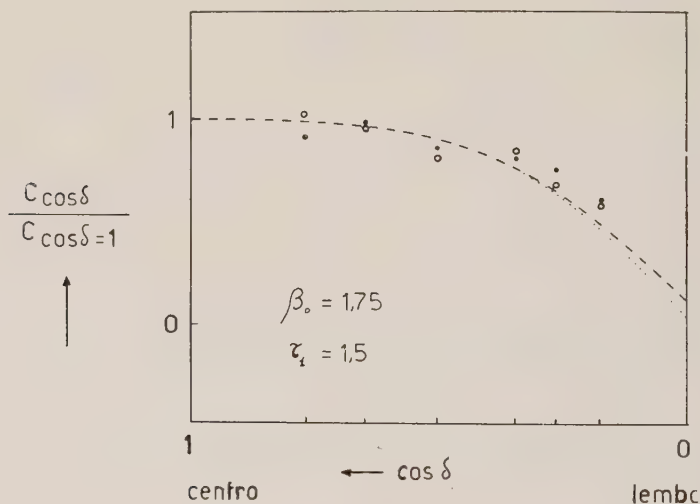


Fig. 4. - Variazione centro-lembo della costante  $C$ .

7. LARGHEZZE EQUIVALENTI. - Per valutare le larghezze equivalenti  $w$ , dopo aver corretto i « blends » graficamente, abbiamo misurato le aree racchiuse dai profili fino a intensità dell'ordine del 95 % del continuo, in unità dell'area corrispondente all'energia di  $1 \text{ \AA}$  di spettro continuo. Per le aree  $w$  racchiuse tra il continuo e il profilo della riga con intensità oltre il 95 %, ci siamo serviti della formula<sup>(16)</sup>

$$w = \sqrt{C_\delta} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{C_\delta}} \right).$$

(15) Cfr. J. HOUTGAST, *The variations in the profiles of the strong Fraunhofer lines along a radius of the solar disc*, Utrecht 1942 pg. 109.

(16) Cfr. M. MINNAERT, Mem. citata alla Nota (14).

Le  $W_\delta$  così ottenute addizionando i due risultati sono elencate nella Tabella V.

TABELLA V.  
*Larghezze equivalenti.*

$W_\delta$ \ $\delta$	0°	40°	50°	60°	70°	75°	80°	Houtgast 0°	Righini 0°
$\lambda$ 5167,3	0,97	0,97	1,00	1,00	0,86	0,86	0,81	0,86	—
$\lambda$ 5172,6	1,37	1,25	1,18	1,18	1,05	1,05	0,93	1,41	1,34
$\lambda$ 5183,6	1,65	1,63	1,56	1,47	1,42	1,43	1,10	1,77	1,58

In conclusione, ricordando che questa nostra ricerca è basata quasi esclusivamente sull'analisi di una lastra soltanto, possiamo considerarci abbastanza soddisfatti dell'accordo tra i nostri risultati e quelli di Houtgast e altri autori. Non vogliamo trattenerci per il momento sulle conclusioni che possono ricavarsi da questi risultati. Ci riserviamo di ritornare eventualmente sull'argomento, riprendendo in esame il comportamento delle tre righe in questione, come quello di righe già studiate o di altre che ci proponiamo ancora di studiare.

*Errata:* Nella I parte di questa Nota, vol. XXII, fasc. 3, p. 298, alla ottava e decima riga leggere Tabella II anziché Tabella I.

**Fisica.** — *Sulla reazione fotonucleare  $Mo^{100}(\gamma, p)Nb^{99}$*  (\*). Nota (\*\*) di FILIPPO FERRERO, ALFRED OLAF HANSON (\*\*\*), RENATO MALVANO, CARLO TRIBUNO, presentata dal Socio G. COLONNETTI.

1. INTRODUZIONE. — In un gran numero di elementi si è trovato che la fotoemissione di protoni risulta particolarmente elevata in rapporto a quanto ci si potrebbe aspettare in base al modello a due stadi delle reazioni nucleari. Si comprende quindi come lo studio di questi tipi di reazioni possa essere particolarmente interessante per la interpretazione dell'intimo meccanismo delle reazioni fotonucleari <sup>(1)</sup>.

Il  $Mo^{100}$  è un nucleo particolarmente adatto a questo scopo sia perché le reazioni  $(\gamma, n)$  e  $(\gamma, p)$  danno entrambe origine a nuclidi radioattivi, sia

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica nell'Università — Torino. Istituto Nazionale di Fisica Nucleare — Sez. di Torino.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 17 giugno 1957.

(\*\*\*) Università di Illinois (USA).

(1) D. H. WILKINSON, « Amsterdam Conf. on Nuclear Reactions » Physica, 22, 1039 (1936).

perché l'attività ( $\gamma, p$ ) è circa 100 volte maggiore di quanto voluto dal modello statistico.

Questo lavoro rappresenta l'estensione fino a 30 MeV delle misure sull'emissione di fotoprotoni dal  $\text{Mo}^{100}$  (2).

2. RISULTATI SPERIMENTALI. - Un campione di 40 mg di questo elemento, puro al 90 % dell'isotopo  $\text{Mo}^{100}$ , depositato su un sottile foglio di alluminio di spessore non superiore a 2 mg/cm<sup>2</sup>, viene irradiato per 2' con i raggi X del betatrone, e l'attività risultante del  $\text{Nb}^{99}$  ( $T_{1/2} = 2,5''$ ) viene contata mediante un contatore Geiger a finestra frontale sottile ( $\approx 3$  mg/cm<sup>2</sup>).

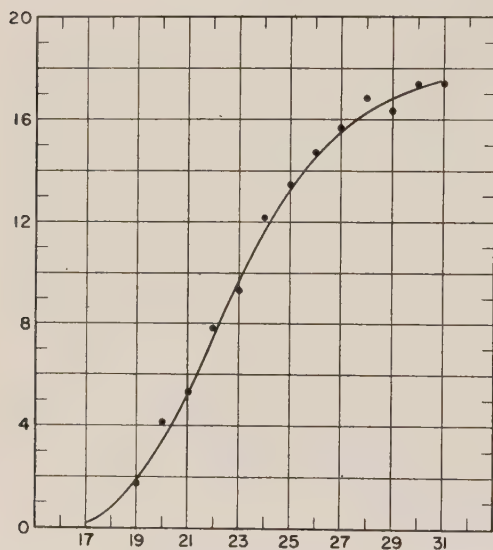


Fig. 1.

La dose in  $r$  di radiazione viene misurata a mezzo di una camera di ionizzazione a parete spessa di alluminio, la quale ha una risposta quasi proporzionale all'energia totale del fascio (3). In fig. 1 è mostrata la curva di attivazione con i punti sperimentali. L'analisi di questa curva con il metodo della differenza dei fotoni (4) permette di ricavare la sezione d'urto del processo ( $\gamma, p$ ), riportata in fig. 2. Nella stessa figura è riportata, per confronto, la sezione d'urto per reazione ( $\gamma, n$ ).

Questo esperimento definisce, quindi, chiaramente due massimi separati per le sezioni d'urto nelle reazioni ( $\gamma, n$ ) e ( $\gamma, p$ ) nel  $\text{Mo}^{100}$ . Inoltre il valore assoluto delle due sezioni d'urto permette di calcolare i valori delle sezioni d'urto integrate fino a 30 MeV, che risultano

$$1,5 \pm 0,2 \quad ; \quad 0,1 \pm 0,02 \quad ; \quad (\text{Mev-barn})$$

per le reazioni ( $\gamma, n$ ) e ( $\gamma, p$ ) rispettivamente.

3. DISCUSSIONE. - Per quanto sia possibile spiegare la diminuzione di sezione d'urto della reazione ( $\gamma, n$ ) col crescere di importanza della reazione ( $\gamma, 2n$ ), l'emissione di protoni risulta tuttavia troppo elevata per venir spiegata in base ad un normale modello statistico.

(2) DUFFIELD, HSIAO, SLOTH, « Phys. Rev. », 79, 1011 (1950); W. A. BUTLER, G. M. ALMY, « Phys. Rev. », 91, 58 (1953).

(3) F. FERRERO, R. MALVANO, C. TRIBUNO, « Nuovo Cimento », 5, 510 (1956).

(4) L. KATZ, A. G. CAMERON, « Can. Jour. of Phys. », 29, 518 (1951).

Infatti il valore misurato della sezione d'urto integrata può venir paragonato con il valore massimo di circa 2 MeV-barn ottenuto sia per confronto con altri elementi della stessa massa, sia dalla relazione teorica <sup>(5)</sup>

$$0,06 NZ (1 + 0,8 X)/A$$

quando si ponga, come sembra plausibile, il fattore di scambio  $X = 1/2$ .

Resterebbe da assegnare quindi alla sezione d'urto integrata per reazioni  $(\gamma, 2n)$ ,  $(\gamma, np)$ ... soltanto 0,4 MeV-barn. Ora calcolando l'emissione di fotoprotoni con il modello di Wilkinson, si trova che il 10 % soltanto delle transizioni possono dar luogo a fotoprotoni.

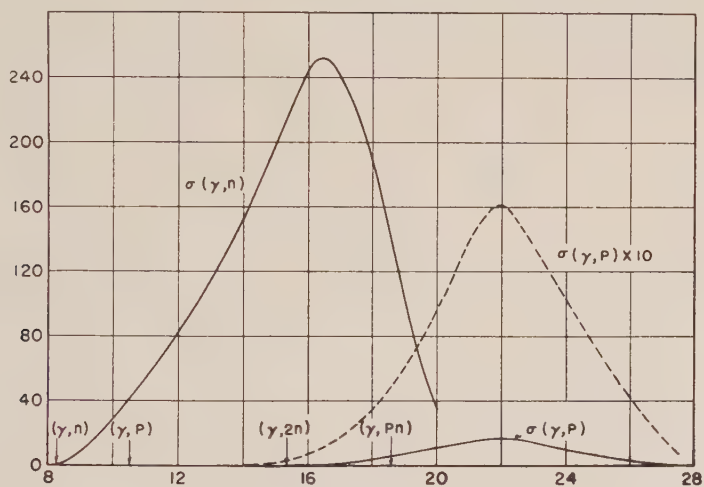


Fig. 2.

Se la restante parte delle transizioni conducesse ad eccitazione statica del nucleo, si produrrebbe essenzialmente la reazione  $(\gamma, 2n)$ , dato che la soglia di questa reazione si trova a circa 15 MeV. Sfortunatamente, però, questa reazione conduce al  $\text{Mo}^{98}$ , stabile, e quindi non rivelabile con metodi radioattivi.

Comunque è interessante notare che la sezione d'urto integrata totale, anche trascurando il contributo alla reazione  $(\gamma, 2n)$  della risonanza  $(\gamma, n)$  posta a 17 MeV, sarebbe di circa 2,5 MeV-barn: valore molto superiore ai 2 MeV-barn previsto dalla regola della somma per transizioni di dipolo elettrico.

Si dovrà quindi spiegare il rimanente assorbimento di almeno 0,5 MeV-barn in qualche altro modo, ad esempio tenendo conto delle transizioni di quadrupolo elettrico.

(5) J. S. LEVINGER, M. A. BETHE, « Phys. Rev. », 78, 115 (1950).



**Fisica.** — *Su un nuovo isotopo del bismuto.* Nota <sup>(\*)</sup> di SERGIO DE BENEDETTI, UGO FARINELLI, FILIPPO FERRERO, RENATO MALVANO, GABRIELE PELLI, CARLO TRIBUNO, presentata dal Socio G. COLONNETTI.

Il bismuto che si trova in natura è composto di un solo isotopo, di numero di massa 209. Tra gli isotopi che si possono produrre artificialmente con reazioni nucleari non figura finora nelle tavole il Bismuto 208. Tale isotopo si deve evidentemente formare come prodotto di vari tipi di reazioni (decadimento  $\alpha$  dell'At<sup>212</sup>, reazione  $(n, 2n)$  sul bismuto naturale) ed in particolare

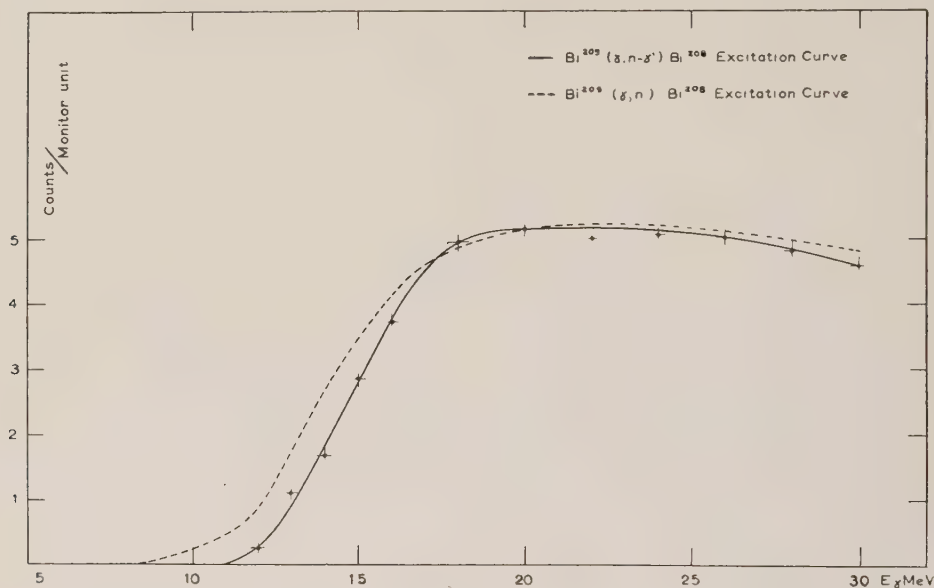


Fig. 1.

nella fotodisintegrazione del Bi<sup>209</sup>; tuttavia nessuna sicura testimonianza diretta della sua formazione era stata finora trovata.

È sembrato perciò interessante stabilire se un isomero di vita media breve ( $T_{1/2} = 2 \text{ ms}$ ) che era stato osservato da Vegors e Axel <sup>(1)</sup> eccitando il bismuto con raggi  $\gamma$ , dovesse essere attribuito ad uno stato eccitato del Bi<sup>209</sup> o del Bi<sup>208</sup>. Il criterio seguito per l'assegnazione di questa attività è stato quello di studiarne la curva di eccitazione, che presenta delle caratteristiche molto diverse a seconda che lo stato eccitato provenga da una reazione  $(\gamma, n)$  o da una reazione  $(\gamma, \gamma')$  <sup>(2)</sup>.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1957.

(1) S. H. VEGORS, P. AXEL, « Phys. Rev. », 101, 1067 (1956).

(2) Cfr. per esempio A. J. BUREAU, C. L. HAMMER, « Phys. Rev. », 105, 1006 (1957); L. MEYER-SCHÜTZMEISTER, V. L. TELEGDI, « Phys. Rev. », 104, 185 (1956).

L'attività, eccitata con raggi X fino a 30 MeV del betatrone dell'Istituto di Fisica dell'Università di Torino, è stata misurata tra un impulso e l'altro della macchina per mezzo di un rivelatore a scintillazione connesso ad un analizzatore di tempo a 5 canali. Particolare cura è stata impiegata nello schermare l'apparecchiatura di conteggio, specialmente dai neutroni ritardati.

I risultati ottenuti sono riportati in fig. 1, dove è mostrata in unità arbitrarie la curva di eccitazione dello stato isomerico; nella stessa figura è riportata a tratto la curva di eccitazione della reazione  $(\gamma, n)$  nel  $\text{Bi}^{209}$ ; le due curve sono pressoché uguali, salvo uno spostamento della soglia corrispondente abbastanza bene all'energia dello stato isomerico rispetto a quello fondamentale (circa 1,4 MeV in due raggi  $\gamma$  presumibilmente in cascata (1)). La curva non si adatterebbe affatto a rappresentare l'eccitazione di un processo  $(\gamma, \gamma')$ , e se ne deve concludere che lo stato isomerico appartiene al  $\text{Bi}^{208}$ .

Una misura di confronto dell'attività isomerica con quella di una sorgente tarata di radiazione di annichilamento ha permesso di misurare la probabilità che questo stato eccitato si formi nella reazione  $(\gamma, n)$ ; tale probabilità è risultata dell'ordine dell'1,5 %.

Successivamente sono state eseguite delle misure che escludono la possibilità di decadimento dello stato fondamentale del  $\text{Bi}^{208}$  con vite medie tra 5 e 30 s; vite medie per decadimento  $\beta$  tra 30 s e circa 500 anni erano già state escluse precedentemente (3), mentre vite medie inferiori a 5 s sono da escludere in base a considerazioni energetiche; anche da escludersi è un decadimento  $\alpha$  con vita media inferiore a  $10^{10}$  anni e quindi pare assodato che il  $\text{Bi}^{208}$ , non trovandosi in natura, debba subire decadimento  $\beta$  con vita media molto lunga. Questo potrebbe essere dovuto ad un elevato valore dello spin dello stato fondamentale (conformemente alle previsioni del modello a shell). Si sta ora cercando di stabilire quale debba essere il valore di questo spin con misure di correlazione angolare tra i due raggi  $\gamma$  in cascata nell'isomero osservato.

(3) H. M. NEUMANN, I. PERLMAN, « Phys. Rev. », 81, 958 (1951).

**Chimica.** — *Equilibri acido-base*. Nota IV: *Azofenil-piridine* (\*).  
Nota (\*\*) di ANTONIO FOFFANI e MARIA REGINA FOFFANI, presentata  
dal Corrisp. G. SEMERANO.

È stato recentemente [1] posto in evidenza, per le azofenil-piridine isomere, un interessante parallelismo tra i meccanismi di monossidazione e di protonizzazione. Il centro più basico della molecola, cui si lega il primo protone, risulta infatti essere l'azoto piridinico, e ad esso si lega anche il primo atomo di ossigeno, purché, come nel caso dell'isomero 4-, la differenza di densità elettronica agli azoti piridinico e azoico sia così accentuata da impedire un concomitante attacco ossidante al centro azoico della molecola; questo secondo caso si verifica per l'isomero 2-, mentre l'isomero 3-, nel quale è impedita la coniugazione azogruppo-anello piridinico, si ossida in modo notevolmente più lento.

Tale meccanismo è in accordo con i risultati delle misure spettrofotometriche di  $pK$  di Klotz et al. [2], i quali hanno potuto dimostrare, in contrasto con quanto in precedenza generalmente ammesso, che nei derivati paradimetilaminici (all'anello benzenico) delle azofenil-piridine il primo protone si lega all'azoto piridinico, il secondo a quello aminico, il terzo a quello azoico; l'azoto piridinico in posizione 4- risulta inoltre notevolmente più basico ( $pK_a = 5,8$ ) di quello in posizione 2- ( $pK_a = 4,5$ ) (da confrontare col valore  $pK_a = 5,2$  [3] per la piridina non sostituita).

Abbiamo ora esaminato spettrofotometricamente, in soluzioni tampone comprese in un ampio intervallo di  $pH$ , le azofenil-piridine non sostituite<sup>(1)</sup>, onde verificare se tale posizione relativa e separazione dei valori di  $pK$  per gli isomeri 2- e 4- si mantenga anche per esse, e quindi se la influenza del gruppo  $-N(CH_3)_2$  sulla basicità dell'azoto piridinico sia la stessa nei due casi. Le modalità di misura furono già descritte in precedenza [4]; a pari  $pH$ , vennero esaminati gli spettri in differenti soluzioni tampone (si usarono tamponi secondo Mc Ilvaine e Britton [5], ed altri all'acetato, borato, fosfato e italato, sempre a forza ionica 0,05), onde rivelare eventuali influenze specifiche del tampone, come in effetti si osservò; in ambiente fortemente acido si impiegarono soluzioni di  $H_2SO_4$ , valutandone l'acidità secondo L. Michaelis e S. Granick [6]; il solvente era acqua-etanolo al 10 % di etanolo (solo per le misure con azobenzene si usò acqua-etanolo al 50 %), la temperatura  $25,00 \pm 0,05$  °C, la concentrazione degli azocomposti  $5 \cdot 10^{-4}$  mole/litro. Per la preparazione e l'esame spettrale delle soluzioni si operò sempre in luce rossa, onde escludere eventuali effetti fotochimici, ad esem-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Padova.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 17 giugno 1957.

(1) Ringraziamo vivamente il prof. M. Colonna ed il dott. A. Risaliti per l'interesse mostrato alle presenti misure e per averci gentilmente fornito gli azocomposti in esame.

pio isomerizzazione *cis-trans*; i composti esaminati erano nelle forme *trans* e, dati i limiti di precisione richiesti, non vennero ulteriormente trattati per l'eliminazione di eventuali impurezze *cis*.

Vennero anzitutto eseguite misure di confronto con azobenzene; da  $pH \sim 12$  (soluzioni di KOH) fino ad  $H_2SO_4 \sim 7\text{ N}$  ( $pH = -1,7$ ) non si osservarono sensibili variazioni nello spettro, in accordo con i risultati di Klotz et al. [2]: per la banda di coniugazione azogruppo-anello benzenico si trovò  $\lambda_{\max} = 320 \pm 2\text{ m}\mu$ ,  $\lg a_{\max} = 4,23 \pm 0,03$  [7]. Anche la 3-azofenilpiridina mostrò, fino a  $pH = -1,7$ , uno spettro indipendente dal  $pH$ :  $\lambda_{\max} = 321 \pm 2\text{ m}\mu$ ,  $\lg a_{\max} = 3,92 \pm 0,02$ . Per  $pH = -3,1$  ( $H_2SO_4 \sim 12\text{ N}$ ) si osservò che, per l'isomero 4-, lo spettro misurato immediatamente dopo la dissoluzione della sostanza coincideva con quelli misurati in soluzioni di  $H_2SO_4$  men concentrate; tale spettro variava però rapidamente nel tempo (fatto già precedentemente [8] riscontrato anche per l'isomero 2-), e tale variazione era apprezzabile già dopo 20'-30' dalla dissoluzione; comunque, la costanza fino a questa acidità dello spettro delle soluzioni fresche mostra che il processo di protonizzazione al gruppo azoico non è ancora rivelabile nell'intorno di  $pH = -3,1$ , e deve quindi attuarsi in un intervallo di  $pH$  notevolmente più acido che per l'azobenzene (per quest'ultimo si ha  $pK_a = -2,5$  [2]); ciò è in accordo col carattere elettron-attrattivo del gruppo piridinico.

La protonizzazione all'azoto piridinico si attua, per gli isomeri 2- e 4-, nel campo di  $pH$  da 1, a 4, e dà luogo, come già in precedenza osservato [8], ad un notevole spostamento della banda di coniugazione azogruppo-anello piridinico verso le frequenze minori (da 322 a 352  $m\mu$  per l'isomero 2-, da 312 a 335  $m\mu$  per l'isomero 4-). Come accennato prima, si osservò talvolta un sensibile effetto specifico del tampone, nel senso che, a pari  $pH$ , l'intensità della banda risultò sensibilmente dipendente dal tipo di tampone impiegato, pur essendone invece del tutto indipendente la posizione spettrale; l'effetto di specificità risultò minimo per i tamponi Mc Ilvaine, ed è con essi che si ottennero i migliori risultati anche dal punto di vista dell'intensità della banda, con un punto isosbastico abbastanza ben definito, specialmente per lo isomero 2-.

L'esame dell'intervallo di  $pH$  in cui la banda slitta verso le frequenze minori consente, per entrambi i composti, di dedurre con ragionevole approssimazione i seguenti valori di  $pK_a$ :  $pK_a = 2,0$  per l'isomero 2-,  $pK_a = 3,5$  per l'isomero 4-. Il confronto con i corrispondenti valori per la piridina e per i derivati paradimetilaminici (ved. sopra) mette in evidenza il forte effetto elettron-attrattivo dell'azogruppo, e mostra come l'azione opposta del gruppo paradimetilaminico sia pressoché la stessa nelle due posizioni (da 2,0 a 4,5 rispettivamente da 3,5 a 5,8); quest'ultimo fatto è ragionevole, data anche la notevole distanza del gruppo  $-N(CH_3)_2$  dall'anello piridinico [2]. Le presenti misure confermano in ogni caso l'interpretazione parallela dei fenomeni di protonizzazione e monossidazione, sopra menzionata, ed andranno utilmente confrontate con eventuali dati cinetici sui processi ossidativi stessi.



## BIBLIOGRAFIA.

- [1] COLONNA M., RISALITI A. et al., « Gazz. Chim. Ital. », 85, 1148, 1508 (1955); 86, 288, 698, 705, 1067 (1956); 87, 120 (1957); « Ann. Chim. », 56, 1037, 1050 (1956); « Boll. sci. fac. chim. ind. Bologna », 15, 1 (1957).
- [2] KLOTZ I. M. et al., « J. Am. Chem. Soc. », 75, 4159 (1953); 76, 5136 (1954); ved. anche ROGERS M. T., CAMPBELL T. W. e MAATMAN R. W., « J. Am. Chem. Soc. », 73, 5122 (1951); JAFFÈ H. H., « J. Chem. Phys. », 21, 415 (1953); BADGER G. M., BUTTERY R. G. e LEWIS G. E., « J. Chem. Soc. », 1888 (1954).
- [3] Ved. ad esempio ALBERT A., GOLDACRE R. e PHILLIPS J., « J. Chem. Soc. », 2242 (1948); HALL N. F. e SPRINKLE M. R., « J. Am. Chem. Soc. », 54, 3478 (1932).
- [4] FOFFANI A. et al., « Ricerca Sci. », 26, 2409, 2474 (1956); 27, Suppl., 115 (1957).
- [5] ELVING P. J., MARKOWITZ J. M. e ROSENTHAL I., « Anal. Chem. », 28, 1179 (1956); COCH FRUGONI J. A., « Gazz. Chim. Ital. », 87, 403 (1957).
- [6] « J. Am. Chem. Soc. », 64, 1861 (1942).
- [7] Ved. ad esempio COSTA G., « Gazz. Chim. Ital. », 85, 548 (1955), e citazioni ivi riportate; KORTÜM G., « Z. physik. Chem. », 50 B, 361 (1941).
- [8] COLONNA M. e RISALITI A., « Gazz. Chim. Ital. », 85, 1148 (1955).

**Chimica.** — *Comportamento polarografico di N-ossidi aromatici.* Nota V: *Su alcuni N-ossidi 2-aril-chinolinici*<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> di ANTONIO FOFFANI e ELENA FORNASARI, presentata dal Corrisp. G. SEMERANO.

È stato recentemente posto in evidenza [1] il manifestarsi di effetti caratteristici per introduzione di un arile nella posizione 2- dell'anello eterociclico dell'N-ossido di chinolina. Mentre infatti quest'ultima sostanza (e così pure gli N-ossidi di 2- e 4-fenil-piridina) ha il normale comportamento di un N-ossido aromatico, l'N-ossido di 2-fenil-chinolina e quello dell'atophan si comportano in modo singolare: vengono facilmente ridotti, come gli N-ossidi alifatici, dall'idrato ferroso e dall'anidride solforosa, e d'altra parte la variazione caratteristica del loro spettro elettronico con l'acidità del mezzo si spiega ammettendo che la coniugazione fenile-anello piridico prevalga su quella ossigeno-anello piridico; si avrebbe in tal modo, in accordo col comportamento rispetto agli agenti riducenti, un indebolimento del legame N-O, come è stato confermato da misure polarografiche [2].

Se però l'arile in posizione 2- è (come nel caso dell'N-ossido di 2-mesitil-chinolina) di natura tale da impedire, presumibilmente per effetto sterico, la coniugazione fenile-anello piridico, ricompaiono in gran parte le proprietà di N-ossido aromatico; lo stesso effetto si manifesta se (come per l'N-ossido di 2-fenil-3-metil-chinolina) si introduce nell'anello piridico

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università e Centro di Studio per la Polarografia del C.N.R., Padova.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 17 giugno 1957.

un altro sostituyente in posizione tale da produrre un analogo impedimento spaziale.

Le presenti misure hanno permesso di confermare, attraverso il confronto dei potenziali di semigradino, tale interpretazione basata su un meccanismo competitivo di effetti coniugativi. I potenziali di semigradino dei due ultimi N-ossidi menzionati risultano infatti nettamente più negativi di quello dell'N-ossido di 2-fenil-chinolina, pur non raggiungendo ancora quelli degli altri N-ossidi chinolinici e fenil-piridinici. È presumibile che anche la frequenza vibrazionale (e quindi la costante di forza) del legame N-O manifesti analoghe variazioni a seconda che sia attivo un tipo o l'altro di coniugazione; in particolare, nel caso dell'N-ossido di 2-fenil-chinolina è prevedibile una diminuzione della frequenza N-O (come ad es. per l'N-ossido di 4-metossi-piridina [3]), assumendo in questo caso il legame un carattere prevalente di legame semplice; riferiremo in seguito su misure di questo tipo.

TABELLA I.

pH	2-mesitil-chin. N-oss		2-fenil-3-metil-chin. N-oss.	
	$I_d$	$\pi_{1/2}^{(1)}$	$I_d$	$\pi_{1/2}^{(1)}$
2,5	1,78	-0,709	2,13	-0,625
4,5	1,68	-0,838	2,09	-0,766
6,0	1,77	-0,934	1,97	-0,850
6,5	1,77	-0,977	2,06	-0,879

(1) In volt risp. all'E.C.S.

Le misure vennero eseguite nelle condizioni in precedenza descritte [2] <sup>(1)</sup>, in soluzione di acqua-etanolo al 50%. Dai dati di tabella I, riferentisi ad una concentrazione di N-ossido di circa  $2 \cdot 10^{-4}$  mole/litro, risulta la linearità della dipendenza del potenziale di semigradino dal pH, per pH da 2,5 a 6,5; le pendenze di detti diagrammi sono, per il 2-mesitil- e 2-fenil-3-metil-derivato, rispettivamente -0,067 e -0,065 volt per unità di pH. La costante di corrente di diffusione  $I_d$  appare indipendente sia dal pH (nell'intervallo cui si riferisce la Tab. I) che dalla concentrazione (per valori da  $2 \cdot 10^{-4}$  a  $12 \cdot 10^{-4}$  mole/litro): i valori medi sono  $I_d = 1,8 \pm 0,1$  per il 2-mesitil- e  $I_d = 2,1 \pm 0,1$  per il 2-fenil-3-metil-derivato; tali valori appaiono in buon accordo con i precedenti risultati per l'N-ossido di chinolina (v. [2 a], Tab. IV), e vennero confermati da ulteriori misure eseguite a scopo di controllo, sempre

(1) Ringraziamo vivamente il prof. M. Colonna ed il dott. A. Risaliti per averci fornito i composti in esame e per utili discussioni nel corso del lavoro.

in soluzione idroalcolica, sui 2-fenil- e 6-metossi-derivati <sup>(2)</sup>:  $I_d = 2,1 \pm 0,15$  per il 2-fenil-,  $I_d = 1,9 \pm 0,05$  per il 6-metossi-; il valore più alto (circa 2,6) in precedenza (ved. [2 b], Tabella I) riportato per il 2-fenil-derivato sembra presumibilmente da attribuire ad un errore di concentrazione o di sensibilità galvanometrica, data anche la buona concordanza dei corrispondenti valori dei potenziali di semigradino.

TABELLA II.

*Potenziale di semigradino per alcuni N-ossidi piridinici e chinolinici.*

N-ossido di	$\pi_{1/2}$ <sup>(1)</sup>
piridina . . . . .	— 0,897
ortocarbossi-pir. . . . .	— 0,585
metacarbossi-pir. . . . .	— 0,645
paracarbossi-pir . . . . .	— 0,490
2-fenil-pir. . . . .	— 0,633
4-fenil-pir. . . . .	— 0,633
2-azofenil-pir. . . . .	— 0,907
2-azossifenil-pir. . . . .	— 0,951
chinolina . . . . .	— 0,669
chinolina <sup>(2)</sup> . . . . .	— 0,707
6-metossi-chin. . . . .	— 0,584
6-metossi-chin. <sup>(2)</sup> . . . . .	— 0,633
2-fenil-chin. <sup>(2)</sup> . . . . .	— 0,370
2-mesitil-chin. <sup>(2)</sup> . . . . .	— 0,542
2-fenil-3-metil-chin <sup>(2)</sup> . . . . .	— 0,463

(1) I valori sono in volt risp. all'E.C.S., estrapolati a pH zero e misurati per una concentrazione di  $2 \cdot 10^{-4}$  mole/litro.

(2) Valori in soluzione acqua-etanolo al 50 %.

Vennero anche ripetute misure sul 6-metossi-derivato in soluzione acquosa, onde ottenere, per confronto con i dati precedenti sull'N-ossido di chino-

(2) Quest'ultimo composto era stato in precedenza [2] riportato per errore come N-ossido di 5-metossi-chinolina.

lina, valori più approssimati per i fattori empirici di passaggio (per la  $I_d$  ed i potenziali) da ambiente acquoso ad ambiente misto: si ottenne  $I_d = 3,0 \pm \pm 0,05$ , in accordo con i dati precedenti (ved. [2 b], Tabella I); ciò mostra che il valore  $I_d = 3,7$  prima attribuito al 6-metossi-derivato in ambiente acido (ved. [2a], Tabella IV) era effettivamente un valore singolarmente troppo elevato. Il valore medio del rapporto tra le  $I_d$  in acqua ed in acqua-etanolo 50% risulta (ved. Tabella II) dell'ordine di  $1,6 \pm 0,1$ ; anche lo slittamento verso valori più negativi del potenziale al passaggio da acqua ad acqua-etanolo risulta dello stesso ordine di grandezza nei due casi esaminati (ved. Tabella II): il valore medio è -0,044 volt.

La Tabella II riporta, a titolo di confronto riassuntivo, i potenziali di semigradino degli N-ossidi finora esaminati, estrapolati a  $pH$  zero e riferiti ad una concentrazione di sostanza riducibile di  $2 \cdot 10^{-4}$  mole/litro; ove necessario, i valori sono stati corretti per tener conto dell'influenza della concentrazione sul potenziale di semigradino, nei casi in cui tale influenza apparve superiore all'errore di misura. L'esame dei valori di Tabella II per gli N-ossidi chinolinici conferma ancora il carattere singolare dell'N-ossido di 2-fenil-chinolina, con legame N-O a basso ordine di legame, e starebbe a mostrare che, in accordo col suo comportamento spettrale in mezzo acido [1], il metile in posizione 3- nel sistema chinolinico impedirebbe solo parzialmente la coniugazione dell'arile col nucleo eterociclico, conferendo alla molecola del 2-fenil-3-metil-derivato un carattere intermedio tra il 2-fenil-derivato, chiaramente simile agli N-ossidi alifatici, e l'N-ossido di chinolina, tipicamente aromatico. Sarà interessante al riguardo lo studio degli spettri infrarossi.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] COLONNA M. e RISALITI A., « *Ricerca sci.* », 24, 2351 (1954); 26, 2512, 2782 (1956); « *Rend. accad. naz. Lincei* », Classe sci. fis. mat. e nat. [VIII] 11, 268 (1951); 14, 809 (1953); « *Boll. sci. fac. chim. ind. Bologna* », 10, 157 (1952); 15, 1 (1957); « *Gazz. Chim. Ital.* », 83, 58 (1953); « *Ann. Chim.* », 44, 1029 (1954).
- [2] FOFFANI A., FORNASARI E. e GRANDI F., a) « *Ricerca sci.* », 26, Suppl., 156 (1956); b) idem 166 (1956).
- [3] COSTA G. e BLASINA P., « *Z. physik. Chem. Neue Folge* », 4, 24 (1955); 7, 123 (1956); « *Chimica Industria* », 39, 396 (1957).



**Chimica delle fermentazioni.** — *Ricerche sul metabolismo ossidativo microbico dell'antracene e fenantrene.* — I. *Formazione di acidi ossinaftoici* (\*). Nota (\*\*) di CESARINA COLLA, CARLA BIAGGI e VITTORIO TRECCANI, presentata dal Socio L. CAMBI.

Lo studio della mineralizzazione delle sostanze a carattere steroidico ed in particolare degli idrocarburi e loro derivati, che da alcuni anni si conduce nel nostro Istituto, ha mostrato, unitamente alle ricerche di altri Autori, che il metabolismo ossidativo delle sostanze aromatiche ha inizio con una idrossilazione per rottura di un doppio legame. In particolare per il benzolo ed alcuni suoi derivati <sup>(1)</sup>, per la naftalina <sup>(2-4)</sup> e le naftaline sostituite <sup>(5-8)</sup> tale idrossilazione è seguita dalla rottura dell'anello in cui l'idrossilazione si è prodotta giungendo, nel caso del benzolo e derivati, ad un acido bicarbosilico a catena aperta (acido cis-cis muconico) e, nel caso delle naftaline, ad acidi monociclici. Per le naftaline sostituite è stato inoltre dimostrato che l'attacco microbico ha inizio nell'anello non sostituito.

Partendo da queste considerazioni ci è sembrato interessante estendere l'indagine agli idrocarburi aromatici a tre anelli benzenici e precisamente all'antracene e al fenantrene.

Autori diversi <sup>(9-11)</sup> hanno precedentemente dimostrato che il fenantrene e l'antracene vengono metabolizzati da varie forme microbiche; tuttavia non ci risulta siano state fatte ricerche per chiarire il metabolismo ossidativo di tali sostanze, a parte quelle di Tausson <sup>(9)</sup> il quale ritenne che la saligenina fosse un intermedio del metabolismo del fenantrene per il solo fatto che tale sostanza veniva utilizzata da un microrganismo capace di moltiplicarsi in presenza di fenantrene.

(\*) Lavoro eseguito nella Sezione Microbiologica del Centro di Studio per la Chimica e la Microbiologia delle Fermentazioni - Consiglio Nazionale delle Ricerche (Istituto di Microbiologia Agraria e Tecnica. Università di Milano).

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1957.

(1) C. ARNAUDI, L. CANONICA e V. TRECCANI, « La Ricerca Scientifica », 25, 3244 (1955).

(2) N. WALKER, G. H. WILTSHIRE, « J. Gen. Microbiol. », 8, 273 (1953).

(3) V. TRECCANI, « Ann. Microbiologia », 5, 232 (1953).

(4) V. TRECCANI, N. WALKER, G. H. WILTSHIRE, « J. Gen. Microbiol. », 11, 341 (1954).

(5) N. WALKER, G. H. WILTSHIRE, « Atti VI Congresso Internazionale Microbiologia », 1, 114 (1953).

(6) N. WALKER, G. H. WILTSHIRE, « J. Gen. Microbiol. », 12, 478 (1955).

(7) V. TRECCANI, A. FIECCHI, « Atti IX Congresso Nazionale Microbiologia », Palermo (1956).

(8) L. CANONICA, A. FIECCHI e V. TRECCANI, « Istituto Lombardo (Rend. Sc.) », 91, 119 (1957).

(9) W. O. TAUSSON, « Planta », 5, 239 (1928).

(10) F. D. SISLER, C. E. ZOBELL, « Science », 106, 521 (1947).

(11) E. BONETTI, « La Ricerca Scientifica », 26, 779 (1956).

## METODI.

Le forme microbiche usate nel presente lavoro sono state isolate da fanghi di trivellazione dei pozzi petroliferi e annotate da Bonetti<sup>(12)</sup> come *ceppo B* capace di metabolizzare, fra l'altro, sia l'antracene che il fenantrene, e *ceppo D* che utilizza solo il fenantrene. Le loro caratteristiche morfologiche e colturali permettono di ascriverle al genere *Flavobacterium*.

*Condizioni colturali.* — Le colture per lo studio dei prodotti metabolici dell'antracene e del fenantrene sono state allestite in terreno colturale esclusivamente minerale<sup>(12)</sup> in cui tali sostanze rappresentavano le uniche fonti di carbonio, in fermentatori da 20 lt. di capacità, simili a quelli descritti da Chain et al.<sup>(13)</sup>, in cui l'ossigenazione viene assicurata mediante un sistema di aerazione a vortice.

*Prodotti richiesti.* — Gli acidi 2,3- e 2,1-ossinaftoici sono prodotti Fluka purificati mediante cristallizzazione da benzolo o da acqua.

*Estrazioni dalle colture dei prodotti metabolici.* — La coltura, addizionata di idrato sodico sino a reazione nettamente alcalina, viene saturata con NaCl e si separa per filtrazione il precipitato di fosfato tricalcico conglobante la massa microbica e l'idrocarburo non metabolizzato. Il filtrato viene estratto ripetutamente con etere e quindi, dopo acidificazione con HCl al rosso congo, riestratto pure ripetutamente con porzioni di circa 300 cc. di etere. Questo secondo estratto eterico viene agitato con diverse porzioni di una soluzione al 3 % di NaHCO<sub>3</sub> e da tale estratto alcalino, concentrato a piccolo volume, si precipitano gli acidi per acidificazione con HCl.

Il precipitato di fosfato tricalcico, acidificato, viene estratto a sua volta ripetutamente con etere. Anche da quest'ultimo si separa la frazione acida per ripetute agitazioni con soluzione di NaHCO<sub>3</sub>.

## RISULTATI SPERIMENTALI.

*Metabolismo ossidativo dell'antracene.* — Nelle colture del *ceppo B* in presenza di antracene non si è mai osservata positiva la reazione dei fenoli con 2,6-diclorochinonecloroimide; tuttavia i residui delle estrazioni eteriche eseguite in ambiente alcalino danno positiva tale reazione solo dopo trattamento a caldo con HCl secondo la metodica descritta da Boyland et al.<sup>(14)</sup>. Dopo 5-6 giorni di incubazione i liquidi colturali danno con FeCl<sub>3</sub> una reazione cromatica verde blu.

(12) W. O. TAUSSON, « *Planta* », 4, 214 (1927).

(13) E. B. CHAIN, S. PALADINO, F. UGOLINI, D. S. CALLOW, J. VAN DER SLUIS, « *Rendiconti Istituto Superiore di Sanità* », 17, 1164 (1954).

(14) E. BOYLAND, D. MANSON, J. B. SOLOMON, G. H. WILTSHIRE, « *Biochem. J.* », 53, 420 (1953).

Le estrazioni eseguite a questo stadio colturale portano alla separazione di una frazione acida (mg 262 da 60 lt di coltura). Tale frazione acida, dopo precipitazione per acidificazione della soluzione sodica, viene cristallizzata da benzolo e da acqua ottenendosi un prodotto in aghi di color citrino pallido. Il prodotto così ottenuto viene riportato in soluzione sodica, trattato con carbone attivo e, dopo acidificazione, estratto con etere. L'estratto etero, portato a secco, viene cristallizzato da benzolo ottenendosi aghi pressoché bianchi a p. f. 217-218°C non depresso in miscela con l'acido 2,3-ossinaftoico di confronto. All'analisi:

trov. %	C 70,30	H 4,48
per $C_{11}H_8O_3$ calc.	70,21	4,29.

Alla cromatografia su carta (Whatman n. 1), fase mobile butanolo saturato con  $NH_4OH$  0,5 N, sviluppo con  $FeCl_3$  al 0,1 %, il prodotto isolato dà un'unica macchia ( $R_f$  0,54) indentica anche per il colore a quella dell'acido 2,3-ossinaftoico di confronto.

*Metabolismo ossidativo del fenantrene.* - Nelle colture del ceppo *D* in presenza di fenantrene si è osservata, entro le prime trenta ore di incubazione, molto debolmente positiva la reazione dei fenoli con 2,6-diclorochinoneclo-roimide. Successivamente risulta positiva la reazione con  $FeCl_3$  che assume una colorazione blu.

Le estrazioni, eseguite a questo stadio di coltura, portano alla separazione di una frazione acida; essa, dopo cristallizzazione da benzolo o acqua, trattamento con carbone della soluzione alcalina, riestrazione con etere e cristallizzazione da benzolo del residuo etero, dà lunghi aghi bianchi a p. f. 199°C., costante anche dopo ripetute cristallizzazioni che non viene depresso in miscela con l'acido 2,1-ossinaftoico di confronto. All'analisi:

trov. %	C 70,47	H 4,60
per $C_{11}H_8O_3$ calc.	70,21	4,29.

Alla cromatografia su carta, eseguita con le modalità già descritte, il prodotto isolato presenta, dopo sviluppo con  $FeCl_3$ , una unica macchia ( $R_f$  0,54) identica anche per il colore a quella dell'acido 2,1-ossinaftoico di confronto <sup>(15)</sup>.

#### CONCLUSIONI.

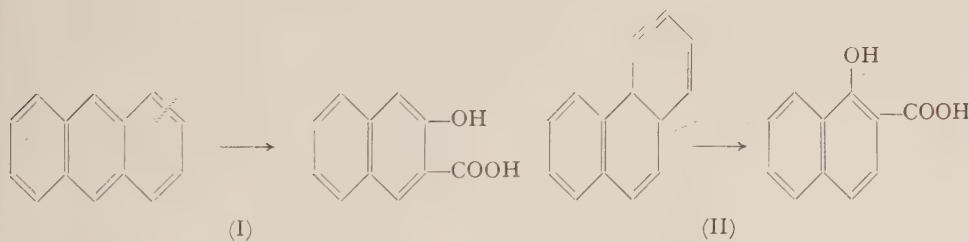
Le nostre esperienze hanno portato all'isolamento ed alla identificazione dell'acido 2,3-ossinaftoico dalle colture con antracene, mentre da quelle con fenantrene è stato isolato l'acido 2,1-ossinaftoico. Per analogia con lo schema

(15) Si ringrazia vivamente l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano per l'esecuzione delle analisi elementari dei prodotti isolati.

ossidativo delle naftaline sostituite<sup>(5-8)</sup>, si può ritenere, con una certa sicurezza, tali acidi intermedi rispettivamente dell'antracene e del fenantrene. In particolare la formazione dell'acido 2,1-ossinaftoico dal fenantrene segue un processo del tutto parallelo a quello della formazione degli acidi 4-cloro e 4-metilsalicilico e degli acidi 3-cloro e 3-metilsalicilico a partire dalle naftaline sostituite rispettivamente in  $\beta$  ed in  $\alpha$ .

La positività, dopo trattamento con HCl a caldo, della reazione con 2,6-diclorochinonecloroimide dei residui delle estrazioni eseguite dopo le prime ore di incubazione, induce a ritenere che l'attacco microbico di questi idrocarburi abbia inizio con un processo di idrossilazione analogo a quello riscontrato per la naftalina.

Boyland e Levi<sup>(16-17)</sup>, Young<sup>(18)</sup> e Boyland e Wolf<sup>(19)</sup> hanno isolato l'1,2-diidro-1,2-diossiantracene dalle urine di animali trattati con antracene, mentre nelle urine degli animali alimentati con fenantrene identificarono sia il 9,10-diidro-9,10-diossifenantrene che l'1,2-diidro-1,2-diossifenantrene. Ora l'analogia suddetta tra il metabolismo microbico delle naftaline sostituite e quello dell'antracene e fenantrene giustifica l'ipotesi che tali processi metabolici abbiano inizio con la formazione di 1,2-diidroantracene-1,2-diolo, per l'antracene (I), analogamente a quanto si riscontra negli animali, mentre per il fenantrene l'eventuale diolo dovrebbe formarsi in posizione 3,4 (II). Non possiamo escludere a priori la formazione del 1,2-diidrofenantrene-1,2-diolo; tuttavia la rottura dell'anello aromatico in tale posizione dovrebbe portare, sempre per analogia con le naftaline sostituite, alla formazione dell'acido 1,2-ossinaftoico.



Sono tuttora in corso esperienze sia per dimostrare, con prove manometriche, che gli acidi isolati dalle colture sono effettivamente prodotti intermedi, sia per individuare le fasi iniziali e finali di tali metabolismi.

(16) E. BOYLAND, A. A. LEVI, « Biochem. J. », 29, 2679 (1935).

(17) E. BOYLAND, A. A. LEVI, « Biochem. J. », 30, 728 (1936).

(18) L. YOUNG, « Biochem. J. », 41, 417 (1947).

(19) E. BOYLAND, G. WOLF, « Biochem. J. », 42, XXXII (1948).



**Mineralogia.** — *Su una particolare trasformazione sperimentale di lherzolite.* Nota (\*) di RENATO PELLIZZER, presentata dal Corrisp. C. ANDREATTA.

A prosecuzione delle ricerche sulle trasformazioni sperimentali alle condizioni pneumatolitiche e idrotermali di rocce ofiolitiche appenniniche, ho esteso le indagini su peridotiti lherzolitiche. Ciò nell'intento di realizzare quelle trasformazioni che in natura hanno portato alla serpentinizzazione di tali rocce.

Nell'Appennino Emiliano gli affioramenti delle suddette ultrafemiti si trovano soprattutto nella parte più settentrionale, in particolare nell'Appennino Piacentino, ove esistono diversi affioramenti in cui è possibile riconoscere con indagini petrografiche i graduali passaggi dalle peridotiti ai serpentini veri e propri.

Il materiale adoperato per le ricerche oggetto della presente nota proviene da un affioramento nell'alta val Nure in località Lobbia. La roccia si presenta compatta e resistente, costituita da una massa apparentemente microcristallina di colore verde cupo tendente al nero, in cui sono immersi fenocristalli mostranti piani incrociati di facile sfaldatura.

Al microscopio si osserva ancor meglio la struttura porfirica: i fenocristalli sono per lo più costituiti da pirosseni del tipo iperstene e clinopierstene con un contenuto in  $\text{Fe SiO}_3$  del 39 % circa; infatti da determinazioni eseguite su vari preparati risultano per  $\gamma$  valori compresi tra 1,705 e 1,723. In quantità subordinata sono presenti pirosseni di composizione augitica. La massa fondamentale è costituita da olivina del tipo crisolite con la tipica microstruttura a maglie per la presenza di fessure irregolari lungo le quali si nota l'inizio di una trasformazione in antigorite. Nella massa si riconoscono inoltre individui cristallini piuttosto sviluppati di picotite con smistamento laterale di ossidi di ferro. La roccia in definitiva è una tipica peridotite lherzolitica con inizio di trasformazione serpentinosa.

Le ricerche sperimentali sono state condotte con i criteri, l'apparecchiatura e metodologia di indagine da me in precedenza adottati per le ricerche su altre rocce della formazione ofiolitica e descritti in una Nota pubblicata nei Rendiconti della Società Mineralogica Italiana (1).

Sono state eseguite diverse esperienze nell'intento di ricercare le condizioni atte a realizzare la completa trasformazione lherzolite-serpentino.

Non si è ottenuta tale trasformazione «sensu stricto», ma è stato piuttosto realizzato uno schema di trasformazione che ritengo opportuno segnalare in quanto fa parte di quelli esistenti in natura riconosciuti con indagini

(\*) Pervenuta all'Accademia il 7 agosto 1957.

(1) R. PELLIZZER, *Trasformazioni sperimentali alle condizioni pneumatolitiche e idrotermali di rocce ofiolitiche appenniniche*, «Rend. Soc. Min. It.», vol. XIII, 1957.

petrografiche su rocce peridotitiche. Si tratta della trasformazione olivina-bowlingite e più generalmente olivina-minerali tipo bowlingite e cloriti.

Le esperienze in autoclave che hanno portato a tale risultato sono state condotte alle seguenti condizioni:

soluzioni:  $\text{H}_2\text{O}$  ;  $\text{H}_2\text{O} + (\text{NH}_4\text{HCO}_3 + \text{NH}_4\text{OCONH}_2)$ ;

pH delle soluzioni: 5,6 ; 8;

pressioni massime: 210 Kg/cm<sup>2</sup> ; 260 Kg/cm<sup>2</sup> ; 300 Kg/cm<sup>2</sup>;

temperature massime:  $420 \pm 10^\circ\text{C}$  ;  $500 \pm 10^\circ\text{C}$  ;  $680 \pm 10^\circ\text{C}$ ;

tempo complessivo per ciascuna esperienza: 8 giorni.

I risultati sono stati analoghi tanto con soluzione a pH 5,6 quanto con soluzioni a pH 8. Le due soluzioni residuali hanno raggiunto valori di pH analoghi (8,45; 8,6; 8,75) dopo ciascuna esperienza, il che può far supporre una tendenza a raggiungere un equilibrio di ambiente indipendente dalle condizioni iniziali.

Una evoluzione delle trasformazioni si può riconoscere per le diverse condizioni di temperatura e pressione, nel senso che al variare di tali fattori si ottiene per un uguale tempo di attività pneumo-idatogena una reazione quantitativa e qualitativa della trasformazione, sempre nell'ambito dello schema soprariportato. Così alle condizioni di più alta temperatura e pressione si ha la più intensa trasformazione.

Dalle osservazioni microscopiche sui campioni di roccia sottoposti all'azione pneumo-idatogena risulta:

a) alle condizioni di più bassa temperatura e pressione si ottiene un ulteriore sviluppo della microstruttura a maglie con allargamento ed estensione delle forme bacillari e liste il cui intreccio determina il motivo cellulare; ciò interessa vaste plaghe della superficie utilizzata nella esecuzione della sezione sottile. I prodotti di neoformazione sono di difficile identificazione per l'insufficienza dei dati rilevabili a causa anche delle piccolissime dimensioni dei cristallini. Ciò nonostante si possono ritenere con buona approssimazione mescolanze di minerali tipo bowlingite e di cloriti;

b) alle condizioni di più alta temperatura e pressione si ottiene una più intensa trasformazione, nel senso che il processo di sostituzione è tale da trasformare l'insieme in una massa fibrolamellare costituita da prodotti di neoformazione tipo bowlingite in cui sono immersi cristalli di olivina (vedi figg. 1 e 2). Per la bowlingite si riconoscono caratteri in accordo con quelli descritti nella letteratura per tale minerale, quali le relazioni di orientazione rispetto all'olivina, i possibili valori della rifrazione e della birifrazione, nonché il colore e lo schema di pleocroismo (quest'ultimo scarsamente apprezzabile) ed infine il carattere fibrolamellare dell'aggregato cristallino. I cristalli residuali di olivina hanno contorni frastagliati ed affatto netti in quanto esistono passaggi graduali fra minerale primario e minerali di neoformazione (vedi figg. 1 e 2). I pirosseni mostrano pure evidenti segni di trasformazione, meno intensi comunque di quelli delle olivine;

c) alle condizioni intermedie si ottengono risultati intermedi.

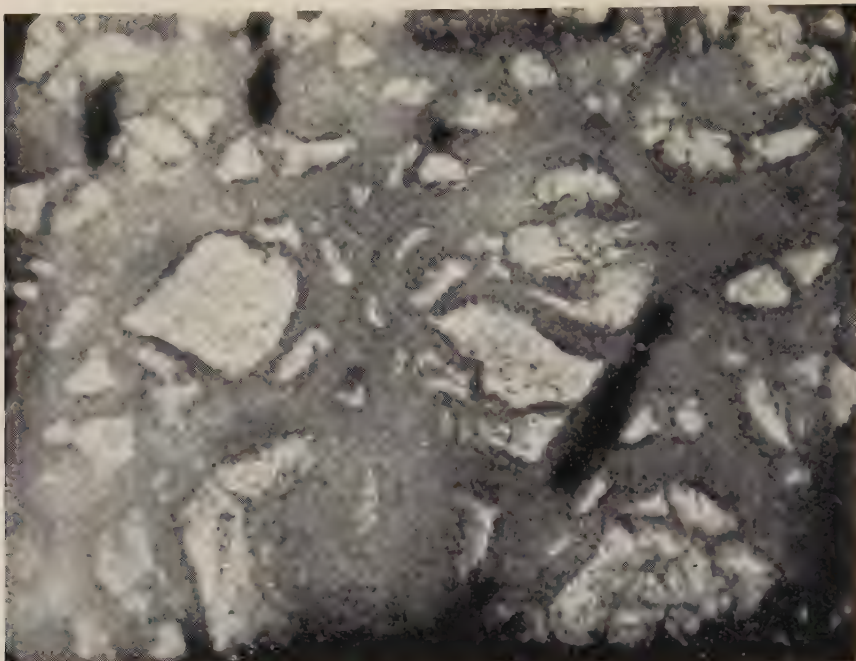


Fig. 1. - Relitti di olivina immersi in una massa fibrolamellare di bowlingite  
Solo pol.: ingr. lin. 300.

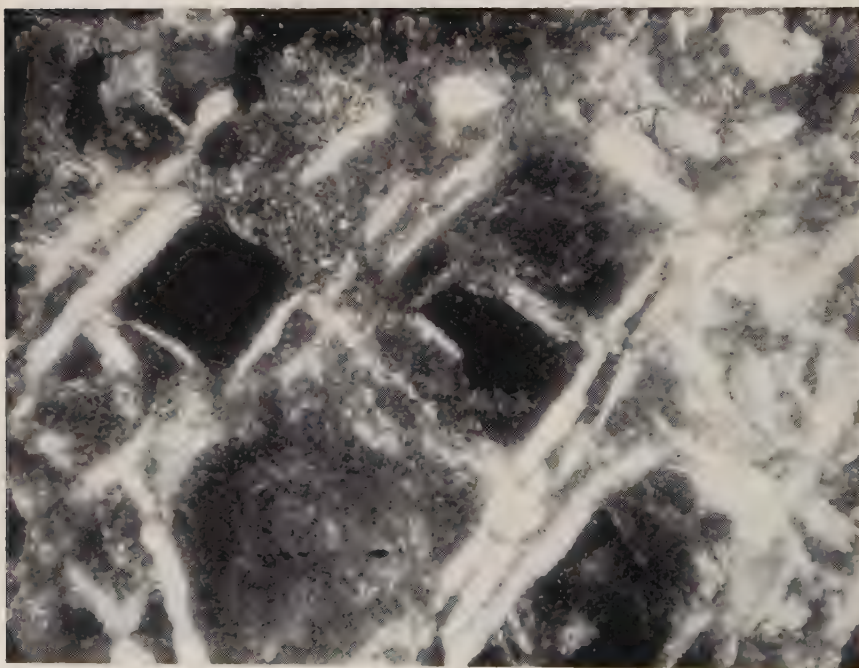


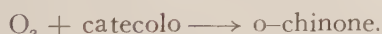
Fig. 2. - Figura 1 a nicols incrociati. Ingr. lin. 300.



Da quanto sopra esposto si può concludere che l'azione pneumo-idatogena su rocce peridotitiche alle condizioni riferite determina quei processi di mobilizzazione in situ di materia che si sono riconosciuti in natura e che l'intensità della mobilizzazione dipende essenzialmente dai fattori fisici. Difficile è precisare le condizioni limiti di equilibrio ed impossibile quindi ogni interpretazione e tanto meno generalizzazione al di là dei risultati ottenuti. Questi possono costituire soltanto utili riferimenti nell'ambito dei problemi di ordine più generale relativi agli equilibri chimico-fisici del metamorfismo pneumatolitico-idrotermale sulle rocce oggetto delle ricerche sopra riferite.

**Biochimica.** — *Il sistema fenolasi-chinone reduttasi nei Cefalopodi* (\*). Nota di ANNA GHIRETTI-MAGALDI, ANTONIO GIUDITTA e FRANCESCO GHIRETTI, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

L'ipotesi che le fenolossidasi possano agire come ossidasi terminali nella respirazione dei tessuti si basa sulla capacità dei chinoni di formare un sistema reversibile di ossido riduzione. Infatti i chinoni (in particolare gli ortochinoni) che si formano per ossidazione enzimatica dei fenoli, sono composti altamente reattivi i quali o si ossidano ulteriormente con formazione di sostanze brune complesse, o possono essere ridotti a difenoli ad opera di numerosi agenti chimici come i nucleotidi piridinici, l'acido ascorbico, gli amino acidi <sup>(1)</sup>. Fin dal 1938 Kubowitz <sup>(2)</sup>, usando un estratto di lievito, aveva trovato che il TPNH prodotto dalla glucoso-6-fosfato deidrogenasi riduceva rapidamente l'ortochinone a catecolo. Più recentemente Wosilait e Nason <sup>(3)</sup> hanno dimostrato che tale riduzione avviene enzimaticamente ad opera di una chinone reduttasi che è stata trovata in molte piante superiori, muffe, lievito, batteri e nel sangue e nei tessuti di alcuni mammiferi. Questi Autori sono riusciti anche ad accoppiare la chinone reduttasi, oltre che con la fenolasi, con la lacasi e l'ascorbico ossidasi. Un sistema enzimatico che potrebbe intervenire nella respirazione terminale dei tessuti può essere pertanto così schematizzato:



(\*) Lavoro eseguito nel Reparto di Fisiologia della Stazione Zoologica di Napoli, con un contributo (RG-4845) del National Institutes of Health, United States Public Health Service.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) H. S. MASON, « *Advanc. Enzymol.* », 16, p. 105 (1955); W. O. JAMES e al., « *Biochem. J.* », 43, pp. 626, 636 (1948); H. JACKSON e L. P. KENDAL, « *Biochem. J.* », 44, p. 477 (1949).

(2) F. KUBOWITZ, « *Biochem. Z.* », 299, p. 32 (1938).

(3) W. D. WOSILAIT e A. NASON, « *J. Biol. Chem.* », 206, pp. 255, 271 (1954)



Le due reazioni sono catalizzate rispettivamente da una fenolasi e dalla chinone reduttasi. Il di- o tri-fosfopiridin nucleotide viene a sua volta ridotto da uno dei numerosi enzimi piridinici (alcol deidrogenasi, lattico deidrogenasi, glucoso-6-fosfato deidrogenasi) che partecipano al metabolismo cellulare. Questo sistema è inibito dal cianuro e dall'ossido di carbonio; però l'inibizione da CO non è sensibile alla luce.

In questa Nota riferiamo i risultati di esperimenti eseguiti per stabilire l'esistenza nei Cefalopodi di un sistema fenolasi-chinone reduttasi, anche se la partecipazione di esso alla respirazione terminale sembra sia da escludere, come è indicato da esperimenti precedenti <sup>(4)</sup>. Infatti la presenza dei citocromi e ancor più la sensibilità alla luce della inibizione da ossido di carbonio sulla respirazione di molti tessuti esaminati fanno ritenere che le ossidasi terminali sono soltanto quelle ferro-porfiriniche.

#### ESPERIMENTI E RISULTATI.

*Attività fenolasica degli organi.* - La presenza di fenolasi nella ghiandola del nero dei Cefalopodi e la sua funzione nella genesi delle melanine sono note da molto tempo. Nel 1933 Califano <sup>(5)</sup> estrasse dalla ghiandola del nero di Seppia un enzima che ossida la tirosina e altri monofenoli. Il lungo periodo di induzione che precede l'ossidazione viene diminuito o abolito da quantità catalitiche di difenoli <sup>(6)</sup>.

L'esistenza di numerose proteine a rame nei tessuti, alcune delle quali sono state recentemente isolate <sup>(7)</sup>, può far pensare che la presenza di fenolasi non sia limitata alla ghiandola del nero. Abbiamo pertanto esaminato la capacità di molti tessuti di ossidare i fenoli in varie condizioni sperimentali. I risultati degli esperimenti manometrici sono stati sempre negativi. Né la tirosina e altri monofenoli né i difenoli in posizione orto, meta e para venivano ossidati dagli estratti crudi o dalle varie frazioni proteiche contenenti rame da essi isolate. Il consumo di ossigeno non era mai più alto di quello dei controlli eseguiti con quantità equivalenti di rame inorganico aggiunte al liquido delle vaschette al posto dei tessuti.

*Attività fenolasica dell'emocianina.* - La capacità dell'emocianina di ossidare i fenoli venne dimostrata per la prima volta da Bhagvat e Richter <sup>(8)</sup> in Helix e nei Crostacei. Questi AA. parlarono di attività pseudofenolossidasi della emocianina in analogia con l'attività pseudoperossidasi della emoglobina.

Per i nostri esperimenti abbiamo usato emocianina di *Octopus vulgaris* preparata per ultracentrifugazione. L'emolinfa, raccolta dall'animale ancora

(4) A. GHIRETTI-MAGALDI, A. GIUDITTA e F. GHIRETTI, « Rend. Accad. Lincei » (1957).

(5) L. CALIFANO, « Pubblic. Staz. Zool. Nap. », 13, p. 289 (1933).

(6) L. CALIFANO e D. KERTÉSZ, « Enzymologia », 6, p. 233 (1939).

(7) E. ROCCA, (Esperimenti in corso).

(8) K. BHAGVAT e D. RICHTER, « Biochem. J. », 32, p. 1397 (1938).

vivo, dopo centrifugazione a  $600 \times g$  per allontanare i linfociti, era dializzata per 24 ore contro acqua corrente e poi contro acqua distillata. Il piccolo precipitato bianco che si forma era rimosso per centrifugazione. Il 98 % del peso secco della soluzione limpida è composto di emocianina <sup>(9)</sup>. Questa veniva separata per ultracentrifugazione alla Spinco a  $108.000 \times g$ .

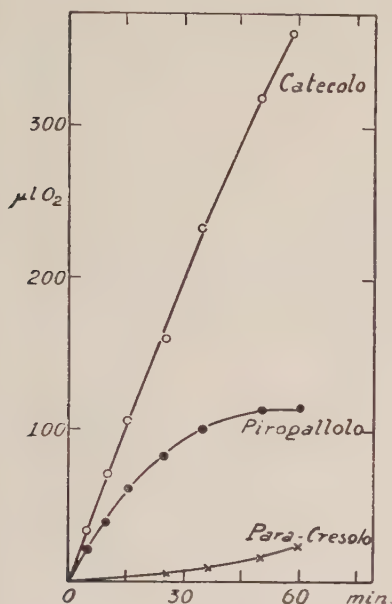


Fig. 1. - Attività fenolasica dell'emocianina. Ossidazione di mono-, di- e poli-fenoli.

Substrati  $30 \mu M$  in tampone di fosfato  $0,01 M$  a pH 7,0. Emocianina  $8,75 mg$ ,  $t = 25^\circ C$ . L'ossidazione spontanea del substrato è stata sottratta. Ascisse: tempo in minuti; ordinate: consumo di ossigeno.

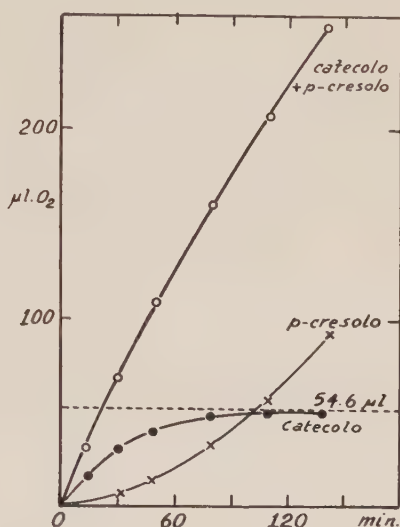


Fig. 2. - Attività fenolasica dell'emocianina. Ossidazione di monofenoli in presenza di quantità catalitiche di difenolo.

Emocianina  $17,5 mg$ ; p-cresolo  $30 \mu M$ ; catecolo  $2,4 \mu M$ . Puffer di fosfato  $0,01 M$  pH 7,0. Ascisse: tempo in minuti; ordinate: consumo di ossigeno.

L'emocianina di *Octopus* ossida attivamente il catecolo con formazione di pigmenti bruni. L'ossidazione dei monofenoli è assai più lenta e comincia solo dopo un periodo di induzione che viene abolito dall'aggiunta di quantità catalitiche di difenolo (figg. 1 e 2). L'attività fenolasica è inibita dal cianuro e scompare se si allontana il rame dalla proteina.

L'attività fenolasica dell'emocianina di *Octopus* sembra in tutto analoga a quella della fenolasi della ghiandola del nero e di altre fenolasi di origine animale e vegetale. Ricordiamo che l'ossidazione dei fenoli, catalizzata da ioni rame, presenta caratteristiche di specificità del tutto diverse <sup>(10)</sup>.

(9) F. GHIRETTI, « Arch. Biochem. », 63, p. 165 (1956).

(10) J. R. GILLETTE, D. WATLAND e G. KALNITSKY, « Biochim. Biophys. Acta », 15, p. 526 (1954); « Biochim. Biophys. Acta », 16, p. 51 (1955).

*Attività chinone reduttasica degli organi.* - Questa è stata determinata spettrofotometricamente seguendo l'ossidazione del DPNH a 340 m $\mu$  in presenza di estratto acellulare di organi preparato mediante omogenizzazione e centrifugazione a freddo. 0,45  $\mu$ M di para-chinone erano aggiunti al tempo zero alla cuvetta del Beckman contenente 2,7 ml di tampone fosfato 0,1 M pH 6,5 e 0,3  $\mu$ M di DPNH e le letture della diminuzione della densità ottica erano prese per 3 minuti a intervalli di 30 secondi.

Il DPNH era preparato mediante riduzione del DPN con alcool deidrogenasi e precipitazione come sale di Tris <sup>(11)</sup>. L'alcool deidrogenasi era preparata dal lievito col metodo di Racker <sup>(12)</sup>.

La formazione contemporanea di idrochinone era seguita anche spettrofotometricamente leggendo l'aumento di densità ottica a 290 m $\mu$ . Una unità di chinone reduttasi è la quantità di enzima che produce una diminuzione di densità ottica a 340 m $\mu$  di 0,001 per minuto calcolata in base alle letture prese fra 15 e 45 secondi. L'attività specifica è il numero di unità osservate diviso per i mgr di proteina usati. La concentrazione proteica dell'estratto era determinato in base all'assorbimento a 280 m $\mu$  <sup>(13)</sup>.

I risultati ottenuti per vari organi di *Octopus vulgaris* sono riportati nella Tabella I. Le attività maggiori sono state trovate nei reni, nelle branchie e nei cuori branchiali; esse sono dello stesso ordine di grandezza di quelle trovate da Wosilait e Nason per i semi di pisello, i reni di coniglio e il cuore di maiale (116, 635 e 300 rispettivamente).

#### CONCLUSIONI.

I risultati di questi esperimenti dimostrano che i tessuti dei Cefalopodi contengono un enzima capace di ridurre i chinoni in presenza di DPNH. Se questa chinone reduttasi insieme alle fenolasi possa partecipare alla

TABELLA I.

*Attività chinone reduttasica degli organi*  
di «*Octopus vulgaris*» (attività per mgr di proteina).

Rene . . . . .	284
Branchia . . . . .	200
Cuore branchiale . . . . .	127
Ghiandola salivare . . . . .	65
Pelle . . . . .	42
Muscolo . . . . .	41
Ganglio ottico . . . . .	27
Epatopancreas . . . . .	5

(11) F. A. LOEWUS, F. H. WESTHEIMER e B. VENNESLAND, « J. Amer. Chem. Soc. », 75, p. 5018 (1953).

(12) E. RACKER, « J. Biol. Chem. », 184, p. 313 (1950).

(13) O. WARBURG e W. CHRISTIAN, « Biochem. Z. », 310, p. 384 (1942); H. KALCKAR, « J. Biol. Chem. », 167, p. 461 (1947).

respirazione terminale dei tessuti non sappiamo. Ricordiamo che i tessuti di *Octopus* contengono un sistema di citocromi assai simile a quello dei mammiferi e del lievito, attraverso il quale avviene il trasporto degli elettroni dal substrato all'ossigeno. I risultati degli esperimenti di inibizione sulla respirazione degli organi con ossido di carbonio al buio e alla luce escludono l'intervento, almeno nelle normali condizioni fisiologiche, di sistemi respiratori diversi da quelli ferroporfirinici. Il significato della presenza di questa chinone reduttasi nei Cefalopodi, specie in alcuni organi (rene, branchie, cuori branchiali), richiede pertanto ulteriori ricerche.

**Biochimica.** — *Sulla Biochimica della fermentazione citrica da parte dell'«Aspergillus niger»*. Nota (\*) di VITTORIO MORET e MARIA LORINI, presentata dal Corrisp. A. RONCATO.

È noto che l'accumulo di acido citrico in un mezzo colturale, oltre che dal ceppo, dipende anche dalle condizioni ambientali. Uno stesso ceppo di *Aspergillus niger*, che si dimostra buon produttore di ac. citrico se viene coltivato in un terreno carente di certi elementi nutritivi (per esempio terreno di Bernhauer, carente in sali azotati e fosfati), non ne accumula se viene coltivato in un terreno completo (per esempio liquido di Raulin). In quest'ultimo caso la muffa ossida lo zucchero presente nel terreno ad  $H_2O + CO_2$ . Questa interdipendenza fra le condizioni ambientali colturali (soprattutto carenze nutritive) e l'accumulo di ac. citrico fa ritenere che tale accumulo sia conseguenza di uno stato « patologico » della muffa stessa cioè di una alterazione del suo metabolismo.

Circa il meccanismo biochimico della fermentazione citrica, è oggi opinione quasi generale che la biossidazione citrica a carico dei glicidi inizi seguendo la via anossidativa alcoolica con formazione di alcool etilico, il quale verrebbe poi ossidato ad ac. acetico.

Tuttora discordi sono invece gli Autori circa il meccanismo della successiva trasformazione dell'acido acetico ad acido citrico.

Secondo alcuni Autori sarebbe operante anche in queste muffe capaci di produrre acido citrico, così come nei tessuti animali e nei vegetali superiori, il ciclo degli acidi tricarbossilici di Krebs; secondo altri sarebbe invece operante il ciclo degli acidi bicarbossilici di Thunberg-Knoop.

Ambedue gli schemi si basano su prove sperimentali, eseguite soprattutto con gli isotopi [1-5], ma in questi ultimi anni un maggior numero di ricerche sono a favore dell'intervento del ciclo di Krebs.

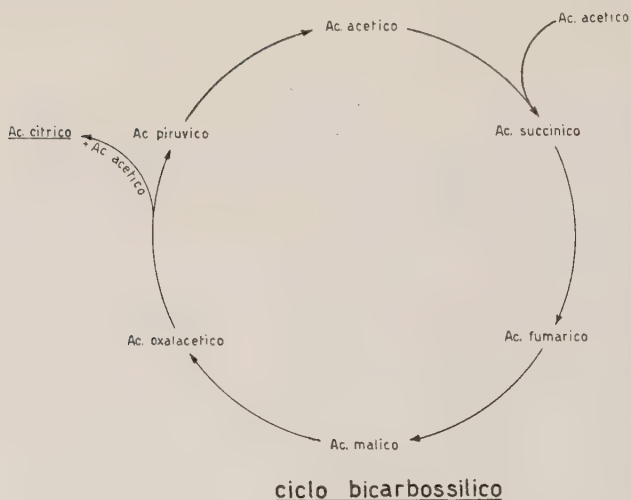
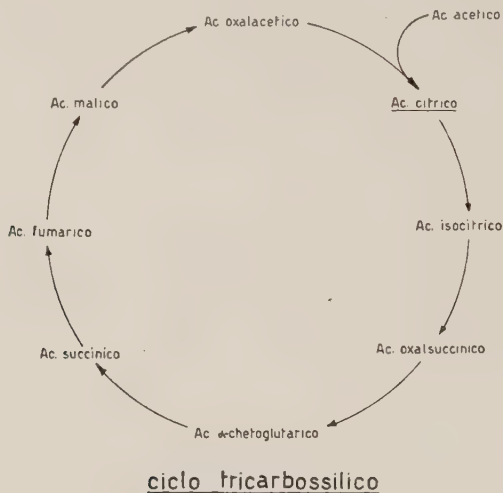
Secondo lo schema bicarbossilico, l'acido citrico evidentemente si accumula perché è un prodotto finale del metabolismo, collaterale al ciclo.

(\*) Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1957.



Secondo lo schema tricarbossilico invece, l'acido citrico è un metabolita intermedio del ciclo.

Lo scopo della nostra ricerca è stato appunto quello di vedere anzitutto se nel ceppo selezionato di *Asp. niger* preso in esame e adatto alla fermentazione citrica, era possibile mettere in evidenza, con una tecnica semplice



qual'è quella manometrica, l'esistenza della « citrico-deidrasi »<sup>(1)</sup>, che compare nello schema tricarbossilico a valle dell'acido citrico, ed evidentemente non in quello bicarbossilico.

Inoltre abbiamo voluto vedere se nello stesso ceppo, coltivato in condizioni ambientali adatte all'accumulo di acido citrico si verificasse una deficienza di tale attività citrico-deidrasica, responsabile della demolizione

(1) Per « citrico-deidrasi » intendiamo l'insieme dei due enzimi: aconitasi (catalizzante l'equilibrio ac. citrico  $\rightleftharpoons$  isocitrico) e isocitrico-deidrasi, deidrogenante l'ac. isocitrico.

ossidativa dell'acido citrico, rispetto a quella della succino-deidrasasi, enzima a monte dell'acido citrico.

Infatti è evidente che per spiegare, secondo lo schema tricarbossilico, l'accumulo di acido citrico nel mezzo, bisogna ammettere che nelle condizioni colturali in cui tale accumulo si verifica, la velocità di demolizione ossidativa dell'acido citrico debba essere minore di quella di formazione. In altre parole, a valle dell'acido citrico deve verificarsi qualche deficienza o inibizione nel sistema enzimatico cicloforasico, per cui l'acido citrico via via che si forma, si accumulerebbe nel mezzo, perchè non può venire ossidato con la stessa velocità con la quale viene sintetizzato.

D'altra parte, poiché nelle condizioni colturali in cui si accumula l'acido citrico, generalmente non si ha contemporaneo accumulo di ac. ossalacetico, malico e fumarico, la velocità delle reazioni enzimatiche che portano alla formazione dell'acido citrico, a nostro parere, poteva essere indicata dalla attività succino-deidrasica, così come l'attività citrico-deidrasica poteva essere presumibilmente quella limitante la velocità della sua demolizione ossidativa.

Per questo, dopo aver stabilito le condizioni ottimali per l'attività succino- e citrico-deidrasica, abbiamo confrontato fra loro queste due attività nello stesso ceppo di *Asp. niger* coltivato in un terreno (Bernhauer) adatto all'accumulo di acido citrico, e in un terreno (Raulin) non adatto a tale accumulo.

#### PARTE SPERIMENTALE.

Abbiamo utilizzato un ceppo di *Asp. niger* adatto alla produzione di acido citrico, fornitoci dalla American Type Culture Collection.

Una sospensione acquosa di spore veniva inoculata nel terreno colturale (Bernhauer o Raulin) e fatta germinare in termostato a 37° (coltura superficiale). Dopo 30-38 ore il micelio veniva raccolto e nel terreno veniva dosato l'acido citrico col metodo di Saffran [6].

Dopo abbondante lavaggio con acqua distillata neutra, il micelio veniva asciugato con carta da filtro, triturato con sabbia di quarzo e sospeso in tampone fosfato M/15 pH = 7,3. Tutte le operazioni venivano eseguite a 0-4°C. Si otteneva un omogenato il cui supernatante, dopo centrifugazione, veniva utilizzato nelle esperienze manometriche (Warburg) a 30°C, per misurare rispettivamente l'attività della citrico-deidrasasi e della succino-deidrasasi.

In ogni vaschetta manometrica si usava un volume di estratto contenente, a seconda delle esperienze, da 1 a 2,5 mg. di azoto proteico, che dosavamo secondo il metodo combinato di Kjeldhal e Nessler. Tutte le concentrazioni del substrato (citrico o succinico) e delle altre sostanze, usate nelle esperienze manometriche, citate in questa nota, sono riferite al volume finale (3 ml.) del liquido messo nelle vaschette manometriche.

## RISULTATI E DISCUSSIONE.

Abbiamo anzitutto osservato che mentre era possibile mettere in evidenza l'attività citrico-deidrasica nell'estratto acellulare soltanto se si aggiungeva (oltre al substrato: ac. citrico) TPN ( $0,2 \mu\text{M}$ ) come cofattore, e bleu di metilene ( $3 \mu\text{M}$ ) come trasportatore autossidabile di idrogeno, l'attività succino-deidrasica si evidenziava anche senza aggiunta di cofattori e di bleu di metilene. Essa veniva però fortemente accelerata dalla presenza di quest'ultimo.

Il fatto che l'attività citrico-deidrasica sia evidenziata dall'aggiunta di bleu di metilene, e quella succino-deidrasica possa evidenziarsi, quantunque meno intensamente, anche in assenza, sta a indicare che nel secondo caso l'idrogeno, per migrare dall'enzima all'ossigeno atmosferico, può seguire una via diversa che nel primo caso.

Le attività succino- e citrico-deidrasiche, per tutte le concentrazioni di substrato esaminate, erano lineari nel tempo durante i primi 20 minuti. Quindi questo intervallo di tempo si è ritenuto adatto per determinare la velocità di deidrogenazione, essendo quest'ultima costante in tale intervallo.

Tanto l'attività succino- quanto quella citrico-deidrasica aumentavano coll'aumentare della concentrazione del substrato (ac. succinico o citrico) e raggiungevano un valore massimo a  $70 \mu\text{M}$ , rimanendo praticamente costante per concentrazioni superiori entro l'intervallo di concentrazioni esaminato:  $70-250 \mu\text{M}$  (fig. 1-2).

Inoltre ambedue le attività citrico- e succino-deidrasica si sono dimostrate direttamente proporzionali alla concentrazione dell'enzima nell'estratto, entro l'intervallo di quantità esaminato:  $0-2,5 \text{ mg.}$  di azoto proteico.

Si è dimostrato inoltre che le due attività deidrasiche variavano col pH e l'optimum di pH si aggirava intorno a 7,3.

Dai risultati sopraesposti, cioè dalla dimostrata presenza tanto della succino- quanto della citrico-deidrasi nell'*Asp. niger* coltivato in condizioni ambientali adatte all'accumulo di acido citrico, ovviamente non si poteva trarre delle conclusioni sull'influenza delle due attività deidrasiche su tale accumulo. A tale scopo, per le ragioni esposte nell'introduzione, dovevamo evidentemente confrontare nelle stesse condizioni ottimali ( $\text{pH}=7,3$  e  $70 \mu\text{M}$  di substrato) le due attività deidrasiche (esprese come  $\mu\text{l.O}_2/\text{mg. di N}$  nei primi 20 minuti) nell'*Asp. niger* coltivato nei due diversi terreni colturali (Bernhauer, in cui si ha accumulo di acido citrico, e Raulin, in cui tale accumulo non si verifica) e vedere se nei due casi il rapporto fra le due attività variava.

Dalle nostre ricerche è risultato che il rapporto tra le due attività succino-deidrasi/citrico-deidrasi è molto maggiore allorché la muffa viene coltivata in un terreno carente (Bernhauer) in cui si ha accumulo di acido citrico, rispetto a quello che si ha allorché la stessa muffa viene coltivata in un terreno completo (Raulin). In altre parole, a parità di attività succino-

deidrasica l'*Asp. niger* nel primo caso (terreno di Bernhauer) ha un attività citrico-deidrasica molto inferiore che nel secondo caso (Raulin).

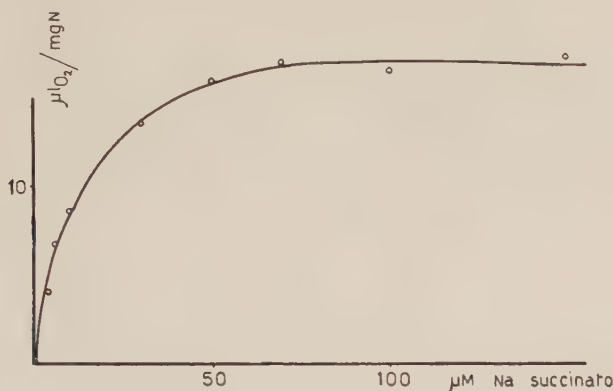


Fig. 1. - Consumo di O<sub>2</sub> nei primi 20 minuti (espresso in  $\mu\text{l O}_2/\text{mg. di N proteico}$ ) in funzione della concentrazione di succinato sodico, a 30° C e pH = 7,3. Ogni vaschetta manometrica conteneva: 1 ml. di estratto, 1 ml. di tampone fosfato M/15 pH = 7,3, 0,3 ml. (3  $\mu\text{M}$ ) di bleu di metilene 0,01 M, volumi variabili di soluzione di succinato, e H<sub>2</sub>O quanto bastava per portare il volume finale a 3 ml.

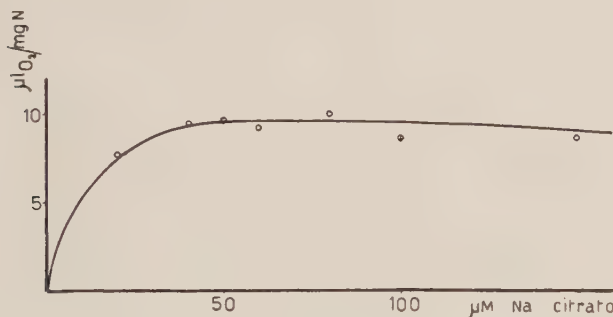


Fig. 2 - Consumo di O<sub>2</sub> nei primi 20 minuti (espresso in  $\mu\text{l O}_2/\text{mg. di N proteico}$ ) in funzione della concentrazione di citrato sodico, a 30° C e pH = 7,3. Ogni vaschetta manometrica conteneva: 1 ml. di estratto, 1 ml. di tampone fosfato M/15 pH = 7,3, 0,3 ml. (3  $\mu\text{M}$ ) di bleu di metilene 0,01 M, 0,2 ml. (0,2  $\mu\text{M}$ ) di TPN 0,001 M, volumi variabili di soluzione di citrato, e H<sub>2</sub>O quanto bastava per portare il volume finale a 3 ml. Dai singoli valori è stata sottratta l'attività deidrasica endogena.

Da questi risultati, che sono in accordo con quelli ottenuti recentemente da Ramakrishnan e coll. [7] in condizioni sperimentali che si possono ritenere confrontabili con le nostre, ci sembra poter concludere che nell'*Asp. niger* possa sempre essere operante il ciclo di Krebs e che nelle condizioni colturali adatte alla fermentazione citrica, l'accumulo di acido citrico possa avvenire a causa di una deficiente attività « citrico-deidrasica » a valle di esso nel ciclo stesso.



## BIBLIOGRAFIA.

- [1] J. W. FOSTER e S. F. CARSON, « J. Am. Chem. Soc. », **72**, 1865 (1950).
- [2] K. F. LEWIS e S. WEINHOUSE, « J. Am. Chem. Soc. », **73**, 2500 (1951).
- [3] J. W. FOSTER, « *Chemical activities of fungi-Academic Press Inc.* », New York (1949).
- [4] C. V. RAMAKRISHNAN, « *Enzymologia* », **17**, 169 (1954).
- [5] C. V. RAMAKRISHNAN e S. M. MARTIN, « *Arch. Biochem. Biophys.* », **55**, 403 (1955).
- [6] M. SAFFRAN e O. F. DEUSTEDT, « *J. Biol. Chem.* », **175**, 849 (1948).
- [7] C. V. RAMAKRISHNAN, R. STEEL e C. P. LENTZ, « *Arch. Biochem. Biophys.* », **55**, 270 (1955).

**Zoologia.** — *Studio delle dipeptidasi e delle lipasi nello sviluppo embrionale di «Bufo viridis» e di «Rana dalmatina»*<sup>(\*)</sup>. Nota <sup>(\*\*)</sup> di ENRICO URBANI, LIVIA DE CESARIS COROMALDI e GIUSEPPE SCOLLO LAVIZZARI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Gli studi che Urbani e Collaboratori conducono da alcuni anni sulle attività enzimatiche nello sviluppo embrionale degli Anfibi anuri hanno due scopi principali.

Il primo è quello di vedere attraverso il comportamento di determinati fermenti quale può essere il ruolo che proteasi, amilasi e lipasi svolgono nello sviluppo embrionale ed i rapporti tra questi enzimi e la utilizzazione delle riserve energetiche del vitello.

Il secondo è di stabilire su basi biochimiche, nel quadro delle affinità sistematiche, il significato degli stadi del ciclo biologico degli Anfibi e di vedere come le somiglianze e le differenze di carattere zoologico possano essere anche rivelate da un particolare atteggiamento metabolico.

Per quanto si riferisce al valore degli stadi di sviluppo si è visto che il bottone caudale e la fine del vitello sono due punti caratteristici della embriogenesi degli Anuri nei quali gli enzimi ed altri composti chimici rivelano un particolare atteggiamento. È soprattutto lo stadio di « fine vitello » che rivela con il comportamento delle proteasi, amilasi, lipasi, fosfatasi ed acido ribonucleico quei cambiamenti metabolici ed umorali che Cotronei (1922)<sup>(1)</sup> (1930)<sup>(2)</sup> (1932)<sup>(3)</sup> ha dimostrato sono alla base del passaggio dalla vita embrionale a quella larvale.

Recenti ricerche eseguite in questo Istituto (Bellini 1957)<sup>(4)</sup> sugli Invertebrati dimostrano che anche in *Artemia salina* la fine della utilizzazione del tuorlo è accompagnata da una caduta della attività dipeptidasica e proteinasica.

(\*) Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R. nell'Istituto di Zoologia ed Anatomia comparata della Università di Camerino.

(\*\*) Pervenuta alla Accademia il 12 luglio 1957.

(1) G. COTRONEI, « *Arch. Zool.* », **10**, 85 (1922).

(2) G. COTRONEI, « *Mon. Zool. Ital.* », **41**, 9 (1930).

(3) G. COTRONEI « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », **6**, 15 (1932).

(4) L. BELLINI, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », **22**, 340 (1957).

Lo studio degli enzimi nello sviluppo ha avuto per ora come oggetto gli embrioni di *Bufo vulgaris* e *Rana esculenta* ma è evidente che maggiore è il numero delle specie esaminate e più probative saranno le conclusioni da trarre da questa serie di ricerche.

Per questo motivo abbiamo preso in esame il comportamento delle dipeptidasi e delle lipasi in *Bufo viridis* ed in *Rana dalmatina* usando la stessa metodica dei nostri precedenti lavori.

DIPEPTIDASI. — Lo studio della alanilglicina dipeptidasi in *Bufo vulgaris* ha mostrato che questo enzima ha una attività leggermente decrescente dalla fecondazione allo stadio di bottone caudale, dopo di che aumenta regolarmente fino a che nelle giovani larve non alimentate mostra una brusca caduta (Urbani e De Cesaris Coromaldi, 1954) <sup>(5)</sup>.

In *Rana esculenta* l'andamento della curva è strettamente somigliante (De Cesaris Coromaldi, 1954) <sup>(6)</sup>, soltanto che l'aumento percentuale dal minimo al massimo di attività dipeptidasica è più forte che nel *Bufo vulgaris*. Si è però avuta l'impressione che un fattore che influisce su questo aumento sia costituito dalla temperatura di sviluppo degli embrioni di rana ma non abbiamo per il momento dati sicuri in merito.

Vale ricordare a questo proposito che Løvtrup (1953) <sup>(7)</sup> non ha trovato in embrioni di *Amblystoma*, allevati a varie temperature, notevoli differenze di attività dipeptidasica.

I risultati ottenuti quest'anno su *Bufo viridis* e riportati nella fig. 1 (che mostra l'andamento della attività dipeptidasica in due dei cinque lotti studiati) sono concordi nell'indicare in questa specie un comportamento enzimatico eguale a quello visto in *B. vulgaris* senza differenze molto forti.

Per poter trarre delle conclusioni sulla quantità di enzima messa in gioco dalle due specie nello sviluppo embrionale bisognerà tener conto della differenza di mole delle uova, riferendosi al loro volume o a dosaggi di azoto totale che per ora non sono stati fatti.

In *Rana dalmatina* <sup>(8)</sup> non abbiamo potuto esaminare gli stadi precedenti al tappo vitellino, non possiamo quindi dire se in questa specie si verifica la diminuzione di attività dalla fecondazione al bottone caudale. Si può invece vedere (fig. 2) che dal tappo vitellino all'inizio della circolazione sanguigna la attività dipeptidasica è solo in leggero aumento, il che costituisce un fattore differenziale rispetto le altre tre specie esaminate. Così anche la attività massima che si incontra alla fine del vitello è, in proporzione, minore che nella *Rana esculenta*.

Vi sono perciò nell'attività dipeptidasica differenze di comportamento maggiori tra *Rana esculenta* e *Rana dalmatina* che non tra *Bufo vulgaris* e *Bufo viridis*.

(5) E. URBANI e L. DE CESARIS COROMALDI, « Ric. Sci. », 24, 1275 (1954).

(6) L. DE CESARIS COROMALDI, « Ric. Sci. », 24, 319 (1954).

(7) S. LØVTRUP, « C. R. Lab. Carlsberg, Sér. Chim. », vol. 28, N. 14, 15, 16, 17 (1953).

(8) Ringraziamo il Prof. G. Colombo della Università di Padova che con grande cortesia ci ha inviato il materiale.

Tutte le specie esaminate sono però uniformi nel mostrare l'aumento di attività dipeptidastica dal bottone caudale alla fine del vitello: questo stadio di sviluppo è sempre accompagnato da una brusca caduta del tenore in enzima.

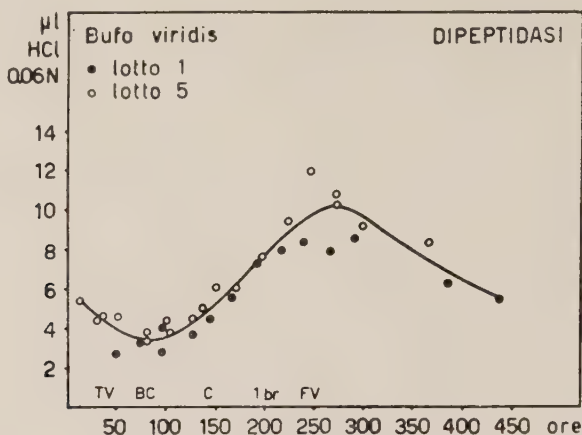


Fig. 1. - Comportamento delle dipeptidasi in *Bufo viridis*.

In ordinate la attività enzimatica espressa in  $\mu\text{l}$  HCl 0,06 N. In ascisse le ore di sviluppo e la indicazione di alcuni stadi significativi: TV=tappo vitellino, BC=bottone caudale, C=inizio della circolazione, 1 br=una branchia opercolata, FV=fine del vitello.

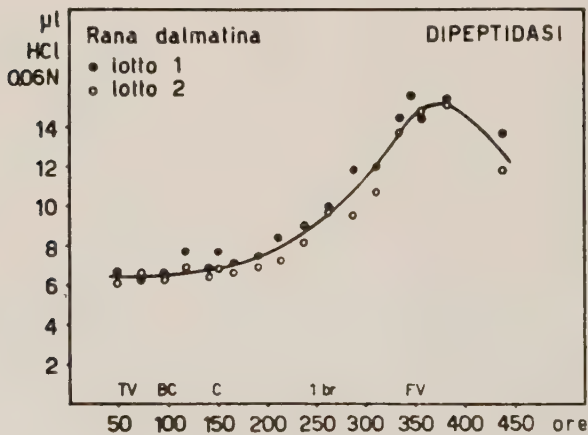


Fig. 2. - Comportamento delle dipeptidasi in *Rana dalmatina*. Stesse indicazioni e riferimenti della fig. 1.

LIPASI. - Le lipasi hanno un comportamento completamente differente in *Rana esculenta* e in *Bufo vulgaris* (Urbani e Scollo Lavizzari, 1955)<sup>(9)</sup> (Russo Caia, 1956)<sup>(10)</sup> infatti nella prima specie l'enzima aumenta regolarmente di attività dal bottone caudale alla fine del vitello mentre nella seconda

(9) E. URBANI e G. SCOLLO LAVIZZARI, « Ric. Sci. », 25, 2119 (1955).

(10) S. RUSSO CAIA, « Ric. Sci. », 26, 2529 (1956).

specie si ha una caduta di attività lipasica allo stadio di inizio della circolazione, caduta alla quale fa seguito un secondo aumento che si arresta nelle giovani larve non alimentate.

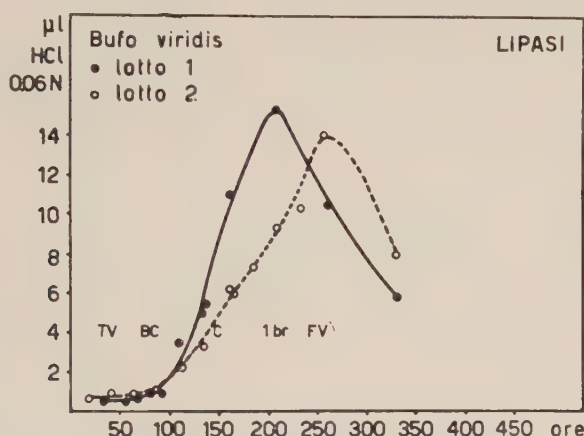


Fig. 3. - Comportamento delle lipasi in *Bufo viridis*.

Sono indicati i dosaggi eseguiti su due lotti allevati a differenti temperature e cioè a 18°C (lotto 1) e a 14°C (lotto 2). Le indicazioni degli stadi si riferiscono al lotto 2. Le altre indicazioni come nella fig. 1.

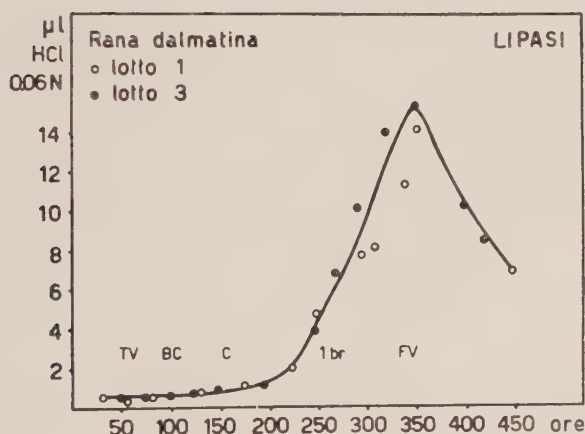


Fig. 4. - Comportamento delle lipasi in *Rana dalmatina*. Stesse indicazioni e riferimenti della fig. 1.

Si era in un primo tempo pensato che la naturale temperatura di sviluppo degli embrioni di rospo in acque fredde e di quelli di rana in acque più temperate potesse essere una causa di questa singolare differenza di comportamento. Urbani Mistruzzi (1957)<sup>(11)</sup> ha dimostrato però che embrioni di

(11) L. URBANI MISTRUZZI, « Ric. Sci. », 27 (1957).



*B. vulgaris* allevati a differenti temperature comprese tra 4°C e 25°C non mostrano modificazioni nell'andamento generale della curva e la caduta di attività lipasica si ritrova sempre in corrispondenza di quel determinato stadio di sviluppo (inizio della circolazione).

Il *Bufo viridis* come risulta dai nostri dati (fig. 3) ha un comportamento delle lipasi eguale a quello della *Rana esculenta* e così la *Rana dalmatina* (fig. 4) e con ciò si dimostra una netta differenza tra *B. vulgaris* da una parte e le altre tre specie dall'altra.

I risultati esposti in questa Nota a carattere preliminare dovranno essere inquadrati nelle ricerche precedentemente compiute allo scopo di interpretare, ove possibile, il significato delle eguaglianze e delle differenze di comportamento enzimatico nelle specie di Anuri studiate.

**Zoologia.** — *Attività enzimatiche nella metamorfosi di « Bufo vulgaris »* (\*). Nota (\*\*) di ENRICO URBANI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Le ricerche che abbiamo condotto in questi ultimi anni sul comportamento degli enzimi e di altri composti chimici nello sviluppo embrionale degli Anfibi anuri hanno seguito principalmente due direttive.

Da una parte è stata effettuata l'analisi dei glucidi lipidi e protidi presenti nell'uovo fecondato ed a vari stadi di sviluppo e si è potuta così stabilire la successione ed il ritmo con i quali questi materiali vengono utilizzati dall'embrione per il suo lavoro morfogenetico: lo studio sullo stesso materiale agli stessi stadi di sviluppo delle carboidrasi, lipasi e proteasi ha consentito di prospettare delle ipotesi attendibili sul ruolo che questi fermenti svolgono nei processi di trasformazione dei materiali vitellini in protoplasma vivente.

Il secondo scopo di queste ricerche di embriologia chimica è stata la comparazione di tali atteggiamenti enzimatici in diverse specie di Anuri (*Bufo vulgaris*, *Bufo viridis*, *Rana esculenta*, *Rana dalmatina*) e si è potuto vedere come alle somiglianze e alle differenze di ordine sistematico tra le varie specie si accompagnano somiglianze e differenze di carattere biochimico.

Proseguendo in questi lavori, che perseguono inoltre il problema generale della comparazione tra attività metaboliche e condizioni morfologiche ed ecologiche dei cicli di sviluppo delle forme, abbiamo esteso le nostre osservazioni alla metamorfosi degli Anuri. In questa nota preliminare vengono comunicati alcuni risultati relativi al *Bufo vulgaris*.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia ed Anatomia comparata della Università di Camerino, con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1957.

Per la ricerca sono state utilizzate larve di *Bufo vulgaris* provenienti da due deposizioni una effettuata a Camerino ed una a Roma: non sono state riscontrate significative differenze biochimiche tra i due lotti. Le larve sono state allevate in acqua corrente ed alimentate con lattuga bollita e rosso d'uovo sodo. Questa alimentazione si è rivelata ottima per ottenere un regolare accrescimento larvale e la quasi totalità degli esemplari ha compiuto la metamorfosi. I dosaggi sono stati compiuti su cinque stadi di sviluppo, contrassegnati con i seguenti numeri romani.

*Stadio I:* larva giunta al termine dell'accrescimento larvale, peso fresco medio in mgr. (PF): 140.

*Stadio II:* larva con gli arti posteriori accresciuti che ancora si alimenta, PF: 118.

*Stadio III:* larva con arto anteriore sinistro uscito dall'opercolo, è cessata l'alimentazione e cominciano quei processi che porteranno al riassorbimento della coda. È a questo stadio che consideriamo, in accordo con gli studi di Cotronei (1913, 1914, 1922), iniziata la metamorfosi. PF: 94.

*Stadio IV:* larva con i quattro arti liberi e coda in riassorbimento, PF: 72.

*Stadio V:* animale appena metamorfosato, PF: 54.

Usando le tecniche dei nostri precedenti lavori e con quegli adattamenti che sono stati necessari, abbiamo studiato il comportamento agli stadi suddetti dei seguenti enzimi e composti chimici: alanilglicina dipeptidasi (AG), glicilglicina dipeptidasi (GG), leucilglicina dipeptidasi (LG), glicilglicilglicina tripeptidasi (GGG), proteinasi acida (substrato caseina a pH 4,2), proteinasi alcalina (substrato caseina a pH 8,7), amilasi (substrato glicogeno), lipasi (substrato tributirina), contenuto in acqua, tenore in glucidi totali, azoto totale, lipidi totali (estrazione con cloroformio-metanolo), acido ribonucleico (estrazione con acido perclorico).

I principali risultati ottenuti qui brevemente riportati e si intendono riferiti *ad individuo* e non per unità di peso fresco, secco od azoto.

*AG dipeptidasi.* — L'attività dell'enzima è decrescente dallo stadio I allo stadio V.

*GG dipeptidasi.* — Questo enzima, a parità di condizioni con il precedente, è presente in quantità non facilmente dosabili. Le determinazioni eseguite mostrano tuttavia un massimo di attività in corrispondenza degli stadi II e III.

*LG dipeptidasi.* — L'attività dell'enzima è in aumento dallo stadio I al IV, quindi stazionaria o in diminuzione. Lo studio delle dipeptidasi su questi diversi substrati indica un differente comportamento di AG, GG, LG, negli stessi stadi di sviluppo. Si può anticipare tra le varie conclusioni che dovranno essere tratte, che si tratta di differenti enzimi che probabilmente svolgono un ruolo diverso negli stessi stadi morfologici: questo conferma quanto già abbiamo visto nello sviluppo embrionale della stessa specie.

*GGG tripeptidasi.* — Questo enzima ha una bassissima attività dallo stadio I al V ed il suo andamento non ha una decisa fisionomia: sarà necessario studiarlo di nuovo modificando la metodica usata.

*Proteinasi acida.* — L'enzima è in deciso aumento dallo stadio I al IV.

*Proteinasi alcalina.* - Il comportamento di questo enzima è differente da quello della proteinasi acida in quanto mostra negli stadi considerati solo un leggerissimo aumento e la sua attività è praticamente stazionaria.

*Amilasi.* - La beta-amilasi mostra una attività decrescente dallo stadio I al IV e quindi con il termine della metamorfosi si ha un leggero aumento rispetto alla attività minima riscontrata.

*Lipasi.* - L'andamento della curva dallo stadio I al V è ad U con l'ordinata iniziale più elevata della finale ed il minimo di attività enzimatica in corrispondenza dello stadio III.

*Acqua.* - I risultati ottenuti confermano quanto già noto, che cioè durante la metamorfosi l'organismo va incontro ad una disidratazione. Questa perdita di acqua è già avvertibile allo stadio II.

*Glucidi totali.* - Il tenore in glucidi totali mostra una forte diminuzione dallo stadio III al V: indice che questi composti sopperiscono in larga misura al fabbisogno energetico del lavoro che si compie durante la metamorfosi.

*Azoto totale.* - La metamorfosi è accompagnata da una diminuzione del contenuto in azoto dell'organismo, diminuzione più modesta però di quella dei glucidi. Anche in questo caso troviamo una conferma della regola che i protidi costituiscono prevalentemente un materiale plastico e vengono bruciati per le necessità energetiche in misura inferiore degli zuccheri. È durante la metamorfosi che l'individuo diviene (negli Anuri) da ammoniotelico ureotelico come Munro (1939, 1953) ha dimostrato e noi abbiamo potuto confermare.

*Lipidi totali.* - Un notevole consumo dei lipidi si riscontra, a somiglianza di quanto visto per i glucidi, dallo stadio III al V.

*Acido ribonucleico.* - Questo composto è decisamente in aumento dallo stadio I allo stadio III, quindi mostra una lieve diminuzione rispetto al massimo tenore raggiunto.

A completamento di queste ricerche abbiamo fatto anche dei dosaggi enzimatici sulla coda in riassorbimento di esemplari agli stadi III e IV in confronto alla coda di esemplari allo stadio I. Già qualche anno fa studiando il parallelismo di comportamento tra acido ribonucleico ed enzimi proteolitici avevamo suggerito uno studio comparativo delle dipeptidasi e dell'RNA nella coda in riassorbimento della larva di *Bufo vulgaris*.

I risultati allora ottenuti (Zacchei 1954) hanno mostrato che, per unità di peso, si ha durante il riassorbimento della coda un forte aumento del tenore in RNA e della attività dipeptidasica. Questo dato ha ricevuto recentemente una conferma da parte di Weber (1957) il quale ha visto un aumento di attività proteolitica nella coda in riassorbimento di *Xenopus laevis*.

Gli enzimi studiati nella coda in riassorbimento hanno mostrato di comportarsi, per unità di peso, nella seguente maniera.

Forte aumento della AG, GG, LG dipeptidasi, della GGG tripeptidasi, e della proteinasi acida. Medio aumento della proteinasi alcalina e della amilasi. Leggerissimo aumento (che rientra nell'ambito dell'errore perimentale) della lipasi.

Lo studio delle attività enzimatiche nella coda in riassorbimento suggerisce l'interesse di una ricerca parallela da effettuarsi sugli Urodeli dove la metamorfosi si realizza senza che si verifichi il riassorbimento della coda.

I dati qui esposti ed altri tuttora in elaborazione saranno oggetto di adeguata esposizione in altro lavoro dove verranno inquadrati nell'ambito dei nostri problemi di Zoologia chimica e discussi in relazione ai risultati ottenuti da altri Autori sulla biochimica della metamorfosi.

#### BIBLIOGRAFIA.

- COTRONEI G., *Primo contributo sperimentale allo studio delle relazioni degli organi nell'accrescimento e nella metamorfosi degli Anfibi anuri. - L'influenza della nutrizione con tiroide di Mammiferi.* « Bios », 2, 27 (1913).
- COTRONEI G., *L'apparato digerente degli Anfibi nelle sue azioni morfogenetiche (Ricerche sull'accrescimento larvale e post-larvale)*, « Memorie R. Acc. Lincei », Anno CCCXI (1954).
- COTRONEI G., *Nuove ricerche sullo sviluppo e sulla metamorfosi degli Anfibi anuri in riferimento ad esperienze di innesti.* « Arch. Zool. Ital. », 10, 85 (1922).
- DE CESARIS COROMALDI L., *Studio delle dipeptidasi durante lo sviluppo embrionale di « Rana esculenta »*, « Ric. Sci. », 24, 319 (1954).
- DE CESARIS COROMALDI L., *Studio delle dipeptidasi e tripetidasi nello sviluppo embrionale e larvale di « Bufo vulgaris »*, « Ric. Sci. », 27, 1804 (1957).
- MUNRO A. F., *Nitrogen excretion and arginase activity during Amphibian development*, « Bioch. J. », 33, 1957 (1939).
- MUNRO A. F., *The Ammonia and urea excretion of different species of Amphibia during their development and metamorphosis*, « Bioch. J. », 54, 29 (1953).
- SCOLLO LAVIZZARI G., *Il comportamento delle alfa e beta amilasi durante lo sviluppo embrionale e larvale di « Bufo vulgaris »*, « Ric. Sci. », 26, 2146 (1956).
- URBANI E., *Moderne prospettive della embriologia chimica*, « Atti Soc. Italiana di Anatomia », Roma 12-15 nov. 1956 (Relazione).
- URBANI E., *Aspetti enzimatici dello sviluppo embrionale e larvale, saggio di Zoologia fisiologica degli Anfibi*, « Ric. Sci. », 25, 2258 (1955).
- URBANI E., *Gli enzimi proteolitici nella cellula e nell'embrione*, « Experientia », 11, 209 (1955).
- URBANI MISTRUZZI L., *Il comportamento delle lipasi nello sviluppo embrionale di « Bufo vulgaris » a differenti temperature*, « Ric. Sci. », 27 (1957).
- URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., *Sulla eliminazione di ammoniaca ed urea nello sviluppo embrionale, larvale e durante la metamorfosi di « Bufo vulgaris »*, « Acta Embr. Morph. Exp. », 1, 1 (1957).
- ZACCHEI A. M., *Acidi nucleici e dipeptidasi nei fenomeni involutivi della coda degli Anfibi anuri durante la metamorfosi*, « Ric. Sci. », 24, 1489 (1954).
- WEBER R., *On the biological function of cathepsin in tail tissue of « Xenopus » larvae*, « Experientia », 13, 153 (1957).



**Biologia.** — *Tardiva determinazione numerica di cellule nervose nel rombencefalo di Anfibi.* — II. *Osservazioni su Anfibi urodeli*<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> di GIORGIO M. BAFFONI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Dalle ricerche di Morpurgo e Tirelli<sup>(1)</sup>, confermate da altri Autori ed estese particolarmente dalla Scuola del Levi<sup>(2)</sup>, è risultato che le mitosi si esauriscono nei primi stadî dello sviluppo embrionale lungo il midollo spinale e nei gangli di Vertebrati superiori; da altre ricerche, però, è risultato che in parti del sistema nervoso centrale, ove le cellule nervose si differenziano tardi (esempio corteccia cerebrale e cerebellare), le mitosi durano molto più a lungo<sup>(3)</sup>.

In una ricerca sul cervelletto di un Mammifero (gatto), tra l'altro, ho constatato che l'attività proliferativa dello strato ventricolare scompare nel feto di 85 mm. di lunghezza, quella dello strato interno termina nel neonato e quella dello strato « dei granuli embrionali » si esaurisce solo al termine della istogenesi cerebellare (circa un mese dopo la nascita)<sup>(3,4)</sup>. Le osservazioni compiute sul Mammifero hanno motivato un programma di ricerche sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare in altri Vertebrati; ho riferito in una recente Nota<sup>(5)</sup> i primi risultati relativi all'attività mitotica del rombencefalo durante la morfogenesi cerebellare di un Anfibio anuro: nel rospo, infatti, ho verificato che la formazione della lamina cerebellare si effettua a stadî avanzati della vita larvale e che, dopo la fusione delle labbra romboidali, l'attività mitotica della piastra alare presenta un notevole aumento, raggiunge il massimo al termine della metamorfosi e si estingue entro la settimana successiva; poichè l'osservazione microscopica del cervelletto di rospi adulti esclude che il fenomeno possa esser dovuto a proliferazione di elementi gliari, esso è stato attribuito alla formazione dei neuroblasti cerebellari; un aumento di minor entità dell'attività proliferativa è stato verificato anche nella piastra basale al termine della metamorfosi ed è stato messo in rapporto con il tardivo differenziamento di centri vestibolari e cocleari dimostrato da Stefanelli e Zacchei<sup>(6)</sup>. Poichè è noto da osservazioni anatomo-comparative ed embriologiche<sup>(7)</sup> che il termine della istogenesi

(\*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » della Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1957.

(1) B. MORPURGO e V. TIRELLI, « Ann. Freniatr. Sci. aff. » (Torino), 3, p. 34 (1892).

(2) Ved.: G. LEVI, « *Accrescimento e Senescenza* » (Firenze 1946).

(3) Ved.: G. M. BAFFONI, « Arch. Zool. Ital. », 41, p. 1 (1956).

(4) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 16, p. 798 (1954).

(5) G. M. BAFFONI e E. ELIA, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 22, p. 109 (1957).

(6) AL. STEFANELLI e A. M. ZACCHEI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 7, p. 358 (1949).

(7) A. LUI, « Riv. Sperim. Freniatr. Med. Leg. Ment. », 22, p. 27 (1896); M. ATHIAS, « Journ. Anat. Physiol. » (Paris), 33, p. 372 (1897); D. OLMER, « C. R. Soc. Biol. », 51, p. 911 (1899); W. H. F. ADDISON, « Journ. Comp. Neurol. », 21, p. 459 (1911).

cerebellare è correlata con l'epoca dell'acquisizione dell'abilità locomotoria, la tardiva determinazione numerica delle cellule nervose nella piastra alare dell'Anfibio anuro è stata riferita al tardivo differenziamento del cervelletto, il quale in questi animali si sviluppa alla metamorfosi in concomitanza con l'atrofia degli organi e dei centri della linea laterale e con lo sviluppo dei centri vestibolari, assumendo un valore essenzialmente « vestibolare »<sup>(8)</sup> per le correlazioni motorie che si instaurano con la condizione tetrapoda terrestre.

In questa Nota riporto i risultati ottenuti dall'esame dell'attività mitotica in un Anfibio urodelo; tale ricerca è stata motivata dal fatto che in questi Anfibi i centri della linea laterale non si coinvolgono dopo la metamorfosi e le vie vestibolari presentano uno sviluppo limitato così che il cervelletto, per quanto rudimentale e con caratteri di transizione, conserva un valore prevalentemente « laterale » (Stefanelli)<sup>(9)</sup>. La presente ricerca, pertanto, si inserisce in quel complesso di indagini dall'indirizzo eco-morfologico comparativo il quale, proposto e valorizzato dal Cotronei<sup>(9)</sup>, da anni è stato adottato con successo in questo Istituto da Stefanelli<sup>(10)</sup> per ricerche di Neurologia intese alla comprensione del significato fisiologico dei diversi aspetti che assume il sistema nervoso nei Vertebrati.

Le osservazioni sono state compiute sul Tritone crestato (*Triturus cristatus carnifex* Laur.) di cui ho esaminato una serie di stadî embrionali (30, 35, 40 secondo Twitty e Bodenstein in *Triturus torosus*<sup>(11)</sup>), di stadî larvali (45, 48, 50, 55, 60 e 63 secondo Glücksohn<sup>(12)</sup>) e di adulti. Di ogni stadio ho esaminato almeno tre individui (tranne per lo stadio 48, di cui ho avuto un solo esemplare fissato in Bouin e colorato con l'ematossilina-cromica floxina secondo Gomori-Bargmann<sup>(13)</sup>); sono state fissate sei serie complete: due in liquido di Carnoy, due in Helly e due in Bouin; i pezzi inclusi in celloidina-paraffina sono stati sezionati in serie, orientati sul piano trasversale, a 5  $\mu$  di spessore; una serie fissata in Carnoy ed una fissata in Helly sono state trattate secondo il metodo di Feulgen per il DNA; l'altra serie fissata in Carnoy è stata trattata con il reattivo per le proteine al Bleu di bromofenolo mercurico e l'altra in Helly con la pironina-verde di metile secondo il metodo di Brachet; una serie di riferimento, fissata in Bouin, è stata impregnata con l'argento colloidale secondo il metodo di Lugaro-Bodian<sup>(14)</sup>.

(8) O. LARSELL, « Journ. Comp. Neurol. », 39, p. 294 (1925); *ivi*, 54, p. 357 (1932); A. STEFANELLI, « Arch. Ital. Anat. Embriol. », 42, p. 1 (1939); « La Ric. Sci. », 18, *Suppl. Centro di Studio per la Biologia*, p. 27 (1948).

(9) G. COTRONEI, « Prolusione al Corso di Zoologia », Università di Pisa 1926.

(10) A. STEFANELLI, « Arch. Zool. Ital. », 29, p. 159 (1941); « Arch. Ital. Anat. Embriol. », 45, p. 360 (1941); « Monit. Zool. Ital. », 54, p. 65 (1943); « Comm. Pont. Ac. Sci. », 8, p. 147 (1944); « Arch. di Fisiol. », 44, p. 49 (1944); « Riv. di Biol. », 41, p. 294 (1949); « Experientia », 9, p. 277 (1953).

(11) Ved. in: R. RUGH, *Experimental Embryology* (Minneapolis 1952).

(12) S. GLÜCKSOHN, « Roux' Arch. Entw.-mech. », 125, p. 341 (1932).

(13) W. BARGMANN, « Mikroskopie », 5, p. 289 (1950).

(14) Ved.: G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 16, p. 113 (1954); *ivi* 17, p. 70 (1954); *ivi* 18, p. 662 (1955).

Le mitosi (stadî di profase-anafase) sono state computate nello strato ventricolare, separatamente per la porzione dorsale (*piastro alare*) e per quella ventrale (*piastro basale*), limitatamente alle sezioni comprendenti le labbra romboidali o la lamina cerebellare. Nella Tabella I e nel grafico (fig. 1) sono riportate le medie dei valori assoluti e di quelli relativi (densità mitotica); i valori relativi li ho ottenuti dividendo il numero assoluto delle mitosi per la superficie ventricolare (in dmm<sup>2</sup>) onde seguire le variazioni della attività mitotica nell'unità di superficie (10.000  $\mu^2$ ); l'area ventricolare delle due piastre l'ho ricavata moltiplicando la lunghezza (prodotto delle sezioni esaminate per lo spessore) per la larghezza (media aritmetica dello sviluppo lineare dei contorni dorsali e ventrali, disegnati alla camera lucida e riportati a valori decimali con un curvimetro); nei primi stadî di sviluppo è stata considerata una notevole lunghezza del rombencefalo a causa della difficile delimitazione della zona metencefalica.

TABELLA I.

STADIO	ETÀ	Lunghezza dmm	PIASTRA ALARE				PIASTRA BASALE			
			Larg. dmm	Area dmm <sup>2</sup>	Mitosi	Dens.	Larg. dmm	Area dmm <sup>2</sup>	Mitosi	Dens.
30 7 mm	6 gg.	2,65	2,5	6,62	170	25,6	2,4	6,36	139	21,8
35 7 1/2	8 »	2,75	3,01	8,28	170	20,5	3,0	8,25	133	16,1
40 9 1/2	12 »	1,93	3,16	6,10	44	7,2	4,0	7,72	35	4,5
45 14 1/2	20 » ca.	1,85	3,3	6,10	37,5	6,1	4,5	8,32	22,5	2,7
48 15 1/2	30 » »	1,20	6,5	7,80	35	4,5	4,0	4,8	10	2,1
50 16	45 » »	1,40	5,6	8,28	29	3,5	5,6	8,28	17,3	2,1
55 19	60 » »	1,33	7,33	9,75	24,3	2,5	5,8	7,72	7,3	1,0
60 25	90 » »	1,35	6,9	9,32	39	4,2	5,3	7,09	8,5	1,2
63 33	140 » »	3,17	8,0	25,40	8	0,31	6,3	20,06	5,5	0,27

Diversamente da quanto ho osservato nell'Anfibio anuro, gli abbozzi del cervelletto (labbra romboidali) dell'Anfibio urodelo, sono molto pronunciati già all'inizio della risposta muscolare dell'embrione (st. 35; 1<sup>a</sup> freccia del grafico); all'epoca dello sgusciamento (st. 40; figura A del grafico) la morfogenesi cerebellare è già avanzata: la lamina cerebellare è fusa dorso-medialmente tramite un sottile straterello commessurale (primordio della *commissura cerebellaris*); dallo stadio 45 in poi il cervelletto conserva il suo aspetto caratteristico (figura B del grafico) e non subisce sostanziali modificazioni di forma fino all'adulto, a parte la modica riduzione dei recessi laterali che si verifica alla metamorfosi (st. 63; figura C del grafico). L'istogenesi degli elementi cerebellari comincia tardi, all'inizio della vita larvale (st. 45, completo riassorbimento del tuorlo; 2<sup>a</sup> freccia del grafico), e procede lentamente, di-

venendo completa, almeno a giudicare dalle modificazioni della cromatina <sup>(15)</sup> e dagli aspetti dei più tipici neuroni cerebellari (cellule di Purkinje e *granula*), al termine della condizione acquatica (st. 60-63).

L'attività mitotica, elevata durante il periodo embrionale, cade a valori relativamente modesti al termine di esso (stadio 45) e durante il periodo larvale decresce lentamente in ambedue le piastre, estinguendosi praticamente

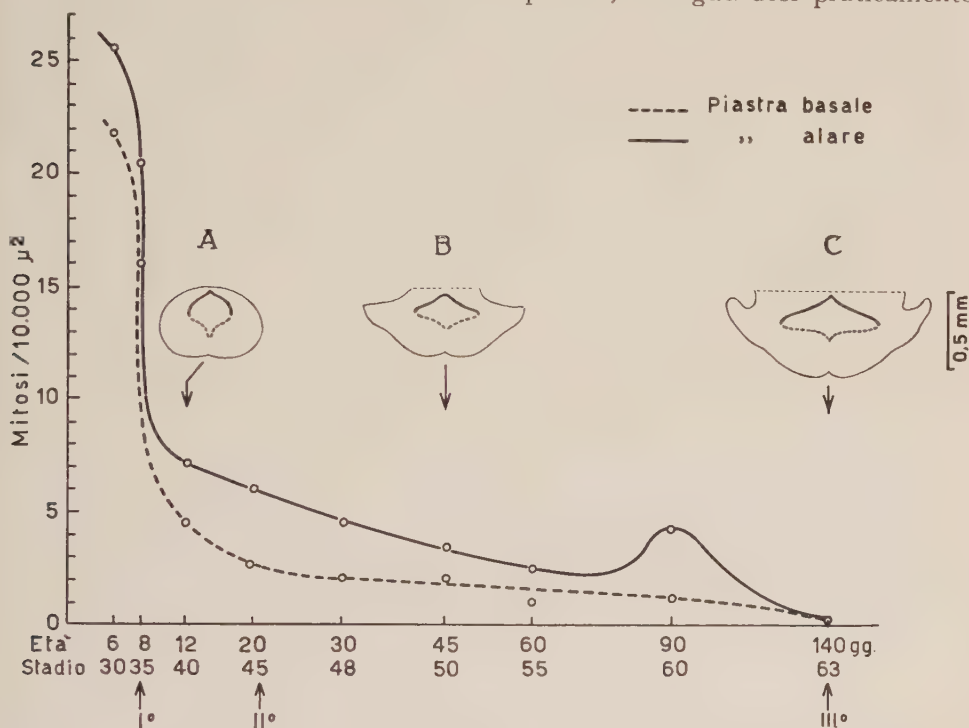


Fig. 1 - Andamento dell'attività mitotica nello strato ventricolare dorsale (*piastra alare*) e ventrale (*piastra basale*) della porzione rostrale del rombencefalo durante la condizione embrionale (stadî 30-45) e larvale (st. 45-63) di *Triturus cristatus carnifex* (Laur).

(I tempi dell'ascissa sono in scala logaritmica).

al termine della metamorfosi (stadio 63). Sia in valori assoluti che nell'unità di superficie (ved. Tabella I e fig. 1) il numero delle mitosi della piastra alare è costantemente superiore a quello della piastra basale; però durante la morfogenesi cerebellare le labbra romboidali si innalzano verticalmente sul piano di taglio e perciò l'area ventricolare della piastra alare in realtà è maggiore di quanto risulta dai miei dati; ne consegue che durante il periodo embrionale la densità mitotica della piastra alare non è da ritenersi senz'altro superiore a quella della piastra basale.

I risultati di maggior rilievo emersi dai miei dati, sono:

1° l'attività mitotica nello strato ventricolare del rombencefalo persiste durante tutto il periodo larvale,



2° almeno nel periodo larvale essa è più elevata nella lamina alare che in quella basale,

3° l'attività mitotica non è correlata con la morfogenesi cerebellare, la quale si compie durante il periodo embrionale, nè risulta in relazione con il differenziamento degli elementi cerebellari, che si manifesta all'inizio della vita larvale (st. 45).

Onde orientarmi sul significato da attribuire alla proliferazione cellulare riscontrata durante il periodo larvale, ho proceduto a computi numerici degli elementi contenuti nelle due piastre durante lo sviluppo. Il computo è stato eseguito su sezioni della porzione rostrale del rombencefalo al livello della *commissura cerebellaris* (o degli abbozzi delle labbra romboidali); i valori ottenuti riguardano solo l'aumento in spessore del rombencefalo; non ho considerato l'aumento in lunghezza poichè esso è risultato relativamente modesto e pertanto ritengo che i dati rispecchino con sufficiente approssimazione l'effettiva variazione numerica degli elementi cerebellari. Nei computi ho tenuto conto solo degli elementi che presentavano i caratteri tipici delle cellule nervose in differenziamento o differenziate sia per gli aspetti del loro nucleo (in preparati trattati con metodi di Feulgen)<sup>(15)</sup> che per quelli del loro pirenoforo (in preparati trattati con metodo di Brachet o con il metodo di Lugaro-Bodian), trascurando di proposito altri elementi (connettivali e presumibilmente gliari) i quali però sono risultati sempre poco frequenti (3-8 %). Le medie individuali (per singola sezione di 5  $\mu$  di spessore) sono riportate nella Tabella II. Onde avere ulteriori informazioni ho anche eseguito l'esame sull'orientamento dei fusi mitotici.

TABELLA II.

Stadio	Età	Strato ventricolare		Strato mantellare	
		Piastra alare	Piastra basale	Piastra alare	Piastra basale
30	6 gg.	26		55	
35	8 »	20	22	46,5	29
40	12 »	26	23	172	270
45	20 »	27,5	29	196,5	387
50	45 »	29	33	211	404
55	60 »	32	35	236	440
60	90 »	32	37	338	483
63	140 »	42	46	480	594
dopo un mese		66	66	491	592
adulto		74	85	350	361

I risultati sono:

a) tra stadi 30 e 35, nonostante l'elevata attività mitotica (ved. Tabella I e fig. 1) il numero degli elementi nella porzione rostrale del rombencefalo si conserva relativamente modesto; il fatto che allo stadio 30 le mitosi sono orientate prevalentemente lungo l'asse antero-posteriore dell'embrione (nelle sezioni il 63 % sono in piastra equatoriale) conferma la supposizione che in questo periodo l'attività proliferativa del tubo neurale provvede principalmente all'allungamento del neurasse;

b) durante la morfogenesi cerebellare (tra stadio 35 e 45) il numero degli elementi rombencefalici aumenta considerevolmente, specialmente nello strato mantellare; poichè allo stadio 35 prevalgono i fusi mitotici orientati parallelamente alla superficie ventricolare (54 %) e poichè allo stadio 45 prevalgono quelli orientati perpendicolarmente ad essa (44 %) risulta che la morfogenesi cerebellare procede in due tempi successivi: in un primo momento con l'aumento della cavità ventricolare e poi con l'ispessimento (aumento numerico di elementi) delle pareti rombencefaliche;

c) durante il periodo larvale l'aumento degli elementi rombencefalici continua, decrescendo progressivamente nell'unità di tempo; poichè tra stadio 45 e 55 l'orientamento dei fusi mitotici è risultato casuale, in questo periodo non prevale l'accrescimento di un particolare parametro; al termine della condizione larvale (tra stadio 60 e 63) si verifica un incremento numerico di elementi, particolarmente notevole nella piastra alare, che va ritenuto effetto dell'aumento dell'attività proliferativa osservata nello stadio 60 (ved. Tabella I, fig. 1); questo incremento, come è stato anche osservato durante la morfogenesi cerebellare nell'Anfibio anuro<sup>(5)</sup>, è da ascriversi alla determinazione numerica di quegli elementi cerebellari che si differenziano nel tardo periodo larvale per l'adeguamento della risposta motoria agli stimoli propriocettivi della condizione tetrapoda terrestre; dall'esame dell'orientamento dei fusi mitotici allo stadio 60 è risultato che in questo periodo la percentuale delle mitosi orientate parallelamente alla superficie ventricolare è elevata (57 %) ed invece è molto bassa (10 %) quella delle mitosi orientate lungo l'asse antero-posteriore; ciò significa che nell'ultimo periodo larvale prevale l'ingrandimento della superficie ventricolare (infatti gli elementi dello strato ventricolare divengono più numerosi) mentre è ridottissimo l'allungamento del neurasse;

d) negli adulti il numero degli elementi dello strato mantellare diminuisce; tale diminuzione non è sufficientemente compensata dall'estendersi dello strato ventricolare, nè si accompagna ad eventuali aspetti degenerativi di cellule, perciò essa va attribuita all'aumento volumetrico delle cellule nervose (dovuto, per la legge di Levi, all'aumentato territorio d'innervazione ed al compimento dei processi del differenziamento) ed allo sviluppo dei fasci e delle vie nervose che provocano un ulteriore accrescimento del rombencefalo e la rarefazione dei suoi elementi nell'unità di volume.

Le osservazioni testè riportate ribadiscono che durante il periodo larvale nella porzione rostrale del rombencefalo dell'Anfibio urodelo l'attività mito-

tica provoca un aumento numerico di elementi nervosi che risulta correlato con l'ingrandimento e l'ispessimento di questa regione. La persistenza di mitosi anche in altre parti del neurasse (telencefalo, diencefalo e mesencefalo) durante il periodo larvale e le sporadiche mitosi osservate nell'adulto, indicano che il fenomeno non è limitato alla regione del neurasse da me considerata, ma è generale. Va anche tenuto presente che lo strato mantellare (grigio periventricolare) degli Anfibî urodéli è costituito da un gran numero di elementi che non raggiunge un elevato differenziamento.

Ad ogni modo da queste osservazioni risulta che mentre l'aumento di sostanza grigia del sistema nervoso centrale, dopo la morfogenesi, nei Vertebrati superiori si effettua solo per l'accrescimento volumetrico del neurone <sup>(1,3)</sup>, negli Anfibî urodéli, invece, si realizza anche con l'aumento numerico di cellule nervose. Ciò significa che negli Anfibî urodéli la determinazione numerica degli elementi di almeno alcune regioni del neurasse non è precoce, ma tardiva.

CONCLUDENDO: la determinazione numerica delle cellule nervose nel rombencefalo di un Anfibio urodélo è tardiva; il fatto non è in rapporto con la morfogenesi cerebellare, nè giustificato dal tardivo differenziamento degli elementi cerebellari (come avviene negli Anfibî anuri <sup>(5)</sup>), ma è risultato in rapporto con i processi d'accrescimento del neurasse.

**Biologia.** — *L'attività secretoria dell'organo sottocommessurale durante lo sviluppo di un Anfibio urodélo*<sup>(\*)</sup>. Nota<sup>(\*\*)</sup> di MILENA MARINI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

In una precedente ricerca <sup>(1)</sup> sul nucleo della cellula nervosa di *Triturus* durante lo sviluppo, ho osservato che, al termine della metamorfosi, i neuroni del centro preottico magnocellulare presentano un notevole accrescimento nucleare.

Nell'ipotesi che tale accrescimento fosse correlato con l'attività neurosecretoria di questi elementi, ho iniziato alcune osservazioni intese a precisare l'inizio e l'andamento dei fenomeni neurosecretori ipotalamici durante lo sviluppo di *Triturus*.

Nel corso di questa indagine ha attratto la mia attenzione il comportamento dell'organo sottocommessurale (o.s.); questo, com'è noto, è un ispessimento ependimale della volta del diencefalo che tappezza anteriormente e ventralmente la commessura posteriore; è costituito da elementi allungati, forniti di un lungo prolungamento distale che si affaccia alla cavità del III°

(\*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata "G. B. Grassi" della Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1957.

(1) M. MARINI, « Riv. di Neurobiol. » (Perugia), 2, p. 495 (1956).

ventricolo con un bordo ciliato, e di un prolungamento prossimale, più breve e sottile, che si inserisce sulla membrana limitante esterna.

Che l'o.s. fosse di natura secretoria fu sospettato già da Edinger <sup>(2)</sup>, che per primo lo descrisse; di recente è stato dimostrato che la sua secrezione ha affinità tintoriali simili a quelle del materiale neurosecretorio del sistema ipotalamo-ipofisario (Stutinsky <sup>(3)</sup>, Wislocky e Leduc <sup>(4)</sup>, Mazzi <sup>(5)</sup>, Bargmann e Schiebler <sup>(6)</sup>). Tuttavia ancora non si conosce con precisione il ciclo secretorio dei suoi elementi né il destino e l'azione del materiale da essi elaborato.

A quanto mi risulta, le uniche notizie sull'attività secretoria di questo organo durante lo sviluppo sono quelle di Wingstrand <sup>(7)</sup> e di Mazzi <sup>(8)</sup>.

Wingstrand, in un Uccello (pollo), ha osservato che l'organo sottocommissurale presenta le prime tracce di materiale colorabile con l'emiatossilina cromica di Gomori al 6° giorno d'incubazione. Secondo l'A. questa sostanza non è omologabile al materiale neurosecretorio dei centri ipotalamici perché, a differenza di questi, non contiene gli ormoni della neuroipofisi.

Mazzi, in un Anfibio (*Rana*), ha osservato i primi indizi di attività secretoria allo stadio 22, in embrioni di 8,4 mm. di lunghezza (inizio della circolazione nella pinna caudale).

Dai dati citati risulta che si conosce l'inizio del differenziamento dell'o. s. limitatamente a quanto si verifica in un Uccello (pollo) e in un Anfibio anuro (*Rana*); pertanto ho ritenuto di un certo interesse riferire in questa Nota i primi dati sull'inizio e sull'andamento dell'attività secretoria dell'o.s. durante lo sviluppo in un Anfibio urodelo.

A tal fine ho preso in esame una serie completa di stadî embrionali (sec. Twitty e Bodenstein in *Triturus torosus* <sup>(9)</sup>) e larvali (sec. Glücksohn <sup>(10)</sup>) di *Triturus cristatus carnifex* a partire dallo stadio 30.

Del materiale, fissato in Bouin, Helly e Carnoy ed incluso in paraffina-celoidina, sono state allestite sezioni seriali longitudinali e trasversali dello spessore di 5 micron.

Una serie di preparati ottenuta da individui fissati in Bouin è stata colorata con il metodo ematossilina cromica-floxina di Gomori <sup>(11)</sup>, modificato da Bargmann <sup>(12)</sup>.

Per l'esame delle strutture nucleari è stata impiegata la reazione di Feulgen su individui fissati sia in Carnoy che in Helly.

(2) L. EDINGER, « Abh. Senckenberg. Nat. Ges. Frankfurt », 18, p. 1 (1892).

(3) F. STUTINSKY, « C. R. Soc. Biol. », 144, p. 1357 (1950).

(4) G. B. WISLOCKY e E. H. LEDUC, « Journ. Comp. Neurol. », 97, p. 515 (1952).

(5) V. MAZZI, « Arch. Zool. Ital. », 37, p. 445 (1952).

(6) W. BARGMANN e Th. H. SCHIEBLER, « Zeitschr. f. Zellforsch. », 37, p. 583 (1952).

(7) K. G. WINGSTRAND, « Ark. f. Zool. » (Uppsala), 6, p. 41 (1953).

(8) V. MAZZI, « Monit. Zool. Ital. » 62, p. 78 (1954).

(9) Ved. in: R. RUGH, *Experimental Embryology*, (Minneapolis 1952).

(10) S. GLÜCKSOHN, « Roux' Arch. Entw. - mech. », 125, p. 341 (1932).

(11) G. GOMORI, « Amer. Journ. of Pathol. », 17, p. 395 (1941).

(12) W. BARGMANN, « Mikroskopie », 5, p. 289 (1950).



L'o.s. inizia il suo sviluppo tra lo stadio 35-36 (risposta motoria); però, similmente a quanto osservato in altre regioni del neurasse di *Triturus*, i suoi elementi non si differenziano sincronicamente ed alcuni di essi si presentano in attività mitotica fino alla metamorfosi.

Le cellule dell'o.s. che si differenziano per prime sono quelle situate medialmente e ventralmente alla commessura posteriore; in un primo periodo l'attività mitotica è localizzata sui bordi dell'organo, ma in seguito appare anche medialmente tra gli elementi differenziati.

I primi elementi che si differenziano (nell'embrione allo stadio 36) presentano nuclei allungati, spostati al polo della cellula prospiciente la commessura posteriore; data la posizione eccentrica del nucleo, si viene a delimitare una più cospicua porzione citoplasmatica verso la cavità ventricolare (regione sopranucleare), ed una esigua verso la commessura posteriore (regione sottonucleare). I nuclei di questi elementi si presentano vescicolosi; la loro cromatina, perso l'aspetto granulare e la sua omogenea distribuzione nel carioplasma (tipica degli elementi indifferenziati<sup>(1)</sup>), appare in gran parte addossata alla membrana nucleare sotto forma di zolle.

Nei primi stadi di sviluppo i nuclei presentano una lieve depressione della membrana nucleare, prima in corrispondenza del polo superiore (stadio 36) e poi di quello inferiore (stadio 37); in seguito le depressioni si accentuano, specie in alcuni stadi, e infine scompaiono lentamente (dallo stadio 48 in poi). La comparsa delle depressioni riveste un certo interesse perché si accompagna alla formazione dei primi granuli di secrezione.

Infatti allo stadio 36, nella regione sopranucleare di quegli elementi che presentano nuclei vescicolosi e lobati, si mettono in evidenza con l'ematoxilina cromica di Gomori pochi e minutissimi granuli (fig. 1 a).

Allo stadio 37, mentre nella regione sopranucleare i granuli aumentano in numero e grossezza e compaiono sul bordo ventricolare, nella regione sottonucleare si osservano le prime delicate granulazioni (fig. 1 b).

Il materiale di secrezione aumenta notevolmente negli ultimi stadi embrionali: infatti, nelle larve appena sgusciate (st. 41), il citoplasma sopranucleare è infarcito di granulazioni, perlopiù allineate parallelamente all'asse della cellula; i granuli a volte sono distribuiti omogeneamente, a volte invece sono più abbondanti o in prossimità del nucleo o nel bordo ventricolare, dove sono molto marcati (fig. 1 c).

Dallo stadio 41 allo stadio 45, nella regione sopranucleare si osserva una progressiva rarefazione del materiale secretorio che inizia in prossimità del nucleo (st. 42) e si propaga verso il bordo ventricolare (st. 43-45) (fig. 1 g-h); nella regione sottonucleare, invece, i granuli di secrezione sono in lieve aumento.

Dallo stadio 45 allo stadio 48, nella maggior parte degli elementi si ripete la successione dei quadri osservati tra gli stadi 36-41. Allo stadio 48 la quantità del materiale di secrezione raggiunge di nuovo un massimo: essa è però maggiore che allo stadio 41; inoltre in alcuni elementi si osservano, oltre ai granuli, zolle di materiale secretorio addossate specialmente al polo superiore del nucleo (formazione di coni e calotte) (fig. 1 d).

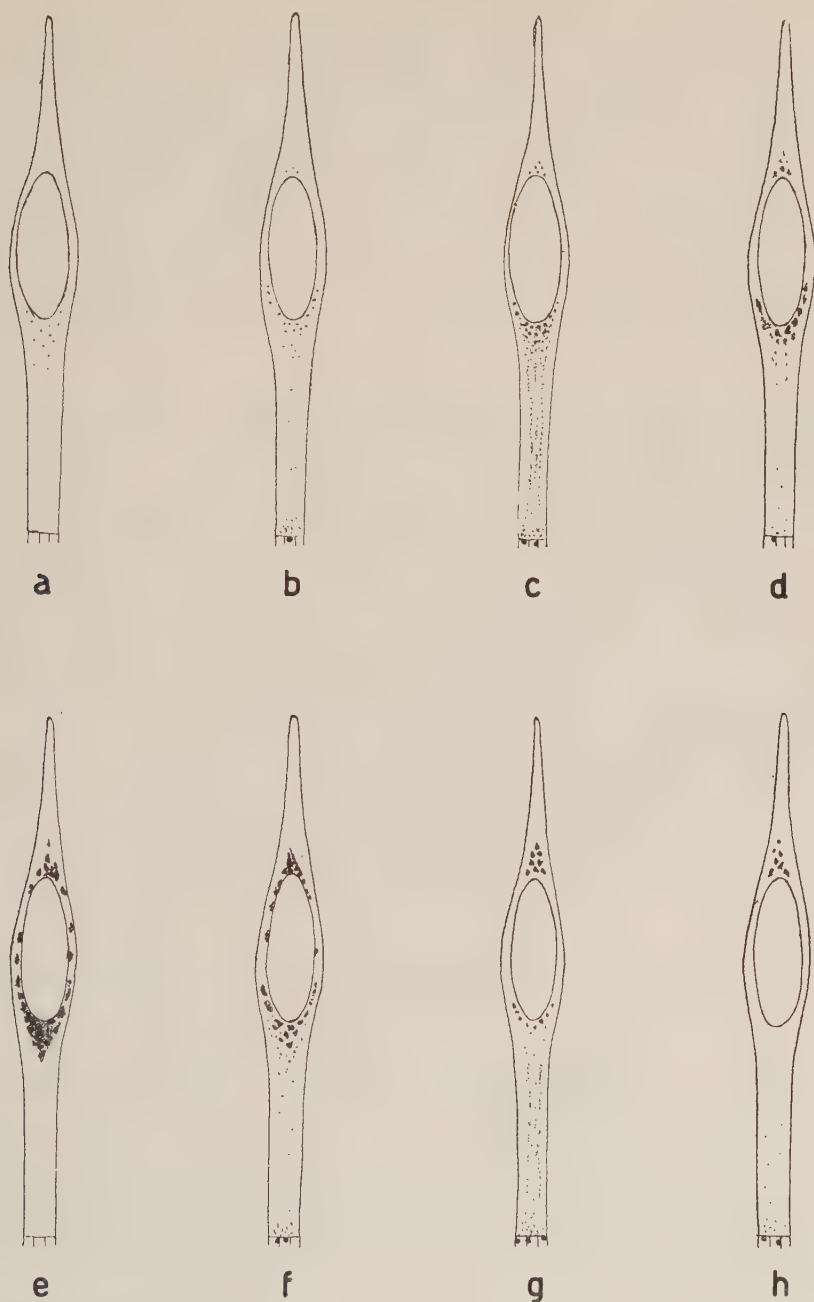


Fig. 1. — Schema del ciclo secretorio nelle cellule dell'organo sottocommessurale di *Triturus*.

Dallo stadio 48 allo stadio 50 la quantità del materiale di secrezione diminuisce ed a partire dallo stadio 50 aumenta di nuovo.

Negli stadi larvali successivi (dallo stadio 52 in poi) il materiale di secrezione dell'organo aumenta in valore assoluto per il differenziarsi di nuovi

elementi, mentre nelle singole cellule può apparire più o meno abbondante. In questo periodo non è più possibile seguire i cicli di secrezione delle cellule sottocommessurali perché esse presentano quadri diversi anche nella stessa zona di uno stesso individuo: infatti oltre alla contemporanea presenza dei quadri già descritti, il materiale di secrezione appare spesso sotto forma di zolle e talora si addensa in masse compatte ad uno o a tutti e due i poli del nucleo (fig. 1 *e-f*).

Questa variabilità di quadri si conserva anche negli animali al termine della metamorfosi, quando tutti gli elementi che costituiscono l'o.s. appaiono differenziati.

In base alle osservazioni compiute sull'attività secretoria dell'o. s. durante lo sviluppo di *Triturus*, i risultati più salienti conseguiti vertono sull'inizio e sull'andamento del ciclo secretorio.

L'attività secretoria dell'o.s. inizia allo stadio 36, quando l'organo diviene morfologicamente individuabile (formazione della commessura posteriore); pertanto nell'Anfibio urodelo l'inizio dell'attività secretoria è più precoce che nell'Uccello (Wingstrand <sup>(7)</sup>) e nell'Anfibio anuro (Mazzi <sup>(8)</sup>): infatti nel pollo al 6° giorno d'incubazione la morfogenesi è molto avanzata e nella rana l'inizio della circolazione nella pinna codale (st. 22) avviene più tardivamente della risposta motoria (st. 18).

Nel primo periodo di sviluppo, dato che le poche cellule sottocommessurali differenziate presentano uniformità di aspetti, è stato possibile precisare la successione dei quadri secretori; inoltre ho potuto constatare che il materiale colorabile con l'ematossilina cromica compare come granuli molto minuti prima nella regione sopranucleare (fig. 1 *a*), poi in quella sottonucleare (fig. 1 *b*).

Per quanto riguarda l'attività secretoria della regione sopranucleare (ventricolare), che è la più imponente, ho potuto schematicamente distinguere tre fasi:

1° *Fase di elaborazione*: il materiale secretorio si forma in prossimità del nucleo ed aumentando raggiunge il bordo ventricolare (fig. 1 *a-c*);

2° *Fase di accumulo*: i granuli di secrezione coalescono presso il nucleo in zolle o aggregati compatti (formazione di calotte) (fig. 1, *d-e*);

3° *Fase di eliminazione*: i granuli di secreto compaiono tra le ciglia delle cellule secernenti; quando l'eliminazione è intensa si ha la progressiva rarefazione del materiale secretorio a partire dalla regione citoplasmatica più vicina al nucleo (fig. 1 *f-h*).

In effetti il ciclo secretorio è più complesso perché le tre fasi non sempre si succedono nell'ordine descritto: infatti l'eliminazione può cominciare durante la fase di elaborazione e la fase di accumulo può mancare, come avviene nei primi stadi (st. 36-48).

La produzione del materiale secretorio nella regione sottonucleare è molto minore, inizia più tardi, procede indipendentemente da quella della regione ventricolare e non manifesta evidenti cicli di secrezione.

Per ciò che concerne l'attività secretoria dell'o.s. durante lo sviluppo, ho osservato che i cicli di secrezione ventricolare si succedono con chiara evidenza nei primi stadî (uno tra stadio 36 e 45, un altro tra stadio 46 e 50), mentre ciò non avviene negli stadî più avanzati: probabilmente con il differenziarsi di nuovi elementi non è necessaria la mobilitazione generale delle cellule sottocommessurali per far fronte alle richieste dell'organismo.

Infine può presentare un certo interesse il fatto che i due cicli di secrezione ventricolare iniziano o culminano in coincidenza con alcuni stadî dello sviluppo che hanno una notevole importanza fisiologica (risposta motoria; sgusciamiento dall'uovo; inizio della vita larvale = tuorlo riassorbito); ho in corso osservazioni su diverso materiale intese a precisare gli eventuali rapporti intercorrenti tra attività secretoria dell'o.s. e stadî funzionali di sviluppo.

Concludendo: l'o.s. inizia la sua attività precocemente (allo stadio 36); poiché durante il primo periodo di sviluppo le cellule secernenti presentano quadri uniformi, è stato possibile individuarne il ciclo secretorio; i granuli colorabili con l'ematossilina cromica di Gomori compaiono in prossimità del nucleo prima nella regione sopranucleare e poi in quella sottonucleare; il materiale di secrezione può venire subito eliminato o può accumularsi in aggregati (formazione di una o due calotte perinucleari).

I quadri secretori che si succedono all'inizio dello sviluppo si riscontrano tra le cellule dell'o.s. in individui a stadî più avanzati ed in adulti <sup>(13)</sup>.

**Biologia.** — *Sull'inizio della determinazione degli arti negli Anfibi anuri* (\*). Nota di TEODORO PERRI e LEONELLA NOTARNICOLA, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Con esperienze eseguite l'anno scorso e quest'anno, ci siamo proposti di ricercare lo stadio nel quale avviene la determinazione dell'arto negli Anfibi anuri. Abbiamo perciò eseguito, in *Bufo vulgaris*, esperienze di trapianto del territorio dell'arto posteriore. Lo stadio dei donatori variava da gastrula a termine fino a media neurula; i portatori erano allo stadio di bottone codale piccolissimo.

Negli Urodeli, dapprima l'Harrison osservò che l'abbozzo dell'arto anteriore in *Amblystoma punctatum* a bottone codale piccolissimo era determinato. Il Detwiler notò poi (1929) che la determinazione di tale abbozzo era già avvenuta in stadio più giovane, ossia prima della comparsa della piastra neurale. Lo stesso Autore rilevò successivamente (1933) <sup>(1)</sup>, sempre nella stessa

(13) Ringrazio il prof. Baffoni per i consigli datimi durante lo svolgimento di questo lavoro.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Perugia, con un contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1957.

(1) S. R. DETWILER, in « J. Exper. Zool. », vol. 64 (1933).



specie, che la determinazione è già avvenuta persino allo stadio di gastrula a tappo vitellino grande o medio, e che a questo stadio è pure determinato l'asse antero-posteriore dell'arto.

La questione è stata molto meno studiata negli Anuri. L'Alverdes (1927)<sup>(2)</sup> (altri Autori avevano osservato la determinazione a larva giovanissima) in esperienze di trapianto del presunto abbozzo dell'arto posteriore in *Rana sylvatica* ed in *Rana palustris* ne ottenne lo sviluppo a cominciare dallo stadio di contrazione, e solo in una piccola percentuale di casi. Il May (1933)<sup>(3)</sup>, in *Discoglossus pictus*, ebbe lo sviluppo dell'arto posteriore allo stadio di bottone codale piccolissimo. Successivamente il Perri (1955)<sup>(4)</sup> ebbe in *Bufo vulgaris* un caso di sviluppo dell'abbozzo dell'arto posteriore trapiantato allo stadio di bottone codale piccolissimo ed altri casi a bottone codale piccolo, e si propose di studiare la determinazione dell'arto in stadi più giovani.

In queste esperienze abbiamo dunque esaminato la determinazione dell'abbozzo dell'arto posteriore, da gastrulazione terminata (tappo vitellino appena scomparso) sino alla prima metà dello stadio di neurula. Il territorio dell'arto posteriore veniva asportato ampiamente e trapiantato sul tronco di un embrione a bottone codale piccolissimo. Abbiamo finora sperimentato solo su *Bufo vulgaris*. I portatori, nei casi positivi, sono stati tenuti in vita fino alla metamorfosi.

In tali condizioni abbiamo avuto casi di ottimo differenziamento ed accrescimento del trapiantato, accanto ad altri casi di formazione di arti atipici in vario grado o di differenziamento scarsissimo o addirittura nullo. Per i donatori osserviamo che in qualche caso si sono sviluppati senza l'arto il cui territorio era stato asportato per il trapianto.

I casi di differenziamento ed accrescimento assai buono o addirittura ottimo sono stati quattro. In due di essi gli arti emergono dalla parte anteriore del tronco, in uno dal terzo medio, ed in uno dal terzo posteriore. Essi sono molto ben conformati; gli autopodi, assai regolari, mostrano chiaramente trattarsi di arti posteriori, e rendono agevole il riconoscimento della lateralità. In tre casi trattasi di arti unici; nell'altro di due arti tra loro in simmetria speculare costituenti una coppia di arti posteriori. In tutti i casi gli arti, in vita, furono sempre immobili.

I due casi nei quali gli arti emergono dalla parte anteriore del tronco (vedi figg. 1 e 2), hanno un particolare interesse. È noto infatti che dopo le ricerche del Balinsky sugli arti soprannumerari da induzione abnorme negli Urodeli, fu avvertita l'esigenza, nelle esperienze di trapianto di arto, di porre attenzione alla possibilità che l'arto ottenuto potesse provenire non dallo sviluppo del trapiantato bensì da induzione. Tale esigenza vale pure per gli Anuri nei quali il Perri (dal 1946 in poi) ottenne con particolare tecnica

(2) K. ALVERDES, in « Zeitschr. f. mikr. anat. Forsch. », vol. 11 (1927).

(3) R. M. MAY, in « Bull. biol. de la France et de la Belg. », vol. 67 (1933).

(4) T. PERRI, in « Riv. di Biologia », vol. 47 (1955).

(trapianto di abbozzi cefalici asportati da embrioni röntgenirradiati con dosi nettamente letali) un gran numero di casi di arti soprannumerari da induzione abnorme. Orbene nei nostri due casi abbiamo la sicurezza che gli arti provengono effettivamente dallo sviluppo del trapiantato, perché, come dicevamo, essi emergono dalla parte anteriore del tronco ossia da una zona ove gli arti da induzione abnorme (come risulta dalle ricerche del Balinsky sugli Urodeli



Fig. 1. — *Bufo vulgaris* in metamorfosi. Trapianto del presunto abbozzo dell'arto posteriore destro eseguito appena scomparso il tappo vitellino (gastrula appena terminata). Si è sviluppato un arto posteriore di lateralità destra. L'arto anteriore destro del portatore è parzialmente duplice. (Disegno).



Fig. 2. — *Bufo vulgaris* in metamorfosi. Trapianto del presunto abbozzo dell'arto posteriore destro eseguito a metà dello stadio di neurula. Si è sviluppata una coppia di arti posteriori. L'arto anteriore destro del portatore non si è esteriorizzato. (Disegno).

e da quelle del Perri sugli Anuri) sono arti anteriori e non posteriori. Inoltre l'essere gli arti in questi due casi sicuramente provenienti dal trapiantato rende più che probabile che anche negli altri casi si tratti effettivamente dello sviluppo del trapianto. Aggiungiamo, per completezza, che lo scheletro in questi due casi è ben conformato, a parte il fatto che nell'articolazione dell'anca vi sono zone di fusione cartilaginea tra la testa femorale e l'emicinto; la muscolatura è scarsissima.

È interessante notare la lateralità degli arti trapiantati. In uno dei quattro casi, come abbiamo detto sopra, si è sviluppata una coppia di arti posteriori, ambedue ben conformati e di lunghezza pressoché uguale. Possiamo dunque prendere in considerazione solo gli altri tre casi: in due di questi si è sviluppato un arto singolo di lateralità destra, e nell'altro un arto singolo

di lateralità sinistra. Ricordiamo che in questa prima serie di ricerche abbiamo eseguito il trapianto omolateralmente (dal lato destro sul lato destro) senza inversione di assi; però per l'ultimo caso di arto disarmonico (arto di lateralità sinistra sul lato destro del tronco) avevamo annotato nei nostri appunti di non essere sicuri dell'orientamento del pezzo trapiantato. È possibile che il trapianto sia stato qui eseguito con l'asse antero-posteriore invertito; il che implica a sua volta che tale asse sia già determinato (come appunto avviene negli Urodeli); tale questione sarà adeguatamente controllata nel prossimo anno.

Per quanto riguarda lo stadio di operazione precisiamo che nel caso di cui alla fig. 1, il trapianto era stato eseguito appena scomparso il tappo vitellino, quindi al termine della gastrulazione; gli altri tre casi nella prima metà dello stadio di neurula. In questi stadi dunque si è avuta la determinazione dell'arto e la determinazione della sua natura di arto posteriore.

Oltre ai quattro casi con sviluppo di un arto (o di una coppia di arti) ben conformato, ne abbiamo avuti pochi altri o con l'autopodio atipico o del tutto atipici. Vi sono stati dei casi in cui sembrava che dal trapiantato si fosse formata una gemma di arto, che poi non ebbe ulteriore sviluppo e scomparve del tutto. In molti casi, infine, non abbiamo avuto nessuno sviluppo del trapiantato.

Non è certamente facile spiegare il perché dei casi di atipia. Ma poiché, come si è visto, eseguendo il trapianto negli stessi stadi si possono avere casi di ottimo sviluppo ed accrescimento, sembra probabile che l'atipia sia causata da disturbo recato durante il trapianto. Il traumatismo operatorio può indubbiamente impedire, in varia misura, l'estrinsecarsi di una determinazione già avvenuta, particolarmente quando il trapiantato appartiene, come nei nostri casi, a stadi molto giovani. Un altro fattore che può avervi avuto importanza è l'ampiezza del territorio trapiantato.

Per i casi di mancato sviluppo del trapiantato, ci limitiamo ad osservare che in questo stesso Istituto (Perri) è risultato in *Bufo vulgaris*, che frequentemente il presunto abbozzo dell'arto posteriore trapiantato a bottone codale piccolissimo non si sviluppa; invece nei trapianti a bottone codale piccolo o di poco più avanzato (primitivo inizio delle contrazioni) la frequenza dei casi positivi è molto maggiore. Ricordiamo inoltre che anche negli Urodeli a bottone codale piccolo è stato segnalato che talvolta il trapianto va riassorbito.

Non mancheremo di estendere le nostre ricerche ad altri Anuri (perché la determinazione di un abbozzo può variare, almeno entro certi limiti, a seconda della specie studiata), e soprattutto a stadi più giovani nell'ambito della gastrula. Per ora abbiamo dimostrato che la determinazione dell'abbozzo dell'arto, in *Bufo vulgaris*, è già avvenuta non solo nella prima metà dello stadio di neurula, ma anche a gastrulazione appena terminata: tale risultato indica che la determinazione si è attuata nello stadio di gastrula.

Queste nostre ricerche hanno pure avuto di mira lo stabilire una comparazione con gli Urodeli per quanto riguarda l'inizio della determinazione

degli arti. Abbiamo già ricordato al principio di questo lavoro che negli Urodeli la determinazione è già avvenuta nella prima metà dello stadio di gastrula (tappo vitellino grande o medio); in *Bufo vulgaris* è già avvenuta alla fine dello stesso stadio, e questo mostra che tra Anuri ed Urodeli, da tale punto di vista, non vi è quell'ampia differenza che prima si credeva. I trapianti che ci proponiamo di eseguire a gastrula più giovane potranno contribuire ad una più esatta comparazione.

CONCLUSIONI. — I risultati che abbiamo finora raggiunti sperimentando in *Bufo vulgaris* nella prima metà dello stadio di neurula, o al termine della gastrulazione, ci permettono di concludere che in tali stadi la determinazione dell'abbozzo dell'arto è già avvenuta, infatti lo si può trapiantare con successivo ottimo differenziamento ed accrescimento.

L'aver dimostrato che in *Bufo vulgaris* l'abbozzo dell'arto è già determinato al termine della gastrulazione, mostra che la differenza tra Anuri ed Urodeli per quanto riguarda l'inizio della determinazione dell'arto è, almeno, molto minore di quanto precedentemente si credesse.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Ferie 1957 Settembre-Ottobre*

---

## NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

---

**Mineralogia.** — *Ricerche sulla distribuzione di uranio e torio nella formazione dioritica di Cogne (Valle d'Aosta) (\*)*. Nota (\*\*) di MASSIMO FENOGLIO e GERMANO RIGAULT, presentata dal Corrisp. M. FENOGLIO.

Il nostro studio verte sulla distribuzione di uranio e torio rispetto ai componenti mineralogici dei tipi litologici che costituiscono la massa dioritica, affiorante nell'alta Valle d'Aosta e limitata nella parte nord-orientale dalla Valle di Cogne, nel tratto che va all'incirca dal Silvenoire ad Epinel, e nella parte occidentale dalla Valsavaranche, nel tratto che va da Molère fin poco oltre Punta Bioula.

Nell'estate 1956, approfittando anche dei lavori in corso per l'allargamento della rotabile che da Silvenoire prosegue per Cogne, ci fu possibile fare alcune osservazioni di interesse geologico-petrografico, di cui sarà detto in altra sede: qui intendiamo invece riferire i risultati più notevoli, sinora conseguiti, relativi alle ricerche, sia di campagna che di laboratorio, sulla radioattività della formazione dioritica in parola.

Nella zona da noi esplorata la massa dioritica risultò costituita da una diorite quarzifera biotitico-anfibolica con abbondante sfeno, facente passaggio a gneiss dioritico.

Nella diorite a facies normale, di colore grigio-verde, generalmente a grana media, affiorante nella Valle di Cogne, si scorge già ad occhio nudo fra i componenti essenziali sialici il feldspato e il quarzo e fra quelli femici

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Torino e Centro di studio per la Mineralogia e la Petrografia delle Alpi Occidentali del C.N.R.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1957.

la biotite e l'anfibolo; fra i componenti accessori frequente la titanite in cristalli appiattiti, di colore giallo miele, nitidamente formati, che possono anche raggiungere qualche millimetro di lunghezza.

All'esame microscopico la roccia, a tipica struttura granulare, ipidiomorfa, si rivela costituita da un aggregato di feldspato - profondamente alterato e prevalentemente rappresentato da plagioclasio di tipo andesinico - e di quarzo, predominanti; subordinatamente da biotite, sovente cloritizzata, e da anfibolo orneblendico comune. Fra i componenti accessori, oltre allo sfeno, già riconosciuto macroscopicamente, sono da aggiungere l'epidoto e l'ortite, ambedue in prismetti ed in granuli; l'ortite mostra sovente una trasformazione, per la quale tende a diventare monorifrangente, diminuendo di rifrazione e specialmente di birifrazione. Si nota infine la presenza dell'apatite in prismetti allungati e dello zircone in rari cristallini minutissimi.

Furono eseguite accurate e sistematiche misure di radioattività sul terreno, che servirono a darci un primo orientamento sulla radioattività della massa dioritica e indicazioni per le successive ricerche di laboratorio.

Le misure in parola vennero da noi effettuate con un misuratore portatile di radioattività della « Italelettronica », modello R40 D, corredato da un tubo Geiger-Müller, modello GM 16 avente un diametro e una lunghezza utili rispettivamente di 20 mm e di 500 mm.

Le misure furono eseguite, ad intervalli di 50 metri, su un'area di circa 800.000 m<sup>2</sup>, estendentesi fra Silvenoire ed Epinel.

In tutta la massa dioritica esplorata la radioattività si manifestò sensibilmente costante: i valori osservati risultarono due-tre volte maggiori di quelli determinati per il fondo.

#### PARTE SPERIMENTALE.

Allo scopo di controllare i valori di radioattività, ricavati dalle misure eseguite sul terreno, e di determinare la distribuzione di uranio e torio fra i vari componenti mineralogici della roccia dioritica, ricorremmo all'uso delle emulsioni nucleari, poichè questo metodo è particolarmente adatto per localizzare i centri emittenti ed individuare così i minerali responsabili dell'attività  $\alpha$ .

La tecnica usata <sup>(1)</sup> consisteva nella sovrapposizione delle lastre nucleari Ilford C. 2, con emulsione di spessore di 50  $\mu$ , alle sezioni sottili di roccia dello spessore di 40  $\mu$ : il buon contatto tra lastra e sezione sottile era assicurato da un particolare dispositivo, da noi appositamente costruito, analogo a quello descritto da Yagoda [27]. I preparati venivano tenuti in un essiccatore alla temperatura di circa 3°C per tutto il tempo di esposizione, che

(1) Su tale tecnica e sulle relative applicazioni esiste una ricca letteratura, che figura, aggiornata al 1949, nell'opera di YAGODA [27]. Basterà perciò comprendere nell'elenco bibliografico, riportato in calce alla presente Nota, alcuni lavori recenti, fra i più significativi in argomento [1, 2, 4, 5, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 25, 26].

si aggirava sui 40 giorni. Lo sviluppo delle lastre <sup>(2)</sup> veniva eseguito subito dopo il periodo di esposizione.

L'osservazione microscopica delle lastre veniva effettuata utilizzando un microscopio Reichert «Me F», che si dimostrò per le sue caratteristiche particolarmente adatto allo scopo.

Dalle nostre ricerche eseguite su 18 sezioni sottili risultò che l'attività  $\alpha$  è distribuita nei vari componenti mineralogici della roccia dioritica oggetto di studio in modo assolutamente non uniforme. E precisamente si notò che tale attività è essenzialmente legata alla presenza dei minerali accessori ortite e titanite; l'attività dovuta allo zircone può, nel nostro caso, essere praticamente trascurata, poichè esso è rarissimamente presente e per di più in individui minutissimi.

È interessante notare che per l'ortite e la titanite i limiti delle aree occupate dalle tracce delle particelle  $\alpha$  nelle emulsioni nucleari corrispondono esattamente ai relativi limiti degli individui cristallini responsabili dell'attività  $\alpha$ . Ciò è documentato dalle figure 1 e 2 della tavola I, relative alle microfotografie di un individuo cristallino di ortite e delle corrispondenti tracce sull'emulsione nucleare.

Altre osservazioni di particolare rilievo riguardano le variazioni di attività nell'interno dei monocristalli, particolarmente di ortite. Si nota infatti una distribuzione non sempre uniforme delle tracce, come risulta chiaramente dall'esame della figura 2 della tavola I e delle figure 1 e 2 della tavola II, relative alle microfotografie delle emulsioni nucleari in corrispondenza ad individui di ortite e di titanite.

Per spiegare queste variazioni, nel caso della titanite può forse essere sufficiente l'interpretazione basata sulle fluttuazioni statistiche, mentre nel caso dell'ortite è invece necessario pensare proprio ad una distribuzione non omogenea degli elementi radioattivi.

Questa deduzione non implica però la conclusione estrema di ammettere la presenza di inclusioni a forte tenore in uranio o torio; infatti in nessun caso si notò una disposizione raggiata delle tracce, caratteristica delle inclusioni ad alto contenuto in elementi radioattivi [21].

Tale osservazione sulla distribuzione non uniforme di uranio e torio nei singoli cristalli è confermata dall'esame microscopico dei vari individui cristallini di ortite. Questi ultimi sono sovente otticamente isotropi, mostrano cioè un notevole grado di metamittizzazione in relazione al loro tenore in elementi radioattivi. Ed in alcuni casi è possibile rilevare un fenomeno par-

(2) Le lastre sono state da noi sviluppate alla temperatura costante di 20°C secondo il seguente schema:

a) Sviluppo: 1 volume di Kodak D-19 diluito con 3 volumi di acqua distillata. Durata 15' con continua agitazione.

b) Lavaggio intermedio: acqua corrente. Durata 5'.

c) Fissaggio: soluzione al 30 % di tiosolfato sodico. Durata 60'.

d) Fissaggio induritore: Kodak F-5. Durata 15'.

e) Lavaggio: acqua corrente, poi acqua distillata. Durata 40' + 15'.



ticolarmente interessante: alcune parti dell'individuo cristallino presentano isotropia ottica, le altre invece appaiono decisamente birifrangenti con caratteristico pleocroismo.

Ora, in tali casi, si notò che a zone isotrope metamittizzate corrispondeva un più elevato contenuto in elementi radioattivi, mentre nelle zone birifrangenti se ne riscontrava un tenore inferiore.

Dall'osservazione comparativa delle figure 1 e 2 della tavola I si ha la conferma di questa nostra interpretazione: alle zone esterne, di color bruno scuro, otticamente isotrope, metamittizzate, fa riscontro nell'emulsione nucleare un maggior numero di tracce, mentre alla zona centrale, di color bruno chiaro, birifrangente, corrisponde una attività  $\alpha$  meno intensa.

Dei vari individui cristallini di ortite e di titanite sono state poi calcolate le attività specifiche medie, che rappresentano il numero delle particelle  $\alpha$  emesse per  $\text{cm}^2$  e per secondo.

Vennero misurate le aree dei minerali in esame mediante proiezione sull'apposito schermo del nostro microscopio; queste misure venivano poi controllate con il tavolino integratore. Il numero delle tracce delle particelle  $\alpha$  emesse per tutto il tempo di esposizione venne conteggiato sullo schermo del microscopio.

TABELLA I.

N.	N. Sezione	Minerale	Superficie in $\text{mm}^2$ dei cristalli	N. particelle $\alpha$ emesse in 3.790.800''	Attività specifica
1	1	Titanite	1,393	2124	0,0402
2	1	Titanite	0,404	583	0,0381
3	1	Titanite	0,216	433	0,0529
4	2	Titanite	0,702	1032	0,0388
5	2	Titanite	0,461	670	0,0383
6	2	Titanite	0,101	140	0,0366
7	2	Ortite	0,297	5734	0,5093
8	3	Ortite	0,030	1474	1,2961
9	3	Ortite	0,020	311	0,4102

I risultati relativi a tre sezioni sottili e a nove individui cristallini, sei di titanite e tre di ortite, sono riportati nella Tabella I, dove figurano le superfici dei cristalli, il numero delle particelle  $\alpha$  emesse durante il tempo di esposizione di 3.790.800 secondi ed infine l'attività specifica relativa.

Per controllare se, nelle condizioni di esposizione da noi adottate, si verificasse una sensibile sparizione dell'immagine latente delle tracce delle

particelle  $\alpha$  nell'emulsione nucleare, ricorremmo al seguente esperimento. Con una stessa sezione sottile si impressionarono due lastre nucleari con due differenti tempi di esposizione, l'uno di circa 44 giorni, l'altro di circa 21 giorni. Vennero poi calcolate nelle due emulsioni nucleari le attività specifiche di alcuni centri attivi; evidentemente una variazione del valore relativo ad uno stesso centro attivo nelle due emulsioni avrebbe indicato la presenza di un effetto di « fading ».

I risultati conseguiti sono riportati nella tabella II, dove nelle colonne 4 e 5 sono indicati i numeri relativi al conteggio delle particelle  $\alpha$  emesse dal minerale durante i due tempi di esposizione, rispettivamente di 3.790.800 secondi e di 1.785.000 secondi; nelle colonne 6 e 7 appaiono i valori delle attività specifiche dello stesso individuo cristallino, calcolati in base ai due differenti tempi di esposizione.

TABELLA II.

1	2	3	4	5	6	7
N.	Minerale	Superficie in mm <sup>2</sup> dei cristalli	N. particelle $\alpha$ emesse in 3.790.800''	N. particelle $\alpha$ emesse in 1.785.000''	Attività specifiche	
					A	B
1	Titanite	1,393	2124	1012	0,0402	0,0407
2	Titanite	0,404	583	276	0,0381	0,0383
3	Titanite	0,216	433	206	0,0529	0,0534

Come si può rilevare dall'esame della Tabella II i valori relativi alle attività specifiche A e B sono praticamente coincidenti: il che porterebbe ad escludere la presenza di un sensibile effetto di « fading ».

Sono state infine calcolate le attività specifiche di tutti i centri attivi osservati nelle 18 sezioni sottili studiate. I risultati relativi, ottenuti non più misurando le aree dei cristallini e contando le tracce complessive ma conteggiando le tracce al microscopio con un opportuno oculare munito di reticolo tarato, sono riportati nella Tabella III.

Dall'esame dei valori riportati nella Tabella III si rileva che la variazione delle attività specifiche nell'ambito delle due specie minerali è contenuta entro limiti abbastanza ristretti. Risulta però che in una stessa sezione sottile individui della medesima specie mostrano una leggera differenza di attività, che esorbita dall'ordine di grandezza degli errori sperimentali [6].

Dai valori esposti nella Tabella III sono state poi calcolate le medie delle attività specifiche dell'ortite e della titanite; esse risultano uguali rispettivamente a 0,591 e a 0,0559.

TABELLA III.

Ortite			Titanite		
N.	N. Sezione	Attività specifica	N.	N. Sezione	Attività specifica
1	2	0,932	1	1	0,0718
2	3	0,844	2	1	0,0432
3	4	0,971	3	1	0,0438
4	4	0,367	4	2	0,0929
5	5	0,366	5	3	0,0552
6	6	0,551	6	3	0,0508
7	6	0,507	7	3	0,0465
8	6	0,589	8	6	0,0607
9	6	0,675	9	6	0,0527
10	6	0,222	10	6	0,0400
11	8	0,422	11	7	0,0567
12	8	0,275	12	10	0,0331
13	9	0,523	13	11	0,0589
14	10	0,541	14	11	0,0386
15	10	0,567	15	11	0,0517
16	12	0,601	16	12	0,0412
17	13	0,674	17	13	0,0704
18	13	0,957	18	13	0,0533
19	14	0,689	19	14	0,1008
20	14	0,552			

Faremo infine rilevare che l'attività presentata dall'ortite è molto superiore a quella della titanite, come risulta già dall'esame delle figure 1 e 2 della tavola II, perfettamente confrontabili, essendo identico il tempo di esposizione delle due emulsioni nucleari e uguale l'ingrandimento delle due microfotografie. E precisamente l'attività dell'ortite è di circa dieci volte superiore a quella della titanite.

Per poter risalire dai valori delle attività specifiche al contenuto in uranio e torio nei minerali è evidentemente necessario determinare il rapporto delle concentrazioni dei due elementi, essendo arbitrario assumere a priori che

esso debba essere, in tutti i minerali contenenti uranio e torio come costituenti minori, uguale a quello determinato in media per la litosfera ( $\text{Th}/\text{U} = 3$ ) [19, 20].

Uno dei metodi possibili per determinare tale rapporto consiste nell'analisi dei valori delle lunghezze effettive delle tracce delle particelle  $\alpha$ . Però questo metodo, piuttosto laborioso, presenta notevoli difficoltà di carattere pratico per poter giungere a risultati attendibili; precisamente richiede la misura di un numero di tracce elevatissimo, dell'ordine di grandezza di  $10^5$ , al fine di ottenere una statistica rappresentativa [3].

Ma la conoscenza del rapporto  $\text{Th}/\text{U}$  nelle rocce e nei minerali è di grande importanza dal punto di vista della geochimica di questi due elementi e quindi noi decidemmo di ricorrere ad un altro metodo per stabilire questo rapporto.

Come è ben noto, le particelle  $\alpha$  emesse da ogni elemento radioattivo hanno un'energia caratteristica ben definita, legata alla costante di disintegrazione dell'elemento dalla relazione di Geiger e Nuttall. Dallo studio quindi dello spettro energetico delle  $\alpha$  è possibile risalire alla natura e alla quantità dei nuclidi emettitori  $\alpha$  presenti nella sostanza in esame.

Pensammo di ricorrere a questo metodo per la determinazione del contenuto in uranio e torio della titanite, poichè questo minerale si presentava nella diorite in cristalli di dimensioni tali da permetterne una buona separazione; inoltre il tenore in U e Th, determinato approssimativamente per mezzo delle emulsioni nucleari, era sufficiente per permettere di eseguire lo spettro  $\alpha$ .

L'esecuzione pratica <sup>(3)</sup> venne effettuata utilizzando uno speciale tipo di camera di ionizzazione, particolarmente adatta per l'analisi di minerali radioattivi opportunamente trattati e ridotti in strati sottili, ed impiegando un analizzatore di impulsi a cento canali. Per maggiori dettagli sull'argomento rimandiamo ai lavori originali di Facchini e Malvicini [9, 10] e di Facchini, Forte, Malvicini e Rossini [7, 8].

Lo spettro  $\alpha$  ottenuto da un campione medio di titanite è riportato nella figura 1, dove in ascisse sono indicate le energie in Mev delle particelle  $\alpha$  emesse, in corrispondenza ai cento canali dell'analizzatore, e in ordinate i numeri di impulsi per canale.

Dall'esame di tale spettro e dalla misura delle aree delle varie righe spettrali fu possibile trarre alcune deduzioni di grandissimo interesse, quali la presenza contemporanea di uranio e torio nella titanite, l'esistenza dell'equilibrio radioattivo tra i vari membri delle due famiglie radioattive ed infine il rapporto  $\text{Th}/\text{U}$  che risultò uguale ad 1. La concentrazione di uranio nel minerale venne stabilita in  $2,2 \cdot 10^{-4}$  gr/gr; identica risultò quella del torio. Questi dati sono in buon accordo con quelli che si possono ricavare dalle attività specifiche medie calcolate con la tecnica delle emulsioni nucleari.

(3) Desideriamo ringraziare vivamente il dottor Alessandro Malvicini, alla cui cortesia dobbiamo l'esecuzione dello spettro  $\alpha$ .



I risultati di queste ricerche, condotte con tale modernissima tecnica, avvalorano dunque la nostra opinione, più sopra esposta, relativa all'arbitrarietà di assumere a priori che il rapporto Th/U nei minerali contenenti uranio e torio come costituenti minori debba essere costantemente uguale a 3.

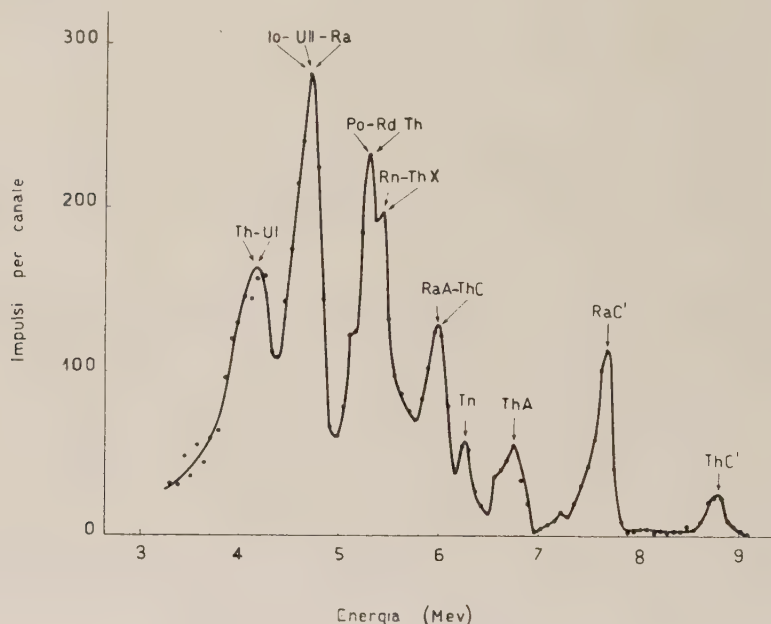


Fig. 1. - Spettro  $\alpha$  della titanite.

Purtroppo, per l'estrema esiguità e per la rarità degli individui cristallini di ortite, non è stato possibile isolare dalla roccia il materiale occorrente per l'esecuzione dello spettro  $\alpha$  di tale specie minerale.

L'esame però delle lunghezze delle relative tracce sull'emulsione nucleare può autorizzarci a concludere a favore della presenza di sensibili quantità di torio, mentre in questo caso nulla si può dire sul rapporto Th/U [12, 24].

#### CONCLUSIONI.

I risultati del nostro studio - condotto con la tecnica delle emulsioni nucleari - sulla distribuzione di uranio e torio nella roccia dioritica di Cogne, rispetto ai suoi componenti mineralogici, hanno messo in evidenza che la radioattività non è distribuita uniformemente nella roccia, ma è essenzialmente legata ai due minerali accessori ortite e titanite. Di questi due minerali sono state calcolate, in base ai reperti dell'esame di 18 sezioni sottili, le attività specifiche medie che risultano uguali a 0,591 per l'ortite e a 0,0559 per la titanite; in altri termini l'attività dell'ortite è all'incirca dieci volte superiore a quella della titanite.

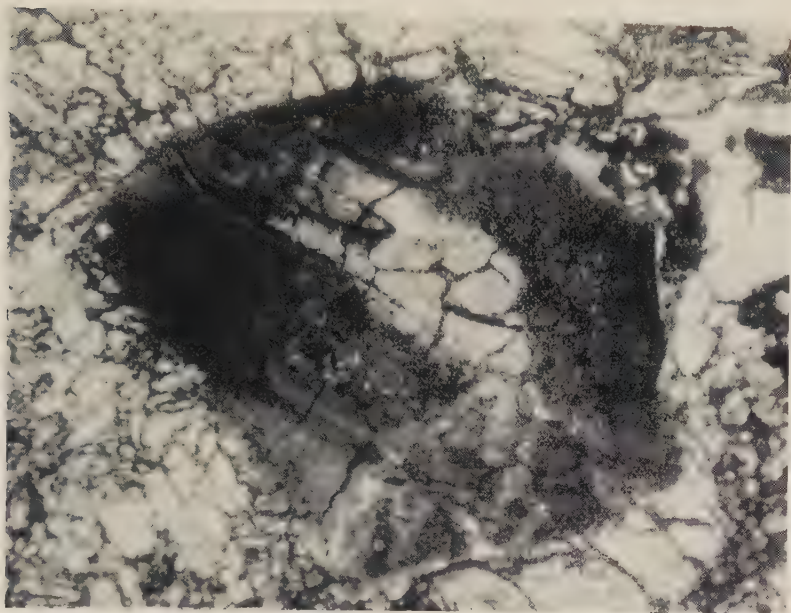


Fig. 1. – Cristallo di ortite. Solo polarizzatore. Ingrandimento 110 $\times$ .



Fig. 2. – Microfotografia dell'emulsione nucleare nel punto corrispondente al cristallo di ortite della figura 1. Ingrandimento 110 $\times$ .

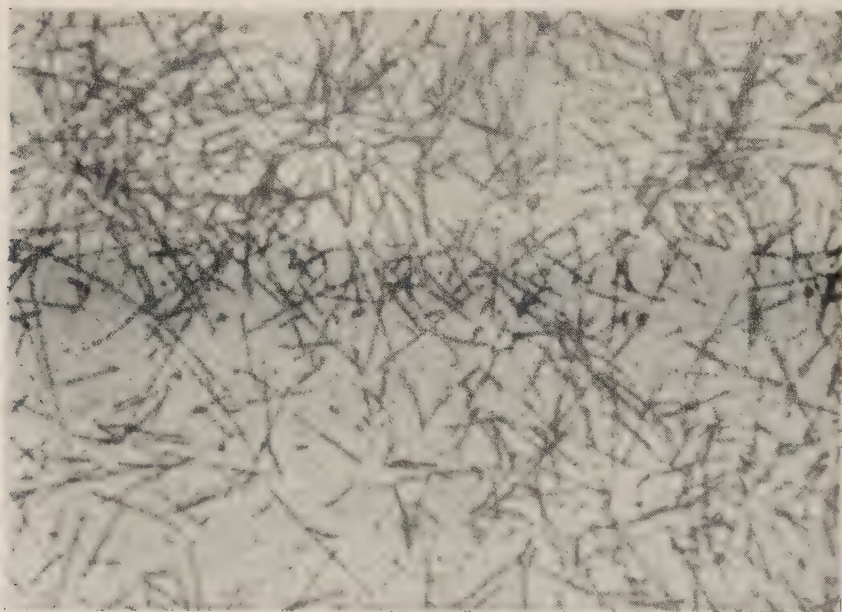


Fig. 1. – Microfotografia dell'emulsione nucleare in corrispondenza di un cristallo di ortite. Ingrandimento 666  $\times$ .

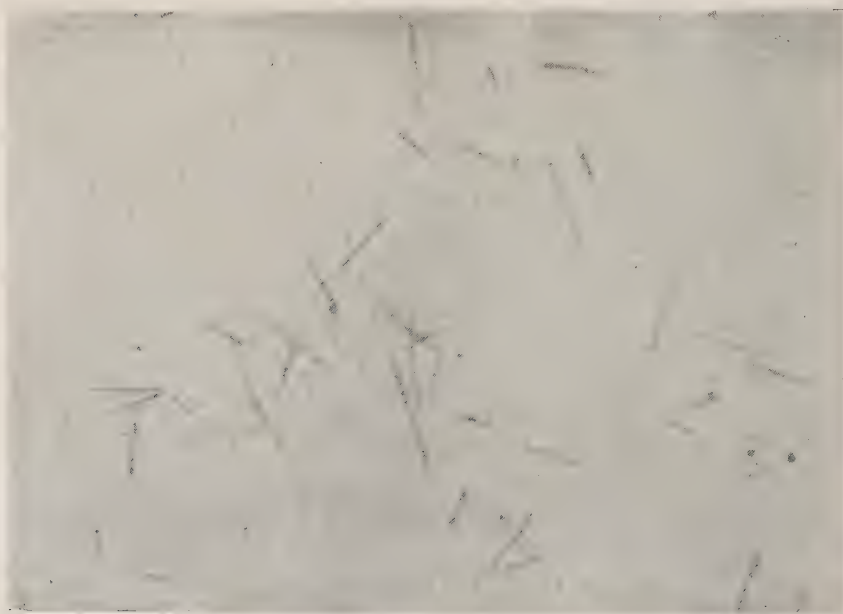


Fig. 2. – Microfotografia dell'emulsione nucleare in corrispondenza di un cristallo di titanite. Ingrandimento 666  $\times$ .

Di notevole interesse appare la nostra osservazione su lo stato metamittico dell'ortite, poichè consente di mettere in relazione il fenomeno metamittico con la distribuzione non omogenea degli elementi radioattivi nell'interno dei singoli individui cristallini di ortite.

Data la grande importanza geochimica che si annette alla conoscenza del rapporto Th/U nei minerali, ci è parso di considerevole interesse la determinazione di tale rapporto per la titanite. È stato a tale scopo eseguito, con una tecnica modernissima, lo spettro  $\alpha$  del minerale, la cui interpretazione ci ha consentito di stabilire il rapporto Th/U che risulta uguale ad 1.

I risultati quindi di queste ricerche convalidano la nostra opinione sull'arbitrarietà di ritenere a priori che questo rapporto nei minerali contenenti uranio e torio come costituenti minori debba essere costantemente uguale a 3.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] BACHELET F., FERRETTI SFORZINI M. e IPPOLITO F., *Studio della radioattività di lave vesuviane*, « Nuovo Cimento », ser. IX, 8, 851 (1951).
- [2] BARBERA L., CURATOLO M., INDOVINA ADDARIO M. M., PALUMBO D. e SANTANGELO M., *Radioattività di una lava etnea. Studio quantitativo*, « Annali di Geofisica », 6, 161 (1953).
- [3] BELLANCA A., CURATOLO M. e SANTANGELO M., *Sul contenuto radioattivo dei calcari bituminosi di Ragusa*, « Atti del I Convegno di Geologia Nucleare », 42 (1955).
- [4] BUTTLAR H. V. e HOUTERMANS F. G., *Photographische Messung des U- und Th-Gehaltes nach der Auflagemethode*, « Geochim. et Cosmochim. Acta », 2, 43 (1951).
- [5] COPPENS R., *Etude de la radioactivité de quelques roches par l'émulsion photographique*, « Bull. Soc. Franc. Min. Crist. », 73, 217 (1950).
- [6] COPPENS R., *Sur la radioactivité des cristaux de sphène contenus dans le granite de Ploumanac'h (Côtes-du-Nord)*, « Bull. Soc. Franc. Min. Crist. », 75, 584 (1952).
- [7] FACCHINI U., FORTE M., MALVICINI A. e ROSSINI T., *Nuovi tipi di camere di ionizzazione e loro applicazione allo studio dei minerali radioattivi*, « Energia nucleare », 3, 182 (1956).
- [8] FACCHINI U., FORTE M., MALVICINI A. e ROSSINI T., *Analysis of U and Th Minerals by Alpha Spectrum*, « Nucleonics », 14, n. 9, 126 (1956).
- [9] FACCHINI U. e MALVICINI A., *La camera di ionizzazione a griglia nello studio della radioattività  $\alpha$  contenuta nell'aria*, « Energia nucleare », 2, 490 (1955).
- [10] FACCHINI U. e MALVICINI A., *Alpha-Spectra Ion Chambers*, « Nucleonics », 14, n. 5, 96 (1956).
- [11] FERRETTI SFORZINI M., FESTA C. e IPPOLITO F., *Sulla applicazione del metodo delle emulsioni nucleari allo studio della radioattività delle lave vesuviane*, « Annali di Geofisica », 7, 539 (1954).
- [12] HAYASE I., *The Radioactivity of Rocks and Minerals studied with Nuclear Emulsion. II. Thorium Content of Granitic Allanites*, « Memoirs of the College of Science, University of Kyoto », ser. B, 21, 171 (1954).
- [13] HÉE A., *Recherches sur la radioactivité d'un granite des Vosges par la méthode photographique*, « Ann. Géophys. », 4, 242 (1948).
- [14] HIEKE MERLIN O., PICCIOTTO E. e WILGAIN S., *Studio sulla distribuzione della radioattività nella granodiorite dell'Adamello*, « Memorie degli Istituti di Geologia e Mineralogia dell'Università di Padova », vol. XIX, Padova, 1955.
- [15] HIEKE MERLIN O., PICCIOTTO E. e WILGAIN S., *Etude photographique de la distribution de la radioactivité dans la granodiorite de l'Adamello*, « Geochim. et Cosmochim. Acta », 11, 171 (1957).



- [16] IMBÒ G. e CASERTANO L., *Deduzione delle concentrazioni di Uranio e Torio nelle sostanze radioattive con il metodo fotografico*, « Annali di Geofisica », 5, 1 (1952).
- [17] IMBÒ G. e CASERTANO L., *Analisi radioattiva delle rocce col metodo fotografico*, « Annali di Geofisica », 6, 315 (1953).
- [18] IPPOLITO F., *Sulla radioattività delle lave del Somma-Vesuvio*, « Boll. Soc. Natur. Napoli », 60, 53 (1951).
- [19] KEEVIL N. B., *Thorium-uranium ratios in rocks and minerals*, « Amer. J. Sc. », 242, 309 (1944).
- [20] LARSEN E. S. e PHAIR G., *The distribution of uranium and thorium in igneous rocks*, In « Nuclear Geology », New York, 1954.
- [21] PELLAS P., *Sur la répartition du thorium dans les allanites*, « Bull. Soc. Franc. Min. Crist. », 78, 257 (1955).
- [22] PICCIOTTO E.-E., *L'étude de la radioactivité des roches par la méthode photographique*, « Bull. Soc. Belge Géol. Pal. Hydrol. », 58, 75 (1949).
- [23] PICCIOTTO E.-E., *Distribution de la radioactivité dans les roches éruptives*, « Bull. Soc. Belge Géol. Pal. Hydrol. », 59, 170 (1950).
- [24] SMITH W. L., FRANCK M. L. e SHERWOOD A. M., *Uranium and thorium in the accessory allanite of igneous rocks*, « Amer. Mineral. », 42, 367 (1957).
- [25] STIEFF L. R. e STERN T. W., *Preparation of nuclear-track plates and stripping films for the study of radioactive minerals*, « Amer. Mineral. », 37, 184 (1952).
- [26] TAMBURINO S. e STELLA A., *Determinazione della radioattività di una pegmatite di Delianova mediante emulsioni nucleari esposte a strati di roccia polverizzata e compressa ed a sezioni sottili*, « Notizie di Mineralogia Siciliana e Calabrese », fasc. IV, 14 (1952).
- [27] YAGODA H., *Radioactive measurements with nuclear emulsions*, New York, 1949.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi matematica.** — *Sopra le estremaloidi di una classe di problemi variazionali.* Nota (\*) di SILVIO CINQUINI, presentata dal Socio G. SANSONE.

Le presenti righe fanno seguito a una Nota, in corso di stampa in questi « Rendiconti »<sup>(1)</sup>, sulle estremali di ordine 2 relative a integrali curvilinei in forma parametrica dipendenti dagli elementi differenziali dei primi due ordini

$$\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)} = \int_{C^{(2)}} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s)) ds.$$

(\*) Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1957.

(1) S. CINQUINI, *Sopra le estremali di una classe di problemi variazionali*, questi « Rendiconti », vol. XXIII, fasc. 1-2, pp. 22-28 (1957).

Per tutte le generalità rinviamo a tale Nota, che, nel seguito, indicheremo con N. I. Ci limitiamo a ricordare, sommariamente, che la funzione  $F(x, y, x', y', \theta')$  è continua insieme con le sue derivate parziali del primo ordine e positivamente omogenea di grado 1 in  $x', y'$ , e che si considerano le curve ordinarie  $C^{(2)}: x = x(s), y = y(s)$ , ( $0 \leq s \leq L$ ), (ove  $s$  è l'arco rettificato), con  $x(s), y(s)$  assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine e tali che esista finito l'integrale (di Lebesgue)  $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ , ove  $\theta'(s)$  è la curvatura.

Mediante le (2) del n. 1, *a*) vengono definite le estremaloidi di ordine 2, e si rileva qualche condizione sufficiente, affinchè una curva minimante l'integrale  $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$  sia un'estremaloide di ordine 2. A differenza da quanto avviene nei problemi variazionali del primo ordine in forma parametrica, nei quali ogni curva ordinaria minimante è un'estremaloide, nel caso in esame tale proprietà sussiste, in condizioni del tutto generali per la funzione  $F(x, y, x', y', \theta')$ , quando la curva ordinaria  $C^{(2)}$ , minimante  $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$ , ha l'angolo di direzione  $\theta(s)$  a rapporto incrementale limitato (n. 3, *a*)), mentre, se tale condizione non è soddisfatta, si suppone che le derivate parziali del primo ordine di  $F(x, y, x', y', \theta')$  verifichino opportune disuguaglianze: in altri termini, i problemi variazionali in considerazione presentano, anche in questo capitolo <sup>(2)</sup>, difficoltà analoghe a quelle dei problemi del primo ordine in forma ordinaria. Significativo è il teorema che enunciamo al n. 2, rinviando, per ragioni di spazio, ad altro breve lavoro <sup>(3)</sup> la sua dimostrazione, a proposito della quale ci limitiamo a far presente che, per quanto essa faccia uso di un procedimento di tipo ben noto, questo deve essere opportunamente adattato per superare alcune difficoltà inerenti alla classe di problemi variazionali in questione e che traggono origine dal fatto che la curvatura non è un funzionale additivo.

Il teorema del n. 2 <sup>(4)</sup> può dar adito alla domanda, se si possano sostituire alle disuguaglianze (6) e (7) condizioni più ampie: da un lato sussiste il fatto che nelle equazioni delle estremaloidi di ordine 2 figura, sotto il segno di integrale, il prodotto  $\theta'(s) F_{\theta'}(\dots)$ ; d'altra parte ci sono gli ostacoli che la stessa dimostrazione del n. 2 mette in luce. Può sorgere l'idea di partire da un'*opportuna* variazione della curvatura, ma allora, a quanto pare, le difficoltà si presentano nella precisazione delle corrispondenti variazioni di  $x(s)$ ,  $y(s)$ : ad ogni modo sembra che questa idea, anche quando venisse realizzata, potrebbe condurre a un'unica equazione delle estremaloidi di ordine 2.

Indicato qualche caso particolare e qualche esempio (n. 3) per mettere in luce l'efficacia del nostro teorema del n. 2, vengono accennate alcune proprietà delle estremaloidi di ordine 2, le quali si presentano utili per assicurare (n. 6) l'esistenza di almeno un'estremale di ordine 2 congiungente due punti qualunque prefissati, nei quali è assegnato anche l'angolo di direzione.

I. DEFINIZIONE. — *a*) Chiamiamo *estremaloide di ordine 2* relativa alla funzione  $F(x, y, x', y', \theta')$  ogni curva ordinaria  $C^{(2)}$  (N. I, n. 1)

$$(1) \quad x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad , \quad (0 \leq s \leq L),$$

(2) Cfr. quanto è detto nei nostri lavori citati in <sup>(1)</sup> di N. I.

(3) S. CINQUINI, *Sopra un teorema relativo alle estremanti di una classe di problemi variazionali*. In corso di stampa negli « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa ».

(4) Le condizioni di validità del teorema del n. 2 sono più ampie di quelle nelle quali è valido un risultato che si può trarre da una Memoria di N. BOGOLIOUBOFF, citata in <sup>(2)</sup> di N. I, nella quale i problemi in questione erano impostati in una forma un po' diversa dalla nostra.

ove  $s$  è la lunghezza dell'arco rettificato, tale che: 1° le derivate parziali  $F_x(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s))$ ,  $F_y(\dots)$ ,  $F_{\theta'}(\dots)$ , nonché le espressioni  $F_{x'}(\dots) - 2x'(s)\theta'(s)F_{\theta'}$ ,  $F_{y'}(\dots) - 2y'(s)\theta'(s)F_{\theta'}$  risultano integrabili (secondo Lebesgue) sull'intervallo  $(0, L)$ ; 2° per ogni  $s$  di  $(0, L)$  sono soddisfatte le equazioni

$$(2) \quad \begin{cases} \int_0^s ds \int_0^s F_x ds - \int_0^s [F_{x'} - 2x'\theta'F_{\theta'}] ds - \frac{d}{ds} \int_0^s y'F_{\theta'} ds = C_1 + C_2 s \\ \int_0^s ds \int_0^s F_y ds - \int_0^s [F_{y'} - 2y'\theta'F_{\theta'}] ds + \frac{d}{ds} \int_0^s x'F_{\theta'} ds = C_3 + C_4 s, \end{cases}$$

ove  $C_1, C_2, C_3, C_4$  sono quattro costanti.

b) È evidente che, se la (1) è un'estremaloide di ordine 2 che ammette finita e continua, in tutto  $(0, L)$ , la curvatura  $\theta'(s)$ , allora la (1) è anche un'estremale di ordine 2.

Infatti in tal caso dalle (2) segue per tutti gli  $s$  di  $(0, L)$

$$(3) \quad \begin{cases} \int_0^s ds \int_0^s F_x ds - \int_0^s [F_{x'} - 2x'\theta'F_{\theta'}] ds - y'F_{\theta'} = C_1 + C_2 s \\ \int_0^s ds \int_0^s F_y ds - \int_0^s [F_{y'} - 2y'\theta'F_{\theta'}] ds + x'F_{\theta'} = C_3 + C_4 s, \end{cases}$$

e si conclude immediatamente come al n. 2 di N. I.

c) È pure ovvio che, se  $\mathfrak{D}_{C(2)}^{(2)}$  è un integrale quasi regolare normale, ogni estremaloide di ordine 2, sulla quale l'angolo di direzione  $\theta(s)$  è a rapporto incrementale limitato, è un'estremale di ordine 2.

Infatti per quasi tutti gli  $s$  di  $(0, L)$  sono verificate le (3), dalle quali segue in modo ovvio

$$(4) \quad \begin{aligned} F_{\theta'} &= y' \int_0^s ds \int_0^s F_x ds - x' \int_0^s ds \int_0^s F_y ds - y' \int_0^s [F_{x'} - 2x'\theta'F_{\theta'}] ds + \\ &+ x' \int_0^s [F_{y'} - 2y'\theta'F_{\theta'}] ds - (C_1 + C_2 s)y' + (C_3 + C_4 s)x', \end{aligned}$$

e l'asserto si prova in modo ben noto <sup>(5)</sup>.

2. TEOREMA. - Supponiamo che, in corrispondenza a ogni campo limitato  $A_\lambda$  appartenente ad  $A$ , si possano determinare sei numeri positivi  $N_1, N_2, N_3, R < 1, \eta < 1, H \geq 1$  in modo che in tutti i punti  $(x, y)$  di  $A_\lambda$ ,

(5) Cfr. L. TONELLI, luogo cit. in (5) di N. I, vol. II, n° 96, d) e 34, d).

per tutte le coppie  $x', y'$  normalizzate, per ogni coppia  $\varphi_0, \varphi_1$  con  $\varphi_0^2 + \varphi_1^2 \leq R^2$ , e per qualunque coppia  $\theta', \tilde{\theta}'$  con  $|\theta'| \geq H$ ,

$$(5) \quad (1 - \eta) |\theta'| \leq |\tilde{\theta}'| \leq (1 + \eta) |\theta'|$$

risulti

$$(6) \quad \begin{cases} |F_x(x + \varphi_0, y, x' + \varphi_1, y', \tilde{\theta}')| \leq N_1 |F(x, y, x', y', \theta')| + N_2 |\theta'| + N_3 \\ |F_{x'}(x + \varphi_0, y, x' + \varphi_1, y', \tilde{\theta}')| \leq N_1 |F(x, y, x', y', \theta')| + N_2 |\theta'| + N_3 \\ |\theta' F_{\theta'}(x + \varphi_0, y, x' + \varphi_1, y', \tilde{\theta}')| \leq N_1 |F(x, y, x', y', \theta')| + N_2 |\theta'| + N_3, \end{cases}$$

ove il punto  $(x + \varphi_0, y)$  appartiene al campo  $A$ , e anche

$$(7) \quad \begin{cases} |F_y(x, y + \varphi_0, x', y' + \varphi_1, \tilde{\theta}')| \leq N_1 |F(x, y, x', y', \theta')| + N_2 |\theta'| + N_3 \\ |F_{y'}(x, y + \varphi_0, x', y' + \varphi_1, \tilde{\theta}')| \leq N_1 |F(x, y, x', y', \theta')| + N_2 |\theta'| + N_3 \\ |\theta' F_{\theta'}(x, y + \varphi_0, x', y' + \varphi_1, \tilde{\theta}')| \leq N_1 |F(x, y, x', y', \theta')| + N_2 |\theta'| + N_3, \end{cases}$$

ove il punto  $(x, y + \varphi_0)$  appartiene al campo  $A$ .

Sotto queste ipotesi, se  $C_0^{(2)}$  è una curva ordinaria  $C^{(2)}$  minimante  $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$  in una classe  $K^{(2)}$  di curve ordinarie  $C^{(2)}$ , ogni arco  $\bar{C}_0^{(2)}$  di  $C_0^{(2)}$ , i cui punti, ad eccezione al più di quelli terminali, sono interni al campo  $A$  e di indifferenza rispetto ad  $A$  e a  $K^{(2)}$ , è un'estremaloide di ordine 2 relativa alla funzione  $F(x, y, x', y', \theta')$ .

OSSERVAZIONE. — In virtù della (5) il teorema del presente n° è ancora valido, se ai prodotti che figurano nel primo membro dell'ultima (6) e (7) si sostituiscono i rispettivi prodotti  $|\theta' F_{\theta'}(\dots)|$ .

3. DUE CASI PARTICOLARI. — a) È evidente che, se sull'arco  $\bar{C}_0^{(2)}$  l'angolo di direzione  $\theta(s)$  è a rapporto incrementale limitato, le disuguaglianze (6) e (7) sono sempre verificate; vale a dire, in forma concisa, ogni arco di curva minimante  $\mathfrak{J}_{C^{(2)}}^{(2)}$  sul quale l'angolo di direzione  $\theta(s)$  è a rapporto incrementale limitato, è un'estremaloide di ordine 2.

b) Le condizioni del teorema del n. 2 sono verificate, se, in corrispondenza a ogni campo limitato  $A_\lambda$  appartenente ad  $A$ , esistono cinque numeri  $\alpha > 0$ ,  $M_0 > 0$ ,  $M_1 > 0$ ,  $M_2 > 0$ ,  $m_0$ , in modo che in tutti i punti  $(x, y)$  di  $A_\lambda$ , per ogni coppia  $x', y'$  normalizzata e per qualunque valore di  $\theta'$  sia

$$(8) \quad M_0 |\theta'|^\alpha + m_0 \leq |F(x, y, x', y', \theta')|$$

$$(9) \quad \begin{cases} |F_x(x, y, x', y', \theta')| \leq M_1 |\theta'|^\alpha + M_2 \\ |F_y(x, y, x', y', \theta')| \leq M_1 |\theta'|^\alpha + M_2 \\ |F_{x'}(x, y, x', y', \theta')| \leq M_1 |\theta'|^\alpha + M_2 \\ |F_{y'}(x, y, x', y', \theta')| \leq M_1 |\theta'|^\alpha + M_2 \\ |\theta' F_{\theta'}(x, y, x', y', \theta')| \leq M_1 |\theta'|^\alpha + M_2, \end{cases}$$

ove, se è  $\alpha \leq 1$ , la (8) è superflua.



Tenuta presente la (5) e tenuto conto dell'Osservazione del n. 2, l'asserto è evidente.

OSSERVAZIONE. - Il caso particolare, che forma oggetto del presente capoverso, mette in luce la maggior generalità del teorema del n. 2 in confronto al risultato che si può trarre dalla citata Memoria di Bogoliouboff, nella quale i problemi in questione erano impostati in una forma un po' diversa <sup>(6)</sup>.

c) *Esempi.* - Alle condizioni del teorema del n. 2 soddisfano le funzioni <sup>(7)</sup>:

$$F(x, y, x', y', \theta') = \sqrt{x'^2 + y'^2} \theta'^4 \lg(1 + \theta'^2),$$

$$F(x, y, x', y', \theta') = \sqrt{x'^2 + y'^2} \sqrt[2m]{1 + \theta'^{2m}}, \quad \text{ove } 2m < n.$$

4. Se in ogni campo limitato  $A_\lambda$  appartenente ad  $A$ ,  $|F_{\theta'}(x, y, x', y', \theta)|$  tende uniformemente a  $+\infty$  per  $\theta' \rightarrow +\infty$  [per  $\theta' \rightarrow -\infty$ ], allora su ogni estremaloide di ordine 2, relativa alla funzione  $F(x, y, x', y', \theta')$  e appartenente ad  $A$ , l'angolo di direzione  $\theta(s)$  è a rapporto incrementale superiormente [inferiormente] limitato.

Infatti per quasi tutti gli  $s$  è verificata la (4), e basta ragionare in modo ben noto <sup>(8)</sup>.

5. In virtù del n. 1, c) è evidente che, se  $\mathfrak{J}_{C(2)}^{(2)}$  è un integrale quasi-regolare normale, e se è verificata, sia per  $\theta' \rightarrow +\infty$ , sia per  $\theta' \rightarrow -\infty$ , la condizione del n. 4, allora ogni estremaloide di ordine 2 è anche un'estremale di ordine 2.

6. ESISTENZA DELL'ESTREMALE DI ORDINE 2. - a) Se il campo  $A$  è costituito da tutti i punti del piano  $(x, y)$ , se sono soddisfatte sia le condizioni del teorema di esistenza del n. 23 di una nostra precedente Memoria <sup>(9)</sup> sia le condizioni dei nn. 2 e 5 della presente Nota, allora considerati due punti qualunque  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  del piano  $(x, y)$  e fissati in questi punti i valori dell'angolo di direzione, esiste sempre almeno un'estremale di ordine 2 congiungente i punti  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  e avente in essi come tangente le rispettive direzioni fissate.

b) *Esempio.* - La funzione

$$F(x, y, x', y', \theta') = \sqrt{x'^2 + y'^2} \left[ \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2} + \theta'^2 \lg(1 + \theta'^2) \right],$$

soddisfa a tutte le condizioni del capoverso a) <sup>(10)</sup>.

(6) Basta confrontare le nostre (8) e (9) con le (62) e (46), che figurano alle pp. 225 e 216 del lavoro di BOGOLIOUBOFF citato in <sup>(4)</sup>.

(7) Per maggiori particolari vedi S. CINQUINI, luogo cit. in <sup>(3)</sup>, n. 3.

(8) Vedi L. TONELLI, *Sulle proprietà delle estremanti*, « Annali Scuola Normale Superiore di Pisa », serie II, vol. III (1934), pp. 213-237; in particolare nn. 3 e 4.

(9) Vedi S. CINQUINI, luogo cit. per terzo in <sup>(1)</sup> di N. I, § 4, p. 46.

(10) Cfr. S. CINQUINI, luogo cit. in <sup>(3)</sup>, n. 3, c).

**Teoria dei numeri.** — *Nuove dimostrazioni del teorema di Fermat, del teorema di Fermat generalizzato da Eulero, e del teorema di Wilson.* Nota (\*) di CARLO CELLITTI, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

Scopo di questa breve Nota è di dimostrare il teorema di Fermat e il teorema di Wilson utilizzando la nozione di radice primitiva di un numero primo  $p$ , e di dimostrare, inoltre, il teorema di Fermat generalizzato da Eulero, servendomi del teorema di Fermat.

1. TEOREMA di FERMAT. — Se  $p$  è primo, per ogni intero  $a$ , non multiplo di  $p$ , è

$$(1) \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

*Dimostrazione.* — Indicando con  $g$  una qualsiasi radice primitiva di  $p$ , per quanto sappiamo, i  $p-1$  numeri di ciascuna delle due serie

$$g^0, g^1, g^2, \dots, g^{p-2}$$

$$g^1, g^2, \dots, g^{p-2}, g^{p-1}$$

sono congrui (mod.  $p$ ), a meno dell'ordine, ai numeri  $1, 2, 3, \dots, p-1$ ; e, pertanto, essendo  $g^0 = 1$ , deve necessariamente aversi

$$(2) \quad g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

E poichè esiste sempre uno ed un solo intero  $\lambda < p$  per il quale è

$$(3) \quad g^\lambda \equiv a \pmod{p},$$

si scorge subito che, elevando la (2) alla potenza  $\lambda$  e la (3) alla potenza  $p-1$ , segue la (1), come era da dimostrare.

2. TEOREMA di FERMAT GENERALIZZATO DA EULERO. — Per ogni intero  $a$  primo con  $n$  è

$$(4) \quad a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n},$$

$\varphi(n)$  essendo il numero dei numeri primi con  $n$  ed inferiori ad  $n$ .

*Dimostrazione.* — Semplicissima è la dimostrazione della (4) quando il numero composto  $n$  è della forma  $n = p^\lambda$ , con  $p$  primo. Per quanto sappiamo, è  $\varphi(n) = \varphi(p^\lambda) = (p-1)p^{\lambda-1}$ , e, quindi, si tratta di dimostrare che

$$(5) \quad a^{(p-1)p^{\lambda-1}} \equiv 1 \pmod{p^\lambda}.$$

Ricorrendo al principio di induzione completa, si osserva che la (5) è vera per  $\lambda = 1$ . In tale ipotesi, infatti, essa si risolve nel teorema di Fermat, es-

(\*) Pervenuta all'Accademia il 2 settembre 1957.

sendo  $\varphi(p) = p - 1$ . Rimane a dimostrare che, supposta vera per un altro valore intero positivo di  $\lambda$  che, per comodità di esposizione, indichiamo con la stessa lettera  $\lambda$ , essa risulta vera anche per  $\lambda + 1$ . Si osserva, a tal uopo, che dalla (5) segue

$$a^{(p-1)p^{\lambda-1}} = kp^{\lambda} + 1$$

da cui

$$a^{(p-1)p^{\lambda}} = (kp^{\lambda} + 1)^p.$$

Lo sviluppo della potenza  $p$ , indicata al secondo membro di questa uguaglianza, ha i suoi termini tutti divisibili per  $p^{\lambda+1}$ , tranne l'ultimo che è uguale ad 1, e, quindi,

$$a^{(p-1)p^{\lambda}} \equiv 1 \pmod{p^{\lambda+1}}.$$

Poichè questa congruenza è, per l'appunto, quella che si ottiene dalla (5) sostituendo a  $\lambda$  il suo successivo  $\lambda + 1$ , se ne conclude che la (5) è vera per qualunque valore intero positivo di  $\lambda$ .

3. Estendiamo, ora, la dimostrazione data al caso generale del numero composto  $n = p_1^{\lambda_1} \cdot p_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\lambda_r}$ , essendo i  $p_i$  numeri primi.

Ricordiamo, intanto, che è

$$(7) \quad \varphi(n) = \varphi(p_1^{\lambda_1}) \cdot \varphi(p_2^{\lambda_2}) \cdot \dots \cdot \varphi(p_r^{\lambda_r}).$$

Il numero  $a$ , essendo primo con  $n$ , non sarà multiplo di alcuno dei  $p_i$ , e, quindi, per quanto si è dimostrato, possiamo scrivere:

$$a^{\varphi(p_1^{\lambda_1})} \equiv 1 \pmod{p_1^{\lambda_1}}$$

$$a^{\varphi(p_2^{\lambda_2})} \equiv 1 \pmod{p_2^{\lambda_2}}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a^{\varphi(p_r^{\lambda_r})} \equiv 1 \pmod{p_r^{\lambda_r}}.$$

Ovvero, avendo presente la (7),

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{p_1^{\lambda_1}}$$

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{p_2^{\lambda_2}}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{p_r^{\lambda_r}}.$$

Ne segue che  $a^{\varphi(n)} - 1$ , essendo divisibile per i numeri  $p_1^{\lambda_1}, p_2^{\lambda_2}, \dots, p_r^{\lambda_r}$ , primi fra loro, sarà divisibile anche per il loro prodotto  $n$ , e quindi,

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

come era da dimostrare.

4. TEOREMA DI WILSON. — Se  $p$  è primo, l'espressione

$$1, 2, 3, \dots, (p-1) + 1$$

è divisibile per  $p$ , e reciprocamente.

*Dimostrazione.* — Sia  $g$  una radice primitiva di  $p$ . Dalle  $p-1$  congruenze che servono a definirla segue l'altra

$$g^{1+2+\dots+(p-1)} + 1 \equiv 1, 2, \dots, (p-1) + 1 \pmod{p}$$

e, quindi, la dimostrazione del teorema è ricondotta a far vedere che

$$(9) \quad g^{p(p-1)/2} + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

A tal uopo si osserva che da

$$g^{p(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$$

segue

$$(g^{p(p-1)/2} + 1)(g^{p(p-1)/2} - 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

e che dei due fattori del prodotto indicato al primo membro di quest'ultima congruenza uno solo è divisibile per  $p$ , perchè, se lo fossero entrambi, lo sarebbero anche la loro somma e la loro differenza, il che, invece, non è possibile. Rimane a dimostrare che il secondo è quello non divisibile per  $p$ . Ed infatti, se fosse

$$g^{p(p-1)/2} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

ricordando che

$$g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

si avrebbe anche

$$g^{p(p-1)/2} - g^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

ovvero

$$g^{p-1}(g^{p(p-1)/2 - p + 1} - 1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

E poichè  $g^{p-1}$  non è divisibile per  $p$ , dovremmo avere

$$g^{(p-1)(p-2)/2} \equiv 1 \pmod{p}$$

il che significa che  $(p-2)/2$  dovrebbe essere un numero intero; poichè ciò non è possibile, rimane dimostrata la (9), e, quindi, l'espressione (8) è divisibile per  $p$ , come era da dimostrare.

Per il teorema reciproco nulla di nuovo abbiamo da riferire.



**Gasdinamica.** — *Sulla velocità di dissociazione di un gas biatomico* <sup>(\*)</sup>. Nota <sup>(\*\*)</sup> di GIANNI JARRE, presentata dal Corrisp. C. FERRARI.

In recenti studi sulla dissociazione prodotta in gas biatomici da intense onde d'urto, in mancanza di dati sperimentali diretti, si formula la velocità di reazione utilizzando la teoria collisionale (Wood, 1956) eventualmente corretta in base a informazioni sperimentali indirette (Evans, 1956).

Ricorrendo alla cinetica chimica assoluta, formuliamo e discutiamo un'espressione della velocità di reazione da utilizzare in studi in corso sul moto ipersonico di gas biatomici.

### 1. La velocità di una reazione del tipo



è la differenza fra la velocità della dissociazione unimolecolare e la velocità della riassociazione bimolecolare:

$$(2) \quad R = \overset{\rightarrow}{k} n_{x_2} - \overset{\leftarrow}{k} n_x^2 \quad \text{molecole } X_2/\text{cm}^3 \text{ sec}$$

$\overset{\rightarrow}{k}(\text{sec}^{-1})$  e  $\overset{\leftarrow}{k}(\text{cm}^3/\text{molecola sec})$  sono le costanti di reazione e  $n_i$  sono le densità parziali ( $\text{molecole}/\text{cm}^3$ ).

La cinetica chimica assoluta postula l'esistenza di uno stato intermedio fra la molecola e i due atomi, denominato complesso attivato, le cui proprietà determinano la velocità di reazione.

Indichiamo con  $E$ ,  $H$ ,  $F^\circ$ ,  $S^\circ$ ,  $N$  rispettivamente: energia interna, entalpia, energia libera standard ( $\text{cal}/\text{mole}$ ), entropia standard ( $\text{cal}/\text{mole}^\circ\text{K}$ ), coefficiente stechiometrico. Con i simboli illustrati in fig. 1 esprimiamo anzitutto le note relazioni termodinamiche:

$$(3, a) \quad \overset{\rightarrow}{\Delta F^\circ} = \overset{\rightarrow}{\Delta H} - T \overset{\rightarrow}{\Delta S^\circ} = \overset{\rightarrow}{\Delta E} + RT \overset{\rightarrow}{\Delta N} - T \overset{\rightarrow}{\Delta S^\circ}$$

$$(3, b) \quad \Delta F^\circ = \Delta H - T \Delta S^\circ = \Delta E + RT \Delta N - T \Delta S^\circ$$

$R$  è la costante universale dei gas ( $= 1,987 \text{ cal}/\text{mole}^\circ\text{K}$ ),  $T$  è la temperatura assoluta ( $^\circ\text{K}$ ). Dato che utilizziamo le densità parziali  $n_i$  abbiamo posto  $F^\circ = F(T, n^\circ)$  e  $S^\circ = S(T, n^\circ)$ , in cui per la densità standard  $n^\circ$  adotteremo il valore:

$$(4) \quad n^\circ = 2,46 \cdot 10^{19} \quad \text{molecole}/\text{cm}^3$$

(\*) La presente ricerca è stata effettuata in parte sotto il patrocinio dell'« Air Research and Development Command United States Air Force », tramite l'Ufficio Europeo ARDC, con contratto AF61 (514)-1124.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1957.

caratteristico di un gas perfetto a 1 atm. e  $25^{\circ}\text{C} = 298,16^{\circ}\text{K}$ . Le due costanti di reazione non sono indipendenti, ma legate dalla condizione di equilibrio chimico, che scriviamo nella forma adimensionale:

$$(5) \quad \frac{\vec{\kappa}}{n^{\circ} \overleftarrow{\kappa}} = \left[ \frac{n_x^2}{n^{\circ} n_{x_2}} \right]_{\text{equil}} = K = e^{-\Delta F^{\circ}/RT}.$$

La prima uguaglianza è dedotta annullando la velocità di reazione (2) la seconda definisce la costante di equilibrio costruita con le densità parziali e resa adimensionale, la terza esprime la nota condizione termodinamica di equilibrio.



Fig. 1.

Con la (5) possiamo scrivere la (2) nella forma:

$$(6) \quad \mathfrak{R} = \vec{\kappa} \left[ n_{x_2} - \frac{n_x^2}{n^{\circ}} e^{\Delta F^{\circ}/RT} \right].$$

La cinetica chimica assoluta (Glasstone-Leidler-Eyring, 1941), esprime la costante di dissociazione nella forma:

$$(7) \quad \vec{\kappa} = \frac{kT}{h} e^{-\vec{\Delta F^{\circ}}/RT}.$$

$k$  è la costante di Boltzmann ( $= 1,380 \cdot 10^{-16}$  erg/molecola  $^{\circ}\text{K}$ ),  $h$  è la costante di Planck ( $= 6,624 \cdot 10^{-27}$  erg sec/molecola).

È conveniente scomporre le costanti di reazione, per mezzo delle (3), in due fattori:

$$(8) \quad \vec{\kappa} = \vec{\varphi} \vec{\alpha} \quad \overleftarrow{\kappa} = \overleftarrow{\varphi} \overleftarrow{\alpha}$$

$\varphi$  sono i fattori di frequenza (o entropici):

$$(9, a) \quad \vec{\varphi} = \frac{kT}{h} e^{\vec{\Delta S^{\circ}}/R}$$

$$(9, b) \quad \overleftarrow{\varphi} = \overleftarrow{\varphi} / n^{\circ} e^{\overleftarrow{\Delta S^{\circ}}/R}$$

$\alpha$  sono i fattori di Arrhenius (o entalpici):

$$(10, a) \quad \vec{\alpha} = e^{-\vec{\Delta H}/RT}$$

$$(10, b) \quad \overleftarrow{\alpha} = \vec{\alpha} e^{\Delta H/RT}.$$

Energie ed entropie di attivazione e di dissociazione dipendono dalla temperatura; ma siccome i termini di formazione sono molto maggiori di quelli termici, ammetteremo per semplicità che siano costanti  $\Delta E$ ,  $\vec{\Delta E}$ ,  $\Delta S^\circ$ ,  $\vec{\Delta S}^\circ$ . Discuteremo più avanti questa approssimazione, che ora permette di caratterizzare il complesso attivato con le tre costanti  $\vec{\Delta E}$ ,  $\vec{\Delta N}$ ,  $\vec{\Delta S}^\circ$ , ovvero con la costante  $\Delta S^\circ$  e la funzione  $\vec{\Delta H} = \vec{\Delta E} + RT \vec{\Delta N}$ , lineare in  $T$ .

Indirette informazioni sperimentali descrivono il complesso attivato caratteristico della reazione (1), come l'insieme di *due* atomi già dissociati, ma in uno stato che ha *ancora* l'entropia della molecola:

$$(11, a) \quad \vec{\Delta N} = \Delta N = 1$$

$$(11, b) \quad \vec{\Delta E} = \Delta E$$

$$(11, c) \quad \vec{\Delta S}^\circ = 0.$$

Le (11, a) e (11, b) possono essere compendiate affermando che coincidono le entalpie di attivazione e di dissociazione:

$$(11, d) \quad \vec{\Delta H} = \Delta H.$$

Con la (11, d) i fattori di Arrhenius (10) assumono i valori:

$$(12, a) \quad \vec{\alpha} = e^{-\Delta H/RT} = e^{-1} e^{-\Delta E/RT}$$

$$(12, b) \quad \overleftarrow{\alpha} = 1$$

per cui, in particolare, la costante di reazione  $\overleftarrow{\kappa}$  coincide con il fattore di frequenza  $\overleftarrow{\varphi}$ .

La (11, a) è basata sulla constatazione che la riassociazione di due atomi non richiede energia di attivazione, e la (12, b) è spesso enunciata affermando che la costante  $\overleftarrow{\kappa}$ , essendo priva del fattore di Arrhenius, dipende poco, rispetto a  $\overleftarrow{\kappa}$ , dalla temperatura.

Con la (11, c) i fattori di frequenza (9) assumono i valori:

$$(13, a) \quad \vec{\varphi} = \frac{kT}{h}$$

$$(13, b) \quad \overleftarrow{\varphi} = kT/h\nu^\circ e^{\Delta S^\circ/R}.$$

La (11, *c*) è basata sulla constatazione che il fattore di frequenza  $\vec{\varphi}$  è proprio dell'ordine di  $kT/h$  ( $= 6,21 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1}$  a  $25^\circ\text{C}$ ). Tale constatazione fu fatta su numerose reazioni unimolecolari:

precedentemente alla formulazione (9, *a*) del fattore di frequenza, in un lavoro di Polany e Wigner (1928), citato nel recente testo di Adam (1956).;

successivamente alla formulazione (9, *a*), in un lavoro di Daniels (1943), citato nel recente testo di Hougen e Watson (III vol., 1955). Valori del fattore di frequenza inferiori a  $kT/h$  sono attribuiti a dissociazioni di molecole complesse, con complesso attivato più ordinato della molecola stessa ( $\Delta S^\circ < 0$ ); valori superiori a  $kT/h$  sono attribuiti a veloci reazioni a catena, per le quali non vale lo schema di reazione (1).

Dato che tali eventualità sono da escludere per la dissociazione di una molecola biatomica, accettiamo la proprietà (11 *c*) cioè i valori (13) dei fattori di frequenza.

Non risulta all'A. che esistano conferme della (11, *c*) nella forma (13, *b*). Nel già citato lavoro di Evans si adotta, in base alle indicazioni di numerosi altri autori, il seguente valore del fattore di frequenza  $\overleftarrow{\varphi}$ :

$$(14) \quad \overleftarrow{\varphi} = 10^{-32} n^\circ = 2,46 \cdot 10^{-13} \quad \text{cm}^3/\text{molecola sec (a } 25^\circ\text{C)}$$

per la riassociazione di due atomi di azoto o di ossigeno.

Confrontando con la (13, *b*) otteniamo:

$$(15) \quad \Delta S^\circ = 27,5 \quad \text{cal/mole } ^\circ\text{K (a } 25^\circ\text{C)}.$$

Con ottima approssimazione questo è proprio il valore dell'entropia di dissociazione dell'ossigeno e dell'azoto. Questa constatazione costituisce una conferma della (13, *b*), cioè una conferma della (11, *c*) basata sul comportamento della reazione di riassociazione.

2. Le proprietà (11) del complesso attivato danno alla velocità di reazione (6) la forma seguente:

$$(16) \quad \mathfrak{R} = \frac{kT}{he} e^{-\Delta E/RT} n_{x2} - \frac{kT}{hn^\circ} e^{-\Delta S^\circ/R} n_x^2$$

in cui gli unici parametri caratteristici della molecola che si dissocia sono l'energia  $\Delta E$  e l'entropia  $\Delta S^\circ$  di dissociazione, che, come già detto, riteniamo costanti in prima approssimazione.

Nella tabella I sono raccolte le caratteristiche delle prime 4 molecole biatomiche dei gruppi: dell'azoto (V), dell'ossigeno (VI) e degli alogeni (VII). Sotto al simbolo chimico è indicato il numero atomico; sono tabulate:

le frequenze proprie di vibrazioni  $T_V$  (convertite in  $^\circ\text{K}$ );

le energie di associazioni  $\Delta E_o$  (in cal/mole a  $0^\circ\text{K}$ );

le entropie standard di associazione  $\Delta S_{25}^\circ$  (in cal/mole  $^\circ\text{K}$  a  $25^\circ\text{C}$ ).



TABELLA I.

 $(T_V, \Delta E_o, \Delta S_{25}^o).$ 

gruppo V	gruppo VI	gruppo VII
$N \begin{cases} 3.394 \\ 225.100 \\ 27,46 \end{cases}$ $7$	$O \begin{cases} 2.272 \\ 117.200 \\ 27,93 \end{cases}$ $8$	$F \begin{cases} 1.630 \\ 63.500 \\ 27,23 \end{cases}$ $9$
$P \begin{cases} 1.122 \\ 116.000 \\ 25,83 \end{cases}$ $15$	$S \begin{cases} 1.044 \\ 101.000 \\ 25,79 \end{cases}$ $16$	$Cl \begin{cases} 812 \\ 58.100 \\ 25,62 \end{cases}$ $17$
$As \begin{cases} 617 \\ 90.800 \\ 25,94 \end{cases}$ $33$	$Se \begin{cases} 564 \\ 65.000 \\ 24,20 \end{cases}$ $34$	$Br \begin{cases} 464 \\ 46.300 \\ 24,97 \end{cases}$ $35$
$Sb \begin{cases} 388 \\ 69.000 \\ 25,22 \end{cases}$ $51$	$Te \begin{cases} 361 \\ 53.000 \\ 23,21 \end{cases}$ $52$	$I \begin{cases} 308 \\ 36.400 \\ 24,09 \end{cases}$ $53$

La stessa tabella senza entropie è presentata nel testo di Syrkin e Dyatkina (1950) dal quale abbiamo attinto le frequenze proprie. Dal testo di Gaydon (1953) abbiamo attinto le energie di dissociazione dei gruppi V e VI.

Dal capitolo 2B dell'opera di Rossini (1955), compilato da Herzfeld e Griffing, abbiamo attinto le energie di dissociazione del VII gruppo. Per le entropie di dissociazione abbiamo utilizzato le tavole del N.B.S: «Selected values of Chemical Thermodynamical properties» (1952), in buon accordo con i valori tabulati nel testo di Hougen e Watson (II vol., 1956).

Per ogni riga e per ogni colonna, al crescere del numero atomico diminuiscono non soltanto la frequenza propria e l'energia di dissociazione, ma anche, con piccole irregolarità, l'entropia di dissociazione.

Essendo  $\Delta S^o$  variabile da specie a specie, risultano variabili da specie a specie i fattori di frequenza  $\bar{\varphi}$ , per cui la (14), valida per  $N_2$  e per  $O_2$ , non può essere adottata per altre specie molecolari.

3. Abbiamo per semplicità trascurato la variabilità di  $\Delta E$  e di  $\Delta S^o$  con la temperatura. La nota relazione:

$$(17) \quad \frac{d\Delta E}{dT} = T \frac{d\Delta S^o}{dT}$$

indica anzitutto che è coerente ammettere la simultanea costanza di  $\Delta E$  e di  $\Delta S^o$ .

Dalle (3, 17) si deducono le note equazioni:

$$(18, a) \quad \frac{d(\Delta F^\circ/T)}{d(1/T)} = \Delta E$$

$$(18, b) \quad \frac{d\Delta F^\circ}{dT} = -\Delta S^\circ + R\Delta N.$$

Sostituendovi la costante di equilibrio (5), otteniamo:

$$(19, a) \quad \frac{d \ln K}{d(1/T)} = -\Delta E/R$$

$$(19, b) \quad \frac{d(T \ln K)}{dT} = \Delta S^\circ/R - \Delta N.$$

La prima è la nota isocora di Van't Hoff che determina l'energia di reazione; la seconda, del tutto analoga, determina l'entropia standard di reazione. La (19, b), originale per quanto consta all'A., ha il pregio, rispetto alla classica equazione di Nernst, di determinare  $\Delta S^\circ$  senza preventiva determinazione di  $\Delta E$ .

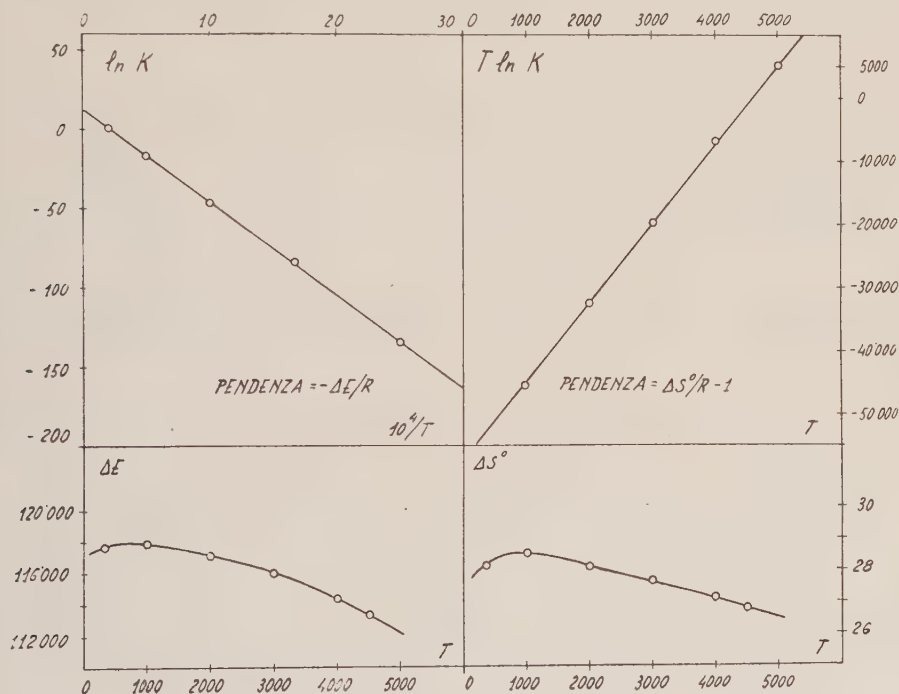


Fig. 2.

Così come la pendenza del diagramma  $(\ln K)$  in funzione di  $(1/T)$  determina  $\Delta E$ , la pendenza del diagramma  $(T \ln K)$  in funzione di  $T$  determina  $\Delta S^\circ$ .

Abbiamo applicato le (19) alla dissociazione dell'ossigeno (fig. 2) utilizzando le costanti di reazione tabulate dal N.B.S. e riprodotte nel testo di Lewis e Von Elbe (1951). Il metodo delle pendenze indica soltanto valori medi; i diagrammi  $\Delta E(T)$  e  $\Delta S^\circ(T)$  sono stati ottenuti con derivazione numerica.

Risulta chiaramente che le variazioni di  $\Delta E$  e di  $\Delta S^\circ$  sono piccole in un vasto campo di temperatura. Si osserva inoltre che  $\Delta E$  e  $\Delta S^\circ$  ammettono insieme un massimo intorno a  $800^\circ \text{K}$ .

Questo massimo è caratteristico di tutte le dissociazioni di molecole biatomiche. La (17) può infatti essere completata nella forma:

$$(20) \quad \frac{d\Delta E}{dT} = T \frac{d\Delta S^\circ}{dT} = \frac{R}{2} \Delta L$$

in cui  $L$  è il numero di gradi di libertà molecolari.

Quando sono eccitati i gradi di libertà classici si ha  $L_X=3$  e, dato che la molecola biatomica è lineare,  $L_{X_2}=5$ ; dalla (20) deduciamo pertanto che in tale situazione  $\Delta E$  e  $\Delta S^\circ$  sono crescenti con  $T$ , essendo

$$\Delta L = 2 \cdot 3 - 5 = +1 > 0.$$

Quando, a temperatura più elevata, è totalmente eccitata la vibrazione della molecola, si ha  $L_X=3$  e  $L_{X_2}=7$ ; dalla (20) deduciamo pertanto che in tale situazione  $\Delta E$  e  $\Delta S^\circ$  sono decrescenti con  $T$ , essendo

$$\Delta L = 2 \cdot 3 - 7 = -1 < 0.$$

Risulta dunque che  $\Delta E$  e  $\Delta S^\circ$  presentano un massimo alla temperatura per cui si ha  $\Delta L = 0$ , cioè quando la molecola ha 6 gradi di libertà ovvero è semi-eccitata la vibrazione.

Tale temperatura, che indichiamo con  $T_M$ , è definita dall'equazione:

$$(21) \quad 2x^2 e^x = (e^x - 1)^2 \quad ; \quad x = T_V/T_M$$

dedotta dalla teoria dell'oscillatore armonico, e che ha per soluzione:

$$(22) \quad T_M = 0,336 T_V.$$

Soltanto per temperature intorno a  $T_M$  sarebbe a rigore lecito ammettere la costanza di  $\Delta E$  e di  $\Delta S^\circ$ .

Analoghe considerazioni si potrebbero fare sulla variabilità di  $\vec{\Delta E}$  e  $\vec{\Delta S^\circ}$  se fosse perfettamente nota la struttura interna del complesso attivato. Ci limitiamo a constatare che la simultanea costanza di  $\Delta E$ ,  $\vec{\Delta E}$ ,  $\Delta S^\circ$ ,  $\vec{\Delta S^\circ}$  comporterebbe a qualsiasi temperatura le seguenti uguaglianze fra i gradi di libertà della molecola, del complesso attivato e dell'atomo:

$$(23) \quad \vec{L}_{X_2} = L_A = 2 L_X.$$

Vale infatti per  $\vec{\Delta E}$ ,  $\vec{\Delta S^\circ}$ ,  $\vec{\Delta L}$ , la stessa equazione (20).

Utilizzando ancora la teoria dell'oscillatore armonico abbiamo calcolato nella tabella II i valori massimi  $\Delta E_M$  e  $\Delta S_M^\circ$ , insieme alla temperatura  $T_M$  data dalla (22), per cui tali massimi si verificano. Il confronto fra le tabelle I e II conferma che le variazioni di  $\Delta E$  (da  $0^\circ \text{K}$  a  $T_M$ ) e di  $\Delta S^\circ$  (da  $25^\circ \text{C}$  a  $T_M$ ), sono piccole.

TABELLA II.  
( $T_M$ ,  $\Delta E_M$ ,  $\Delta S_M^\circ$ ).

gruppo V	gruppo VI	gruppo VII
$\begin{array}{l} \text{F} \left\{ \begin{array}{l} 1.138 \\ 225.900 \\ 28,37 \end{array} \right. \\ 7 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{O} \left\{ \begin{array}{l} 762 \\ 117.700 \\ 28,44 \end{array} \right. \\ 8 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{N} \left\{ \begin{array}{l} 547 \\ 63.900 \\ 27,45 \end{array} \right. \\ 9 \end{array}$
$\begin{array}{l} \text{Cl} \left\{ \begin{array}{l} 376 \\ 116.300 \\ 25,86 \end{array} \right. \\ 15 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{S} \left\{ \begin{array}{l} 350 \\ 101.200 \\ 25,80 \end{array} \right. \\ 16 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{P} \left\{ \begin{array}{l} 272 \\ 58.300 \\ 25,62 \end{array} \right. \\ 17 \end{array}$
$\begin{array}{l} \text{Br} \left\{ \begin{array}{l} 207 \\ 90.900 \\ 26,01 \end{array} \right. \\ 33 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Se} \left\{ \begin{array}{l} 189 \\ 65.100 \\ 24,31 \end{array} \right. \\ 34 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{As} \left\{ \begin{array}{l} 156 \\ 46.400 \\ 25,20 \end{array} \right. \\ 35 \end{array}$
$\begin{array}{l} \text{I} \left\{ \begin{array}{l} 130 \\ 69.100 \\ 25,57 \end{array} \right. \\ 51 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Te} \left\{ \begin{array}{l} 121 \\ 53.100 \\ 23,62 \end{array} \right. \\ 52 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Sb} \left\{ \begin{array}{l} 103 \\ 36.500 \\ 24,62 \end{array} \right. \\ 53 \end{array}$

Avendo sempre trascurato l'eccitazione elettronica, tutti i risultati di questo paragrafo sono approssimati.

I dati della tabella II sono svincolati dalle temperature standard di riferimento ( $0^\circ\text{K}$  per  $\Delta E$  e  $25^\circ\text{C}$  per  $\Delta S^\circ$ ); ma  $\Delta S^\circ$  contiene ancora l'artificiale riferimento alla densità standard  $n^\circ$ . Ai due parametri  $\Delta E_M$  e  $\Delta S_M^\circ$  preferiamo perciò sostituire i seguenti:

la *temperatura di dissociazione*:

$$(24, a) \quad \mathfrak{D} = \Delta E_M / R \quad (^\circ\text{K})$$

la *densità di dissociazione*:

$$(24, b) \quad \nu = n^\circ e^{\Delta S_M^\circ / R} \quad (\text{molecole}/\text{cm}^3).$$

Questi parametri sono elencati nella tabella III.

Con i parametri (24) la velocità di reazione (16) assume la seguente forma definitiva:

$$(25) \quad \mathfrak{R} = \frac{kT}{he} e^{-\theta/T} n_{x2} - \frac{kT}{h\nu} n_x^2 = \frac{kT}{h} \left[ \frac{n_{x2}}{e^{\theta+T}} - \frac{n_x^2}{\nu} \right].$$

Dato che  $\theta$  e  $\nu$  sono costruiti con i valori massimi  $\Delta E_M$  e  $\Delta S_M^\circ$  le costanti di reazione risultano entrambe sottovalutate. Eventuali fattori termici correttivi delle costanti di reazione devono quindi essere sempre maggiori di 1 e tanto più quanto più la temperatura differisce da  $T_M$ ; ma risulteranno sempre prossimi a 1 in virtù della constatata debole variabilità di  $\Delta E$  e  $\Delta S^\circ$ .



TABELLA III.

 $(T_M, \theta, \nu)$ .

gruppo V	gruppo VI	gruppo VII
$\begin{array}{l} \text{N} \left\{ \begin{array}{l} 1.138 \\ 113.700 \\ 3,91 \cdot 10^{25} \end{array} \right. \\ 7 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{O} \left\{ \begin{array}{l} 762 \\ 59.200 \\ 4,03 \cdot 10^{25} \end{array} \right. \\ 8 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{F} \left\{ \begin{array}{l} 547 \\ 36.700 \\ 2,46 \cdot 10^{25} \end{array} \right. \\ 9 \end{array}$
$\begin{array}{l} \text{P} \left\{ \begin{array}{l} 376 \\ 58.500 \\ 1,10 \cdot 10^{25} \end{array} \right. \\ 15 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{S} \left\{ \begin{array}{l} 350 \\ 51.000 \\ 1,07 \cdot 10^{25} \end{array} \right. \\ 16 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Cl} \left\{ \begin{array}{l} 272 \\ 29.300 \\ 0,98 \cdot 10^{25} \end{array} \right. \\ 17 \end{array}$
$\begin{array}{l} \text{As} \left\{ \begin{array}{l} 207 \\ 45.800 \\ 1,19 \cdot 10^{25} \end{array} \right. \\ 33 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Se} \left\{ \begin{array}{l} 189 \\ 32.800 \\ 0,50 \cdot 10^{25} \end{array} \right. \\ 34 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Br} \left\{ \begin{array}{l} 156 \\ 23.400 \\ 0,79 \cdot 10^{25} \end{array} \right. \\ 35 \end{array}$
$\begin{array}{l} \text{Sb} \left\{ \begin{array}{l} 130 \\ 34.800 \\ 0,96 \cdot 10^{25} \end{array} \right. \\ 51 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{Te} \left\{ \begin{array}{l} 121 \\ 26.700 \\ 0,36 \cdot 10^{25} \end{array} \right. \\ 52 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{I} \left\{ \begin{array}{l} 103 \\ 18.400 \\ 0,59 \cdot 10^{25} \end{array} \right. \\ 53 \end{array}$

4. Concludiamo questo lavoro con un tentativo di interpretazione unitaria delle proprietà (II).

I valori  $(II, a)$  e  $(II, b)$  di  $\vec{\Delta E}$  e di  $\vec{\Delta N}$ , sono interpretabili come i massimi valori possibili per il complesso attivato; valori maggiori infatti caratterizzerebbero una improbabile frantumazione della molecola più spinta della scissione in due atomi.

Il valore  $(II, c)$  di  $\vec{\Delta S}^\circ$  è interpretabile come minimo valore possibile per il complesso attivato; un valore minore infatti caratterizzerebbe una improbabile organizzazione atomica più ordinata della molecola.

Massima  $\vec{\Delta E}$ , massimo  $\vec{\Delta N}$  e minimo  $\vec{\Delta S}^\circ$ , determinano il massimo valore dell'energia libera  $(3, a)$  di attivazione  $\vec{\Delta F}^\circ$ .

D'altra parte massima  $\vec{\Delta F}^\circ$  significa, per la (7), minimo valore di  $\kappa$ , ovvero per la (6), minimo valore della velocità di reazione, in qualsiasi condizione di temperatura e di densità parziali  $(T, n_{x2}, n_x)$ .

Ma quanto più lenta è la reazione tanto meno essa è irreversibile.

Pare pertanto di poter concludere, per la reazione esaminata, che:

il complesso attivato ha quelle caratteristiche  $(\vec{\Delta E}, \vec{\Delta N}, \vec{\Delta S}^\circ)$  che minimizzano il grado di irreversibilità della reazione.

Ovvero, che il linguaggio della termodinamica dei processi irreversibili:

il complesso attivato ha quelle caratteristiche che minimizzano la sorgente di entropia della reazione.

## BIBLIOGRAFIA.

- G. P. WOOD, NACA T. N. 3634 (Washington, 1956).  
 J. S. EVANS, NACA T. N., 3860 (Washington, 1956).  
 S. GLASSTONE, K. J. LEIDLER, H. EYRING, *The Theory of Rate Processes* (McGraw-Hill, 1941).  
 M. POLANY, E. WIGNER, «Zeit. Phys. Chem.», 139, 447 (1928).  
 N. K. ADAM, *Physical Chemistry* (Clarendon Press, Oxford, 1956).  
 F. DANIES, «Ind. Eng. Chem.», 35, 504 (1943).  
 O. A. HOUGEN, K. M. WATSON, *Chemical Processes Principles* (Wiley, New York, 1955-1956).  
 Y. K. SYRKIN, M. E. DYATKINA, *Structure of Molecules* (Butterworths Sc. Publ., London, 1950).  
 A. G. GAYDON, *Dissociation Energies* (Chapman-Hall, London, 1953).  
 F. D. ROSSINI, *Thermodynamics and Physics of Matter* (Princeton Univ. Press, 1955).  
 SELECTED VALUES OF CHEMICAL THERMODYNAMICAL PROPERTIES, National Bureau of Standards, Circ. 500 (U. S. Gov. Print. Off. Washington, 1952).  
 B. LEWIS, G. VON ELBE, *Combustion, Flames and Explosions of Gases* (Academic Press, New York, 1951).

**Astronomia.** — *Orbita del sistema binario  $\mu$  Draconis.* Nota <sup>(\*)</sup> II di ANNIBALE FANTOLI, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

3. Nella mia precedente Nota <sup>(1)</sup> ho riassunto gli studi finora pubblicati sulla stella doppia  $\mu$  Draconis, e ho riportato in una tabella le numerose osservazioni relative ad essa. Nella presente Nota mi propongo di comunicare i risultati del mio studio, volto alla determinazione dell'orbita e di alcune caratteristiche fisiche di questo sistema binario.

Ho compiuto anzitutto la riduzione delle osservazioni all'equinozio del 1950,0, mediante applicazione della nota formula  $\Delta\vartheta = 20^\circ (t_0 - t) \sec \delta$ , che dà la correzione da apportarsi a ciascuna osservazione; per la  $\mu$  Draconis si ha:  $\Delta\vartheta = -0^\circ, \cos 29 (1950 - t)$ . Ho quindi proceduto alla discussione delle osservazioni con metodo grafico ed a tale scopo ho costruito due primi diagrammi,  $\rho(t)$  e  $\vartheta(t)$ . Poiché i valori di  $\rho$  e di  $\vartheta$  sono collegati fra loro dalla legge delle aree,  $(d\vartheta/dt) \rho^2 = \text{cost.}$ , ho tracciato un terzo diagramma,  $d\vartheta/dt(t)$ , e finalmente un quarto, assumendo come ascisse i valori di  $1/\rho^2$  (dove  $\rho$  veniva ricavato, di 5 in 5 anni, dal I diagramma) e per ordinate i valori di  $d\vartheta/dt$ , sempre agli stessi intervalli di tempo, ricavati dal III diagramma. In base alla legge delle aree, i punti del diagramma così ottenuto debbono disporsi lungo una retta passante per l'origine. Effettivamente, correggendo opportunamente i due diagrammi iniziali, sono riuscito ad ottenere due curve,  $\rho(t)$  e  $\vartheta(t)$ , soddisfacenti ottimamente la legge delle aree. Sono quindi passato alla costruzione grafica dell'orbita apparente del sa-

(\*) Pervenuta all'Accademia il 2 settembre 1957.

(1) Cfr. «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», dicembre 1956.

tellite. Come è noto, il piano di quest'orbita è il piano tangente alla sfera celeste. Fissando su tale piano, in base a note convenzioni, un sistema di coordinate polari, avente la origine nella stella principale, come anomalia l'angolo di posizione  $\vartheta$ , e come raggio vettore la distanza angolare  $\rho$ , alle osservazioni corrisponderanno altrettanti punti che rappresentano la posizione assunta, a una data epoca, dal satellite. Tali punti si disporranno approssimativamente lungo un'ellisse. Ora è noto che per la costruzione di un'ellisse basta la conoscenza di 5 suoi punti; tuttavia, siccome le osservazioni non sono generalmente esatte, è preferibile basarsi per tale costruzione su 5 punti ricavati dai diagrammi prima costruiti, i quali danno per  $\rho$  e  $\vartheta$  valori assai più attendibili. A tale scopo ho scelto i 5 *luoghi normali* seguenti:

1829,25	$\vartheta = 205^\circ$	$\rho = 3'',29$
1865,40	$180^\circ$	$2'',75$
1882,40	$165^\circ$	$2'',56$
1924,15	$120^\circ$	$2'',28$
1952,15	$85^\circ$	$2'',18$

Applicando il teorema di Steiner sulla generazione di una conica mediante due fasci proiettivi, ho quindi ottenuto l'ellisse cercata, di equazione:

$$0,10552 x^2 + 0,03990 xy + 0,06302 y^2 - 0,07344 x + 0,31863 y - 1 = 0$$

prendendo come unità il secondo di arco e come asse delle ascisse la tangente al cerchio orario diretta verso Nord. Nella figura 1 ho riportato una parte di tale ellisse, con le medie delle osservazioni (la grandezza dei dischetti è proporzionale al numero delle osservazioni).

4. Per la determinazione degli elementi orbitali dell'orbita reale mi sono valso del metodo analitico di Kowalsky <sup>(2)</sup>, controllando poi i risultati così ottenuti col metodo grafico di Zwiers <sup>(3)</sup>. Riporto i miei risultati, confrontati con quelli ottenuti da von Bezold, nella tabella III.

TABELLA III.

	Metodo analitico (Fantoli)	Metodo grafico (Fantoli)	von Bezold
$i$	$\pm 147^\circ,14$	$\pm 146^\circ,80$	$\pm 139^\circ,43$
$\Omega$	$118^\circ,39$	$117^\circ,40$	$114^\circ,51$
$\omega$	$13^\circ,03$	$13^\circ,55$	$11^\circ,07$
$a$	$5'',20$	$5'',22$	$6'',92$
$e$	$0,569$	$0,569$	$0,673$

(2) Cfr. per esempio G. ARMELLINI, *Trattato di Astronomia Siderale*, vol. II.

(3) Cfr. G. ARMELLINI, id. e *Fondamenti Scientifici dell'Astrofisica*, p. 378 e sgg.

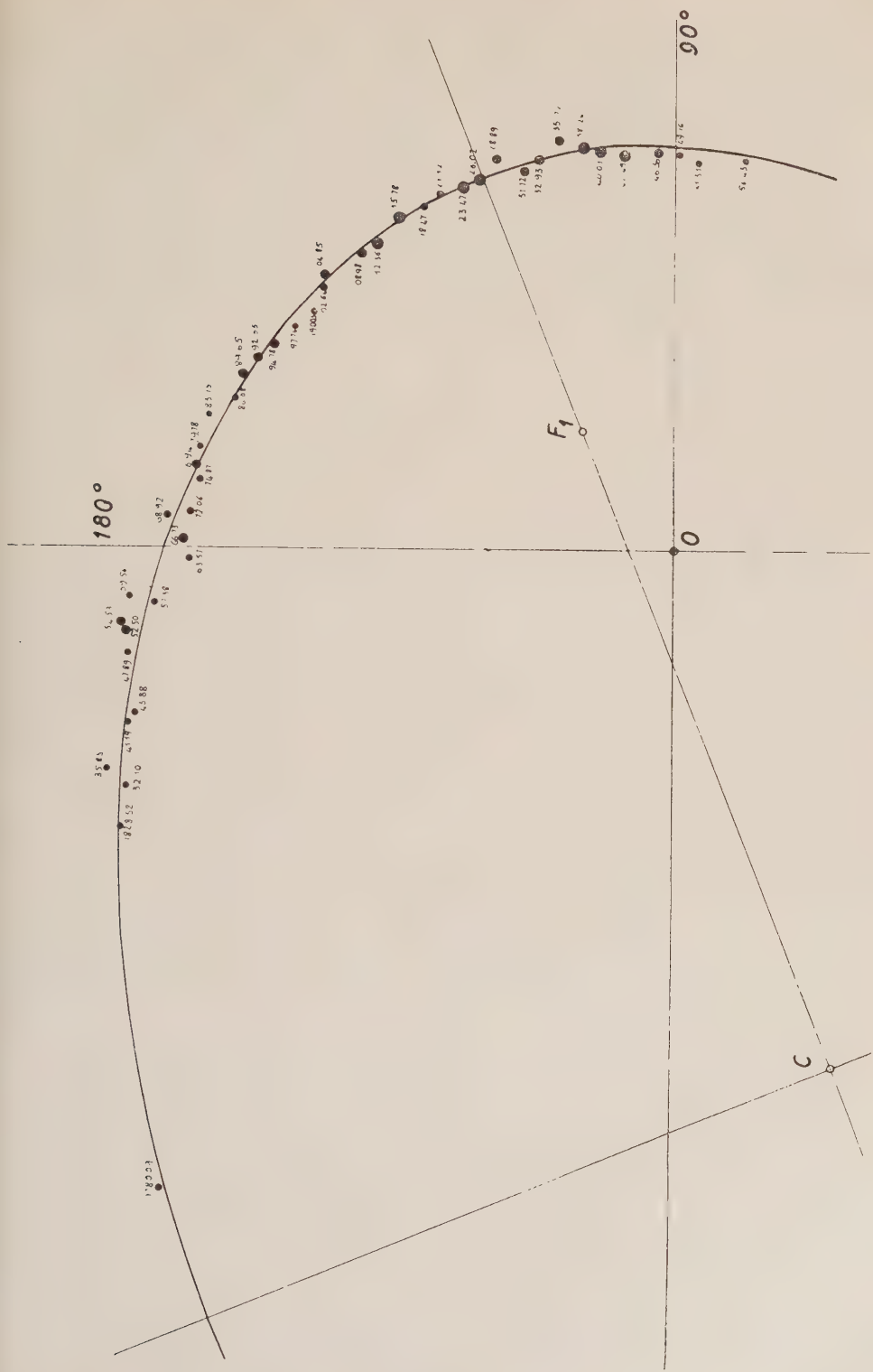


Fig. I. - Ellisse apparente e medie delle osservazioni.



TABELLA IV.

Anno	$\vartheta$	$p$	$(O - C)_\vartheta$	$(O - C)_p$
1829,25	205°,0	3'',29	0°,03	0'',01
1837,50	200 ,0	3 ,15	— 0 ,05	0 ,00
1845,15	195 ,0	3 ,03	— 0 ,10	0 ,00
1852,25	190 ,0	2 ,93	— 0 ,15	0 ,00
1859,00	185 ,0	2 ,83	— 0 ,12	0 ,00
1865,40	180 ,0	2 ,75	— 0 ,03	0 ,00
1871,25	175 ,0	2 ,67	— 0 ,10	— 0 ,01
1877,00	170 ,0	2 ,61	— 0 ,08	0 ,00
1882,40	165 ,0	2 ,56	— 0 ,10	0 ,00
1887,65	160 ,0	2 ,51	— 0 ,03	0 ,00
1892,60	155 ,0	2 ,47	— 0 ,08	0 ,00
1897,45	150 ,0	2 ,43	— 0 ,10	0 ,00
1902,15	145 ,0	2 ,40	— 0 ,08	0 ,00
1906,75	140 ,0	2 ,37	— 0 ,08	0 ,01
1911,25	135 ,0	2 ,34	— 0 ,08	0 ,01
1915,65	130 ,0	2 ,32	— 0 ,02	0 ,01
1920,00	125 ,0	2 ,30	0 ,03	0 ,01
1924,15	120 ,0	2 ,28	— 0 ,02	0 ,01
1928,25	115 ,1	2 ,26	— 0 ,07	0 ,01
1932,40	110 ,0	2 ,24	0 ,02	0 ,01
1936,45	105 ,0	2 ,23	0 ,08	0 ,01
1940,45	100 ,0	2 ,21	0 ,15	0 ,01
1944,40	95 ,0	2 ,20	0 ,18	0 ,01
1948,30	90 ,0	2 ,19	0 ,20	0 ,00
1952,15	85 ,0	2 ,18	0 ,17	— 0 ,01

Per il calcolo degli elementi temporali (periodo di rivoluzione  $P$  in anni, e tempo del passaggio al periastro  $\tau$ ) ho ricavato dal diagramma  $\vartheta(t)$  i seguenti 13 valori di  $\vartheta$  in funzione del tempo:

$t$	$\vartheta$	$t$	$\vartheta$	$t$	$\vartheta$
1830,0	204°,6	1840,0	198°,4	1850,0	191°,6
1860,0	184°,3	1870,0	176°,1	1880,0	167°,2
1890,0	157°,7	1900,0	147°,3	1910,0	136°,4
1920,0	125°,0	1930,0	112°,9	1940,0	100°,5
1950,0	87°,8				

In corrispondenza a ciascuno di questi valori di  $\vartheta$ , e basandomi sugli elementi *analitici* già ottenuti, ho calcolato l'*anomalia media*  $M$ , e quindi, per mezzo della formula  $M = n(t - \tau)$ , dove  $n = 360^\circ/P$  è il *moto medio annuo*, quei valori di  $n$  e  $\tau$  che meglio approssimavano gli angoli  $M$  calcolati. Ho così trovato, valutando  $P$  in anni:

$$\tau = 1934,47 \quad ; \quad n = 0^\circ,331 \quad ; \quad P = 1089,13.$$

Secondo von Bezold si avrebbe invece:

$$\tau = 1936,1 \quad n = 0^\circ,233 \quad P = 1544,0.$$

5. Dopo avere determinato gli elementi dell'orbita della stella satellite, sono passato al calcolo delle *effemeridi*; cioè delle coordinate polari  $\rho$  e  $\vartheta$  corrispondenti a certi istanti  $t$ . A tale scopo ho scelto *25 luoghi normali*, ricavandoli direttamente dai diagrammi di partenza  $\rho(t)$  e  $\vartheta(t)$ , ed ho calcolato gli scarti esistenti fra i valori di  $\rho$  e  $\vartheta$  così ottenuti (valori che si possono considerare come valori osservati) e quelli corrispondenti ricavabili in base agli elementi da me trovati. Ho riportato tali luoghi normali, con i relativi scarti, nella tabella IV.

Poiché il massimo scarto nella determinazione di  $\vartheta$  ammontava a  $0^\circ,20$ , e quello nella determinazione di  $\rho$  a  $0'',01$ , ho potuto concludere che l'orbita da me ottenuta era *in ottimo accordo* con i diagrammi di partenza; e che quindi essa poteva considerarsi come assai buona, senza bisogno di ricorrere al laborioso lavoro del miglioramento dell'orbita col metodo dei minimi quadrati. Con lo stesso procedimento ho poi calcolato le effemeridi a partire dal 1950,0, fino al 2000,0. I risultati di tale calcolo sono riportati nella tabella V.

6. Sono quindi passato alla determinazione di alcune caratteristiche fisiche, ed ho innanzi tutto calcolato la *parallasse dinamica* del sistema. Come è noto, le parallasse dinamiche delle stelle binarie, ottenute *combinando la relazione massa-luminosità con la III legge di Keplero*, sono fra le migliori di tutte quelle che si è attualmente in grado di ottenere con i diversi metodi. La precisione è particolarmente notevole nel caso che l'orbita sia conosciuta. Per il calcolo mi sono servito sia del metodo ormai classico di Russell e Moore <sup>(4)</sup>, sia di quello proposto più recentemente da Baize e Romani <sup>(5)</sup>.

(4) Cfr. RUSSELL and MOORE op. cit.

(5) Cfr. « Annales d'Astrophysique », tome IX, 1946.

Ambedue si basano su una relazione massa-luminosità del tipo:

$$L = \mu^k \quad \begin{array}{l} L = \text{luminosità} \\ \mu = \text{massa} \end{array}$$

(avendo preso la luminosità bolometrica del Sole come unità di luminosità, e la sua massa come unità di massa). Essi si diversificano però quanto al valore da attribuire alla costante  $k$ , che per Russell-Moore è  $= 3,33$ , mentre per Baize-Romani è  $= 3,58$ ; e, naturalmente, quanto ai procedimenti di calcolo. Usando questi due metodi ho ottenuto, per la parallasse dinamica, rispettivamente, i valori poco diversi:

$$\pi = 0'',033 \quad ; \quad \pi = 0'',035.$$

Nella tabella VI ho confrontato tali valori con quelli finora conosciuti.

TABELLA V.

$t$	$\vartheta$	$\rho$	$t$	$\vartheta$	$\rho$
1955,00	81°,14	2'',19	1970,0	62°,11	2'',24
1956,0	79°,84	2°,19	1975,0	56°,02	2°,28
1957,0	78°,56	2°,19	1980,0	50°,19	2°,32
1958,0	77°,28	2°,19	1985,0	44°,59	2°,38
1959,0	75°,97	2°,19	1990,0	39°,24	2°,45
1960,0	74°,69	2°,20	1995,0	34°,24	2°,52
1965,0	67°,34	2°,21	2000,0	29°,52	2°,59

Come si vede, i valori della parallasse dinamica dati da Russell e Moore non distano molto da quelli ricavati col metodo trigonometrico; ma sono fortemente diversi da quelli spettroscopici e dinamici ricavati dagli altri autori, con i quali concordano i miei. Ciò si spiega col fatto che Russell e Moore hanno considerato la  $\mu$  Draconis come binaria ad orbita sconosciuta, e quindi hanno dovuto usare un procedimento di calcolo piuttosto impreciso. È poi risaputo che i valori delle parallassi trigonometriche oggi conosciuti sono meno attendibili di quelli delle parallassi spettroscopiche e dinamiche, per la sospettata presenza di errori sistematici nel calcolo.

I valori così ottenuti della parallasse dinamica mi hanno permesso il calcolo delle *masse*, e quindi dei *raggi* e delle *densità* delle due componenti, in base ai noti procedimenti dell'Astrofisica. Ho così ottenuto:

$$\begin{array}{llllll} (\pi = 0'',033) & ; & \mu = 3,31 & ; & \mu_1 = 1,66 & R_1 = 1,447 & \rho_1 = 0,185 \\ & & & & \mu_2 = 1,65 & R_2 = 1,427 & \rho_2 = 0,190 \\ (\pi = 0'',035) & ; & \mu = 2,77 & ; & \mu_1 = 1,39 & R_1 = 1,496 & \rho_1 = 0,140 \\ & & & & \mu_2 = 1,38 & R_2 = 1,476 & \rho_2 = 0,141 \end{array}$$

(avendo indicato con  $\mu$  la massa totale del sistema, e con  $\mu_1$  e  $\mu_2$ ,  $R_1$  e  $R_2$ ,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  le masse, i raggi e le densità delle due componenti, essendosi prese come unità di misura le corrispondenti grandezze del Sole). Il valore di  $\mu$  da me trovato è in buon accordo con quello dato da von Bezold ( $\mu = 3,24$ ).

TABELLA VI.

Metodo	Valore di $\pi$	Autori
Parallasse trigon. . . . .	0'',046	Yerkes e Allegheny Obs.
» spett. . . . .	0,032	Monte Wilson Obs.
» dinamica: (orbita sconosciuta) . . . .	0,056	Russel e Moore (1929)
	0,053	» » (1940)
(orbita conosciuta) . . . .	0,035	von Bezold (1938)
	0,033	Strand (1942)
	0,037	Baize-Romani (1946)
	0,033	Fantoli (1956)
	0,035	» (1956)

Per finire, ho voluto calcolare la *velocità radiale*, ai nodi, della stella satellite rispetto a quella principale <sup>(6)</sup>. Ho così trovato per i due nodi:

$$t = 1925,49 \quad v_r = 4,4 \text{ km/sec}$$

$$t = 2363,46 \quad v_r = 1,3 \text{ km/sec.}$$

7. In conclusione, i risultati da me ottenuti sono abbastanza vicini a quelli ricavati da von Bezold per quanto riguarda i valori di  $i$ ,  $\Omega$  e  $\omega$  del tempo del passaggio al periastro,  $\tau$ , e della parallasse dinamica  $\pi$ , mentre se ne discostano notevolmente per quanto riguarda i valori del semiasse maggiore  $a$ , della eccentricità  $e$ , del moto medio  $n$  e del periodo  $P$ . Confrontando poi le due orbite fra loro e con le osservazioni, si nota che ambedue sono in buon accordo tra loro e con i valori di  $\rho$  e  $\vartheta$  osservati, nel tratto fra il 1850 ed il 1950, mentre per le epoche più antiche e, rispettivamente, più recenti, le differenze si fanno più sensibili. Più precisamente, per quanto riguarda l'osservazione più antica, del 1780,09, la mia orbita risulta migliore, essendo lo scarto  $(O - C)_\vartheta$  da me trovato ( $= 4^\circ,16$ ) notevolmente inferiore a quello ottenuto da von Bezold ( $= 5^\circ,93$ ). C'è però da tener presente che si tratta

(6) Cfr. « Un. Obs. Circ. », n. 68 (1926) e n. 86 (1932).



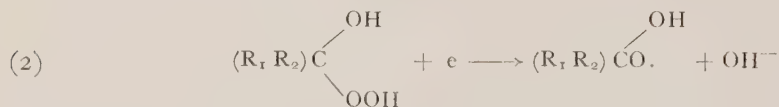
di un'osservazione alquanto incerta, per ciò che riguarda il valore di  $\rho$ , ma molto importante per la sua antichità. Invece, per le osservazioni posteriori al 1950 l'orbita di von Bezold corrisponde meglio alle osservazioni; ma si tratta di un breve periodo di tempo.

Come si vede, nulla ancora si può dire di definitivo sull'orbita della  $\mu$  Draconis. Soltanto le osservazioni dei prossimi 20 — 30 anni potranno permettere di giungere ad un'orbita definitiva, sebbene la mia sia già molto approssimata.

**Chimica organica.** — *Sulla reattività dei radicali liberi con ossido di carbonio e ossido d'azoto (\*)*. Nota (\*\*) di GIANPAOLO CHIU-SOLI e FRANCESCO MINISCI, presentata dal Socio A. QUILICO.

Nel corso di ricerche sulla reattività dei radicali liberi derivanti dalla decomposizione di perossidi alchilici e aralchilici, abbiamo potuto osservare come in condizioni di pressione e temperatura estremamente blande, l'ossido di carbonio reagisca coi radicali in modo sorprendentemente facile (1).

È noto che gli idroperossidi in presenza di opportuni agenti di decomposizione, come ad esempio i sali di metalli pesanti nei loro gradi inferiori di ossidazione, si scindono per via radicalica (2). Per gli idroperossidi terziari e per gli ossi-idroperossidi, la reazione può essere scritta:



Normalmente i radicali risultanti si decompongono nel modo seguente:



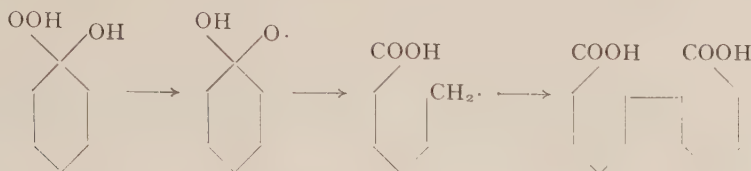
(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Ricerche Guido Donegani della Società Montecatini.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1957.

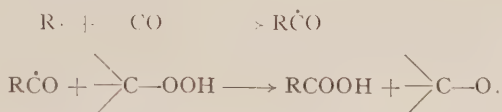
(1) Brevetto Italiano, domanda N. 38165 depositata il 15 giugno 1956; N. 40313 depositata il 9 ottobre 1956.

(2) R. CRIEGEE, *Herstellung und Umwandlung von Peroxyden*, in «Houben-Weil, Methoden der Org. Chemie», vol. VIII 1 (1952); A. V. TOBOLSKY e R.B. MERSROBIAN, *Organic Peroxides*, New York 1954.

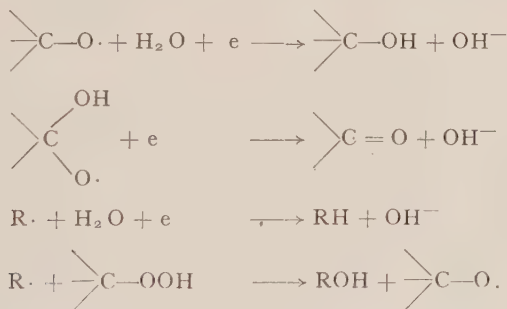
I nuovi radicali  $R_2$  e  $R_3$  così formati, danno luogo in alcuni casi a reazioni di dimerizzazione<sup>(3)</sup>; per esempio dal perossido del cicloesanoone è stato ottenuto l'acido dodecandioico:



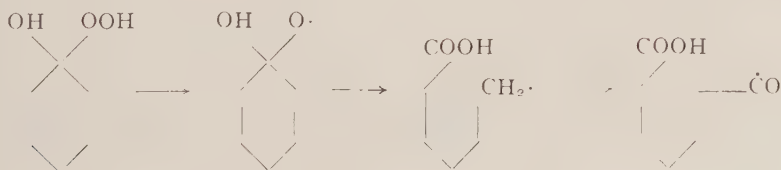
Nelle nostre ricerche abbiamo trovato che, operando in presenza di una sufficiente concentrazione di ossido di carbonio, i radicali alchilici o aralchilici provenienti da (3) e (4) reagiscono rapidamente dando luogo ad acidi carbossilici, la cui formazione è probabilmente da attribuirsi all'interazione di un radicale  $R\dot{C}O$  con l'idroperossido:



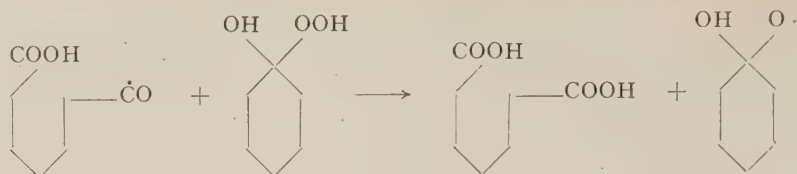
Accanto all'acido carbossilico, che rappresenta il prodotto principale, abbiamo constatato la formazione di altri prodotti dovuti a reazioni secondarie:



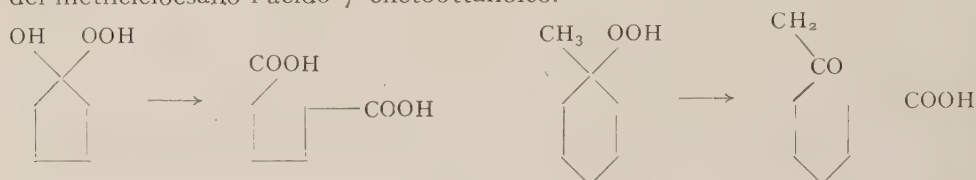
Così iniettando una soluzione di solfato ferroso in un'autoclave contenente una soluzione di perossido del cicloesanoone mantenuta in agitazione sotto la pressione di un centinaio di atmosfere di ossido di carbonio, si ottiene senza difficoltà a temperatura ambiente l'acido pimelico senza formazione di acido dodecandioico, secondo lo schema:



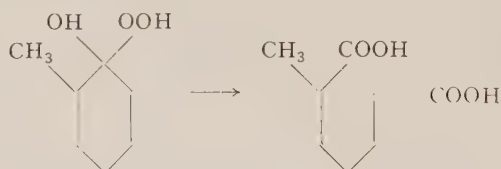
(3) M. S. KHARASCH, A. FONO e W. NUDENBERG, « *J. Org. Chem.* », 15, 754 (1950); E. G. E. HAWKINS e D. P. YOUNG, « *J. C. S.* » (1950), 2804; E. G. E. HAWKINS, « *J. C. S.* », (1955), 3463; N. BROWN, M. J. MARTIG, M. J. ROEDEL, A. W. ANDERSON e C. E. SCHWEITZER, « *J. A. C. S.* », 77, 1756 (1955); M. J. ROEDEL (Du Pont) U.S.P. 2, 601, 223 (1952).



In modo analogo abbiamo ottenuto altri acidi mono e bibasici, come per esempio dal perossido del ciclopentanone l'acido adipico, dal perossido del metilcicloesano l'acido 7-chetoottanoico:



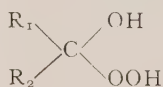
Anche in quei casi in cui, come per il perossido del 2-metilcicloesano, non si è riusciti a dimerizzare i radicali formati (probabilmente per impedimento sterico), la reazione con ossido di carbonio avviene regolarmente, con formazione nel caso citato, dell'acido 2-metilpimelico.



Le rese in acidi variano secondo il tipo di perossido impiegato; in alcuni casi si aggirano intorno al 50 %. I prodotti secondari sono costituiti prevalentemente da alcoli e chetoni derivanti dalla riduzione dei perossidi e dai composti che traggono origine dalla reazione di H oppure OH con i radicali.

Ricerche ulteriori sulla reattività dei radicali liberi ci hanno portato a prendere in esame anche il comportamento dell'ossido d'azoto, che, com'è noto, ha le caratteristiche di un radicale libero. È stata infatti molto studiata l'azione inibitrice dell'ossido d'azoto nelle reazioni radicaliche; sono note inoltre alcune reazioni dell'ossido d'azoto con radicali in fase gassosa <sup>(4)</sup>.

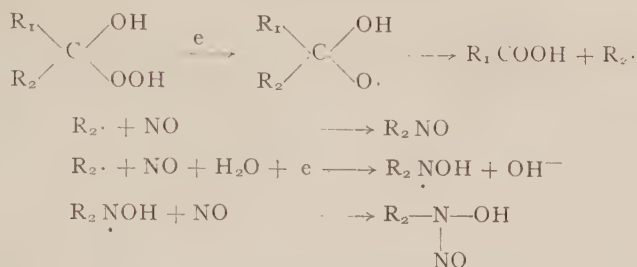
Operando a temperatura ambiente ed a pressione atmosferica in presenza di opportuni agenti di decomposizione abbiamo notato che gli idroperossidi del tipo:



reagiscono con una o due molecole di ossido d'azoto, formando nel primo caso un nitroso derivato che si trasforma ad ossima, e nel secondo una nitroso-idrossilammina.

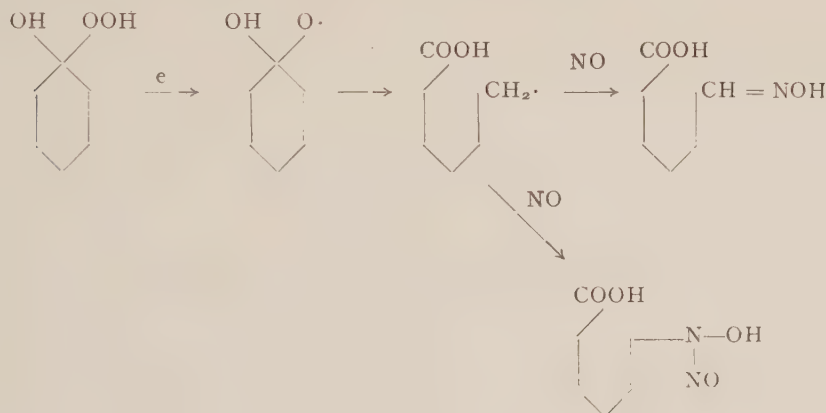
(4) J. H. NALEY, F. F. RUST e W. E. VAUGHAN, « J.A.C.S. », 70, 88 (1948); C. S. COE e T. F. DOUMANI, « J.A.C.S. », 70, 1516 (1948); H. T. Y. CHILTON e B. G. GOWENLOCK, « J.C.S. » (1953), 3232; « Nature », 172, 73 (1953); B. A. GINGRAS e W. A. WATERS, « J.C.S. » 615 (1953); 1920 (1954).

Il meccanismo di formazione di questi composti è probabilmente il seguente:



Sia l'ossima che la nitrosoidrossilammina possono essere facilmente ridotte con idrogeno ad ammina primaria.

Mettendo in contatto il perossido del cicloesano con una soluzione di solfato ferroso saturata con ossido d'azoto abbiamo così ottenuto un prodotto di reazione costituito per la maggior parte dall'ossima dell'emialdeide adipica e l' $\epsilon$ -nitrosoidrossilamminaderivato dell'acido capronico.



**Patologia.** — *Osservazioni sui granuli citoplasmatici delle forme normali e filamentose di B. megatherium* (\*). Nota (\*\*) di GIUSEPPE PONTIERI e SERAFINO SCHIANO, presentata dal Socio L. CALIFANO.

Le inclusioni granulari del citoplasma batterico, sul cui significato le interpretazioni sono tutt'altro che concordi, costituiscono il motivo di una accesa polemica che ha come principali sostenitori di due opposti punti di vista Mudd (1953-1954) da un lato e Bisset (1953) dall'altro. La polemica, basata sugli argomenti apportati a sostegno delle due diverse concezioni, è indice della difficoltà di localizzare definite attività enzimatiche in entità morfologiche al limite della visibilità microscopica.

(\*) Lavoro svolto nell'Istituto di Patologia generale della Università di Napoli.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 15 agosto 1957.



I granuli dei corpi batterici sono noti da molti anni e ad essi sono state attribuite di volta in volta funzioni diverse che la Winkler (1953) ha passato, or non è molto in rassegna in un eccellente articolo.

La polemica cui si è fatto cenno sorse in seguito alla proposta fatta da Mudd e coll. (1951) di indicare i granuli col nome di mitocondri e considerarli, in quanto sede di processi di ossido-riduzione, quali equivalenti dei mitocondri degli organismi pluricellulari. Bielìg, Kausche e Haardick (1949) dimostrarono che nei germi esistono punti del citoplasma, dove si effettua la riduzione a formazan del 2-3-5-trifeniltetrazolio ed ammisero che una flavoproteina fosse responsabile della riduzione. Ritennero essi, allora, che la riduzione del tetrazolio avvenisse nei nuclei, ma qualche anno più tardi (Bielìg, Kausche e Haardick (1952) ritirarono tale interpretazione, ammettendo che la riduzione del tetrazolio avesse luogo in zone protoplasmatiche diverse da quelle occupate dai nuclei. Il Bringmann (1953) però più recentemente ha sostenuto di nuovo che i nuclei sono sede di attività ossido-riduttiva.

I fatti in base ai quali Mudd ritiene che i granuli citoplasmatici dei batteri debbono essere considerati mitocondri vengono dall'A. riassunti e discussi in due riviste sintetiche (Mudd, 1953, 1954).

Secondo Mudd, i granuli che egli propone di chiamare mitocondri « in a generic sense with the expectation that specific differences will continue to be demonstrated between the several mitochondria of the same and of different bacterial cells and between these and the mitochondria of higher forms », appaiono opachi al microscopio elettronico ed a quello a contrasto di fase, sono forniti di membrane limitanti, posseggono sistemi ordinari di ossido-riduzione, contengono fosfolipidi ed in qualche caso metafosfati. Sono di forma rotonda o ellissoidale e sono comparabili, per grandezza e per forma, ai più piccoli mitocondri delle cellule dei mammiferi. Le dimensioni dei granuli sono varie in quanto ne esistono di più grandi situati lungo l'asse maggiore della cellula e di più piccoli che di solito occupano una posizione più marginale, cioè a contatto con la membrana cellulare (Hartman e Mudd (1953).

I granuli batterici, oltre a ridurre i vari tetrazoli, presentano positiva, salvo che in qualche caso (Davis e Mudd, 1955), la reazione Nadi e si colorano con il verde Janus, B e con i metodi per i lipidi e per i fosfolipidi.

A tale interpretazione, però, si sono dichiarati contrari vari ricercatori.

Weibull (1953), ad esempio, sostiene che la riduzione del 2-3-5-trifeniltetrazolio non dà sufficiente garanzia sulla localizzazione degli enzimi responsabili della riduzione, in quanto, mettendo a contatto germi con sali di tetrazolio già ridotto con idrosolfito sodico, i cristalli si localizzano sia al di fuori che all'interno della cellula, così come accade quando la riduzione è stata effettuata dai germi.

Bisset (1952), invece, ritiene che i granuli resistenti ai raggi elettronici in *M. tuberculosis*, a causa della fissazione al calore, vengano staccati dal cell-wall in modo da assumere la situazione centrale.

In un successivo lavoro Bisset (1953) rifiuta la opinione di Mudd della identificazione dei granuli con i mitocondri: « the identity of these basophilic areas with mitochondria is most unlikely ». Secondo Bisset (1950), i granuli andrebbero, invece, riguardati come punti di crescita (growing points) e quelli centrali apparirebbero tali perchè distaccati dalla parete cellulare. L'A. ammette che il materiale che costituisce il cell-wall sia elaborato dai «growing points», elementi basofili che si trovano a contatto della membrana cellulare.

Bergersen (1953) ha seguito la topografia cellulare dei granuli durante lo sviluppo di *B. megatherium* e conclude che i granuli, sia polari che periferici possono essere considerati punti di crescita, in quanto correlati con lo sviluppo e con la divisione cellulare, e mitocondri, in quanto sede di processi di ossido-riduzione, conciliando in un certo modo le due diverse opinioni.

Lo studio del problema dei rapporti tra attività ossido-riduttiva e divisione è stato approfondito dalle importanti ricerche di Nickerson (1954) che si è occupato della capacità alla riduzione del tetrazolio in *C. albicans* ed in un suo mutante filamentoso, dimostrando che mentre una sospensione delle forme filamentose, lavate e non proliferanti, rapidamente trasforma il tetrazolio nel corrispondente formazan con sviluppo di intensa colorazione rossa, le cellule lievito-simili del ceppo selvaggio, riducono solo scarsamente il tetrazolio anche se il tempo di riduzione è molto lungo.

Riferendosi al fatto che i colori di tetrazolio sono ridotti da una flavoproteina legata al coenzima I funzionante come diaforasi (Brodie e Gots, 1952), Nickerson ha dimostrato che la aggiunta di cloruro di rame in concentrazione  $10^{-3}M$  inibisce la riduzione del tetrazolio sia in tali forme filamentose che in quelle lievitosimili di *C. albicans* dove, come è stato detto, essa è, oltre che scarsissima, anche molto lenta. Al contrario, l'aggiunta ad una sospensione di queste ultime cellule di un agente metalchilante come il tetracetato disodico di etilendiamina ( $Na_2EDTA$ ) in concentrazione  $10^{-3}M$  dà luogo ad intensa riduzione del tetrazolio, come quella che si avvera nella sospensione di cellule del mutante filamentoso. Questi risultati hanno condotto Nickerson alla conclusione che un metallo deve essere legato alla flavoproteina nel ceppo selvaggio e che la chelazione di esso ad opera dell'EDTA trasforma la flavoproteina metallica in una flavoproteina funzionante senza metallo e quindi a tipo diaforasi.

Nel mutante filamentoso, quindi, uno dei danni genici si esplica nella mancanza della combinazione del metallo con la flavoproteina che funziona da trasportatore di idrogeno ad un accettore la cui riduzione è necessaria perchè si verifichi la divisione delle cellule del lievito.

Nickerson e Falcone (1956) hanno recentemente dimostrato in *C. albicans* che si può forse identificare l'accettore in una disolfuroreduttasi.

Questo enzima, che riduce i ponti —S—S della proteina del cell-wall di questi lieviti (Falcone e Nickerson (1956) è fortemente attivo nel ceppo selvaggio, mentre è quasi assente nel mutante filamentoso.

La presente ricerca studia i granuli del citoplasma batterico nel processo di disgiunzione tra accrescimento e divisione, cioè nel fenomeno della filamentizzazione.

#### MATERIALE E METODI.

Le prove sono state condotte con un ceppo di *B. megatherium*. Il terreno di coltura adoperato è stato l'agar-brodo di cavallo; come agente filamentizzante si è utilizzato l'uretano. Una soluzione 2 M di questa sostanza veniva sterilizzata per filtro Seitz ed aggiunta in quantità scalari in tubi contenenti 10 ml. di agar-brodo di cavallo, mantenuti liquidi in un bagno a 50° C. Dopo l'aggiunta dell'uretano il contenuto dei tubi veniva versato in piastre che venivano seminate, dopo solidificazione, con ml. 0,20 di una sospensione batterica. Questa veniva preparata aggiungendo ml. 5 di soluzione fisiologica ad una cultura in agar a becco di clarino di *B. megatherium* di 12 ore.

Le osservazioni sono state eseguite dopo 12-14 ore di crescita a 37° C. 0,5 ml di una soluzione al 0,01 % di 2-3-5- trifenil tetrazolio in puffer di fosfati M/15 a pH 7 venivano messi sulla patina batterica e le piastre erano tenute al buio a 37° C per non più di 30'.

I preparati venivano osservati a fresco nel più breve tempo possibile per evitare la riduzione spontanea del tetrazolio.

La reazione Nadi è stata condotta con i metodi usuali, seguendo al microscopio il grado di colorazione dei granuli citoplasmatici da parte del bleu indofenolo.

La colorazione dei lipidi è stata eseguita con il Sudan Nero B-acido citrico seguendo la tecnica descritta da Ackerman (1952). Le fotografie sono state fatte al Panphot-Leitz. Le osservazioni al microscopio elettronico sono state fatte su preparati ombreggianti con oro. Le cellule batteriche, lavate tre volte in puffer di fosfati, venivano sospese in una soluzione N di NaOH e tenute per 60' a 60° C allo scopo di causare idrolisi del citoplasma e con ciò la possibilità di fotografia delle membrane.

Dopo numerosi lavaggi con acqua distillata, una minuta goccia di una sospensione molto diluita di cellule veniva deposta su di una blendina metallica, ricoperta da una membrana di collodio.

Le osservazioni sono state fatte con un microscopio Philips da 85 Kw dell'Istituto di Chimica Generale della Università di Napoli.

#### RISULTATI.

L'etiluretano determina in concentrazione M/30, rallentamento della velocità di sviluppo dando luogo quasi esclusivamente a forme filamentose che raggiungono una lunghezza anche dieci volte maggiore di quella delle cellule normali.

Per concentrazioni inferiori di uretano, la filamentizzazione è meno pronunciata, mentre a concentrazioni maggiori, l'inibizione della crescita è più accentuata.



Fig. 1. - Cellula di controllo. Si notano diversi granuli centrali e parietali colorati dal formazan. Ingr. 2000  $\times$ .

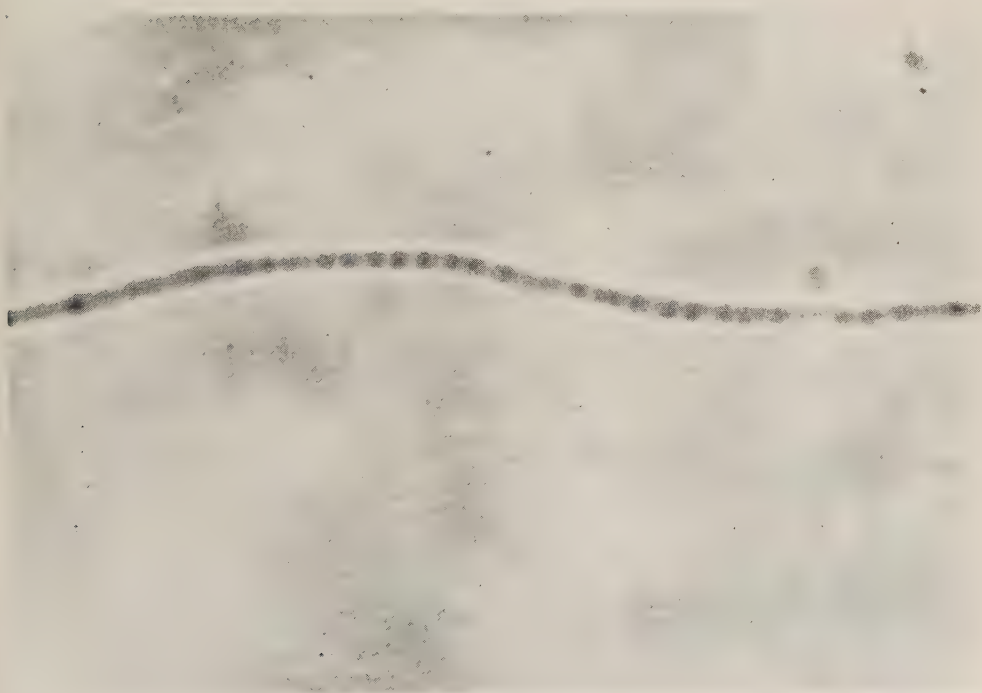


Fig. 2. - Forma filamentosa contenente numerosi granuli a disposizione centrale nel citoplasma colorati dal formazan. Ingr. 4000  $\times$ .

Con l'aggiunta di ml. 0,5 di una soluzione al 0,01 % di sale di tetrazolio si ha sviluppo entro 30' della caratteristica colorazione rossa che è molto più intensa per le cellule normali che per le forme filamentose.



L'osservazione al microscopio ottico dimostra nel corpo cellulare la presenza di granuli colorati in rosso.

Nelle forme normali questi non hanno disposizione fissa ma costantemente se ne notano uno o due alle estremità del corpo batterico. I granuli si trovano anche numerosi lateralmente, cioè al limite di contatto con la membrana. Quelli periferici sono costantemente più piccoli dei centrali (fig. 1).

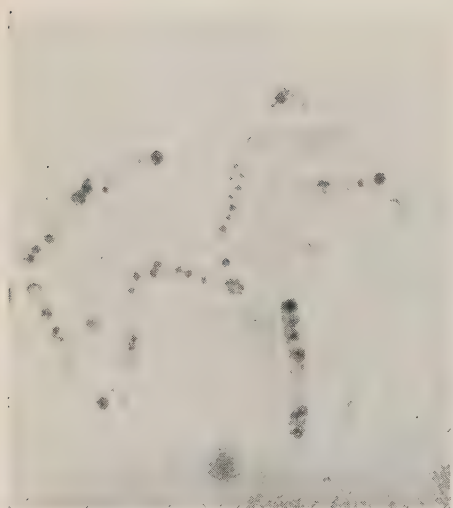


Fig. 3. - Cellule di controllo con reazione Nadi. Ingr. 2000 $\times$ .

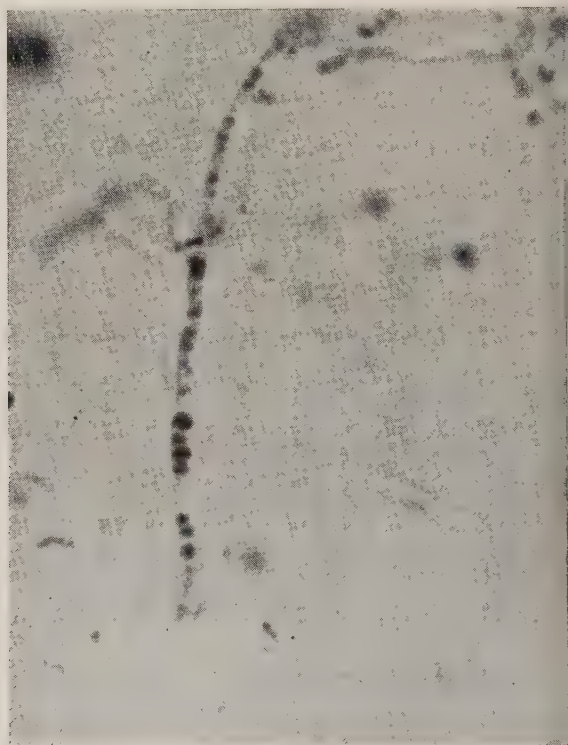


Fig. 4. - Forma filamentosa con reazione Nadi. Ingr. 2000 $\times$ .

Le forme filamentose, in confronto con quelle normali posseggono un numero molto maggiore di granuli colorati in rosso localizzati al centro del corpo batterico ed a disposizione seriale, mentre mancano o sono in scarso numero i granuli periferici aderenti alla membrana (fig. 2).

I granuli colorati dal bleu di indofenolo della reazione Nadi hanno, sia nelle cellule normali che in quelle filamentose, la stessa disposizione di quelle colorate in rosso del formazan (figg. 3 e 4).

Nei preparati colorati col Sudan Nero B si nota che nelle forme normali si trovano granuli polari intensamente colorati, oltre a più piccoli disposti irregolarmente. Nelle forme filamentose il numero totale dei granuli colorabili al Sudan B appare più elevato (figg. 5 e 6).

Al microscopio elettronico nei preparati allestiti per la osservazione della membrana, cioè dopo idrolisi alcalina, si osserva che nelle forme filamentose mancano i cross walls, presenti invece nelle forme normali (figg. 7 e 8).

Fig. 5. - Cellula di controllo.  
Color. Sudan nero-acido citrico  
Ingr. 2000  $\times$ .

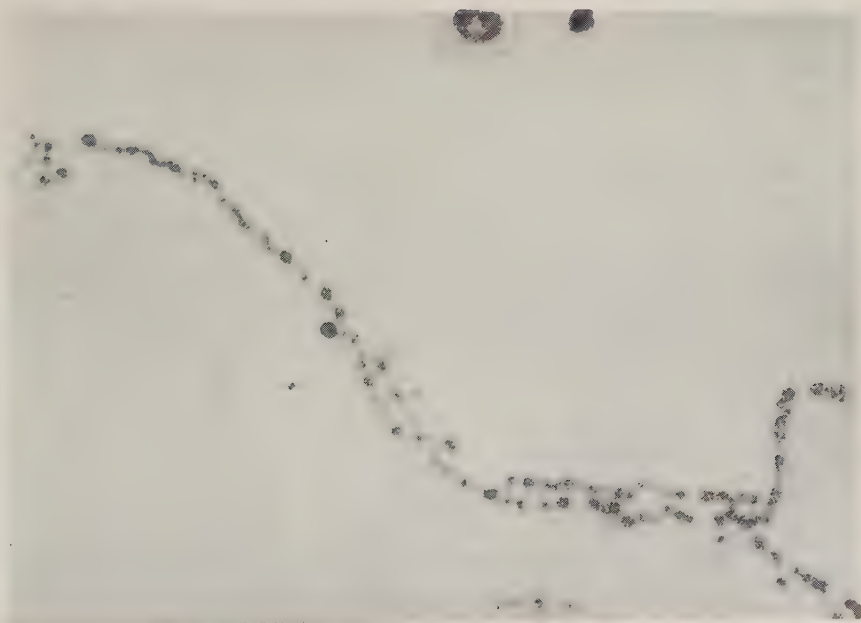
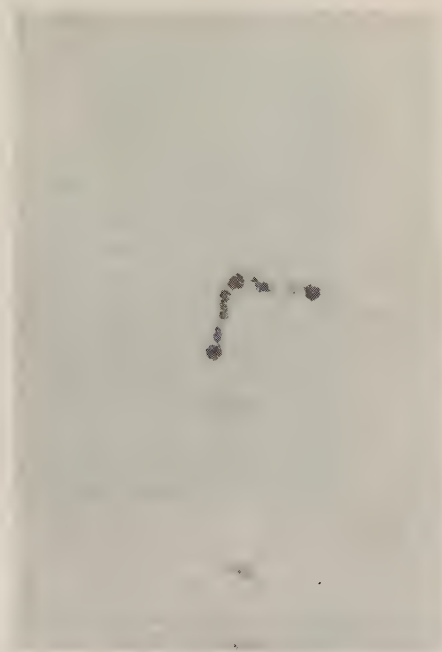


Fig. 6. - Forma filamentosa. Colorazione Sudan nero-acido citrico. Ingr. 2000  $\times$ .



Fig. 7. - Cellula normale in via di divisione. Nel segmento inferiore si nota un setto trasverso. Microscopio elettronico. Ingr. 12.500



Fig. 8. - Forma filamentosa. Nel citoplasma si notano tre grossi granuli; i setti trasversi sono assenti. Microscopio elettronico. Ingr. 12.500 $\times$ .

Nelle forme filamentose sono talora presenti dei granuli del diametro di 0,2-0,4 micron, molto opachi, ai raggi elettronici disposti serialmente nel corpo batterico (fig. 8).

#### DISCUSSIONE.

L'esame dei risultati dimostra che la riduzione del sale di tetrazolio è meno intensa nelle piastre con forme filamentose in confronto a quella che si verifica per le cellule a normale morfologia. Ciò significa che, contrariamente a quanto avviene in *C. albicans*, la flavoproteina presente nelle cellule di *B. megatherium* probabilmente non è tutta legata ad un metallo e, pertanto, funziona almeno parzialmente come diaforasi.

Nelle forme filamentose da uretano i granuli centrali e più grossi appaiono aumentati di numero e conservano attività riduttiva, mentre quelli più piccoli a disposizione periferica non riducono il tetrazolio nè danno reazione Nadi. Per i granuli centrali, pertanto, si verifica una situazione comparabile a quella dei nuclei che, nelle forme filamentose conservano la capacità alla divisione e si dispongono in serie lineare. Effettuandosi la divisione dei granuli mentre manca quella del citoplasma ne consegue anche per i granuli una seriazione lineare.

Poiché nei preparati di forme filamentose, colorati col Sudan Nero, si dimostrano anche i granuli periferici, se ne deduce che essi, pur morfologicamente identici a quelli delle forme normali, ne differiscono funzionalmente perchè non hanno attività ossido-riduttiva.

Pur non potendo, in base alla sola osservazione microscopica, trarre deduzioni quantitative sulla attività ossido-riduttiva delle forme filamentose in paragone di quelle normali, pure sembra che le forme filamentose riducano più attivamente i due reattivi che i germi a normale morfologia.

Nelle forme filamentose i granuli, sede di riduzione, sono i centrali, cioè gli stessi che oppongono resistenza ai raggi elettronici. Queste proprietà sono state varie volte da Mudd e coll. indicate come caratteristiche salienti dei cosiddetti mitocondri batterici. Davis, Winterscheid, Hartman e Mudd (1953) hanno dimostrato che in *S. typhosa* i granuli polari più grandi riducono preferenzialmente il tetrazolio, mentre quelli periferici si colorano preferenzialmente col neo-tetrazolio e col bleu di tetrazolio. Parimenti in *Corynebacterium diphtheriae* (Mudd 1953) il trifeniltetrazolio viene ridotto più dai granuli grandi centrali che da quelli periferici, i quali, al contrario, si colorano meglio con il bleu e con il neo tetrazolio. Ciò corrisponde, evidentemente, a differenze nel contenuto enzimatico dei due tipi di granuli.

Le presenti osservazioni si ricollegano, evidentemente, con quanto sostiene il Bisset, secondo lui, come è stato detto, tutti i granuli batterici debbono essere considerati come «growing points».

Il tentativo di conciliazione tra l'ammissione di Mudd e quella di Bisset, già tentato da Bergersen non chiarisce, però, se i «growing points» di Bisset ed i mitocondri di Mudd siano entità morfologicamente distinguibili.



I risultati della presente ricerca inducono ad ammettere che esiste tale differenza, dato che l'attività riduttiva di quelli a disposizione periferica diminuisce di molto o scompare del tutto nelle forme in cui, per azione dell'uretano, si è avuto arresto nella divisione cellulare.

Le forme filamentose mancano di cross-walls che, come risulta dalle bellissime fotografie di sezioni ultrasottili di *B. cereus*, pubblicate da Chapman ed Hillier (1953) sembrano essere in stretta dipendenza con granuli a localizzazione periferica.

Se questi ultimi si identificano con i «growing points» di Bisset, quali responsabili della formazione del cell-wall e dei cross-walls, appare evidente che la perdita della capacità a ridurre il tetrazolio e a reagire col Nadi delle forme filamentose, può essere messa in relazione con il danno enzimatico causato dall'uretano, danno che comporta la perdita della capacità alla divisione.

In definitiva, risulta che, mentre nelle forme filamentose la riduzione del sale di tetrazolio e del reattivo Nadi è assai più intensa ad opera dei granuli centrali, essa è meno pronunciata od anche assente in quelli periferici, per cui si può forse ritenere che i primi possano essere riguardati come mitocondri nel senso di Mudd, mentre i granuli periferici corrisponderebbero ai «growing points» di Bisset. Nel pleomorfismo da filamentizzazione il danno è prevalente in questi e perciò è impedita la divisione cellulare. La riduzione del sale di tetrazolio e del Nadi che nelle forme normali viene operata sia dai granuli centrali che da quelli parietali in quelle filamentose è espletata da quelli centrali che appaiono più grossi e più numerosi. Si può ritenere che, forse, il fenomeno scoperto da Nickerson in *C. albicans* si avveri anche in questo caso, ma con la differenza che già normalmente i granuli hanno capacità riduttiva, la quale viene nella filamentizzazione esaltata soltanto nei granuli centrali, mentre quelli parietali perdono completamente tale capacità.

#### BIBLIOGRAFIA.

- ACKERMAN G. A., « Science », 115, 629 (1952).  
BERGERSEN F. J., « J. Gen. Microb. », 9, 26 (1953).  
BIELIG H. J., KAUSCHE G. A. und HAARDICK H., « Zs. f. Naturforsch. », 9, 80 (1949).  
BIELIG H. J., KAUSCHE G. A. und HAARDICK H., « Naturwissenschaften », 39, 354 (1952).  
BISSET K. A., *Cytology and life history of bacteria*. Livingstone; Edinburgh (1950).  
BISSET K. A., « Exptl. Cell Research », 3, 681 (1952).  
BISSET K. A., « J. Gen. Microb. », 8, 50 (1953).  
BRINGMANN G., « Zentr. Bakt. Parasitenk. Abt. I. Orig. », 159, 424 (1953).  
BRODIE A. F. and GOST J. S., « Science », 116, 588 (1952).  
CHAPMAN G. B. and HILLIER J., « J. Bact. », 66, 362 (1953).  
DAVIS J. C. and MUDD S., « J. Bact. », 69, 372 (1955).  
DAVIS J. C., WINTERSCHIED L. C., HARTMAN P. E. and MUDD S., « J. Hist. and Cytoch. », 1, 123 (1952).  
FALCONE G. and NICKERSON W. J., « Science », 124, 272 (1956).  
HARTMAN P. E., MUDD S., HILLIER H. and BEUTNER E. H., « J. Bact. », 65, 421 (1953).

- MUDD S., «Simp. Citol. Batt.», Suppl. Rend. Ist. Sup. San., Roma 1953.  
MUDD S., «Ann. Rev. Microb.», 8, 1 (1954).  
MUDD S. WINTERSCHIED C. L., DE LAMATER E. D. and HENDERSEN H. J., «J. Bact.», 62, 459 (1951).  
NICKERSON W. J., «J. Gen. Physiol.», 37, 483 (1954).  
NICKERSON W. J. and FALCONE G., «Science», 124, 722 (1956).  
WEIBULL C. J., «J. Bact.», 66, 137 (1953).  
WINKLER A., «Simp. Citol. Batt.», Suppl., Rend. Ist. Sup. San. Roma 1953.

**Biochimica.** — *Estrazione dell'elastina dal ligamento nucale. Sue proprietà istologiche e morfologiche al microscopio elettronico (\*)*. Nota (\*\*) di V. MORET e L. GOTTE, presentata dal Corrisp. A. RONCATO.

Col termine «elastina» viene comunemente indicata la sostanza fibrosa componente, insieme a collagene e a mucoproteine, il metaplasma dei tessuti connettivi. Sono particolarmente ricchi di elastina il ligamento nucale dei mammiferi e la parete vasale delle grosse arterie.

La sua complessa struttura è stata oggetto di varie ricerche morfologiche, chimiche, fisiche ed enzimatiche (Wolpers [1-2], Astbury [3], Lansing e coll. [4], Dettmer e Schwarz [5], Hall e coll. [6], Partridge e coll. [7-8], Wood [9], Bear [10], Banga e Schuber [11]) per quanto in numero molto inferiore a quelle eseguite su altre proteine. Queste ricerche sono pervenute a risultati discordanti.

Per quanto riguarda la struttura, l'elastina, libera da collagene, esaminata ai raggi X sia a piccolo che a grande angolo (Astbury, loc. cit. [3], Bear, loc. cit. [10]) è risultata amorfa. All'indagine con il microscopio elettronico l'elastina, estratta sia dal ligamento nucale sia dalla tunica media dell'aorta, si rivela composta di fibrille elementari, prive di periodicità assiale e di spessore diverso secondo i vari autori [80 Å secondo Bahr [12], 250 Å secondo Lansing (loc. cit. [4]), 120 Å secondo Gross [13], 600 Å secondo Wolpers (loc. cit. [1-2]).

Gli autori sopracitati sono arrivati alla conclusione che l'elastina non può essere classificata nel gruppo K. M. F. (cheratina, miosina, fibrinogeno) né tanto meno in quello del collagene, pure avendo con questo ultimo una stretta parentela embriogenetica.

Secondo Gross (loc. cit. [13]), oltre alla quota fibrillare vi sarebbe ad essa interposta una frazione amorfa, distinta dal collagene, sensibile alla tripsina. In disaccordo con i risultati sopraccennati sono quelli di Dettmer e Schwarz (loc. cit. [5]). Anche questi autori ritengono l'elastina composta da una sostanza amorfa e da una fibrillare: in quest'ultima però sarebbe

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Biologica e l'Istituto di Istologia ed Embriologia dell'Università di Padova.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia l'11 settembre 1957.

osservabile una periodicità confrontabile con quella dei protofilamenti di collagene (640 Å).

Per quanto riguarda infine la costituzione chimica dell'elastina, i risultati ottenuti con idrolisi completa acida da vari autori (Lloyd e MacGarrod [14], Bowes e Kenten [15-16]) differiscono per la quantità relativa dei diversi aminoacidi componenti la proteina. Tuttavia la maggioranza degli autori ha trovato che gli aminoacidi monoaminomonocarbossilici prevalgono nettamente sugli altri. Ne deriva quindi che le catene laterali alifatiche presenti nella elastina lungo la catena principale polipeptidica sarebbero in prevalenza non polari e quindi consentirebbero pochi legami trasversali fra due catene adiacenti. Queste potrebbero altresì allungarsi e srotolarsi durante l'estensione lungo il loro «backbone» essendo relativamente indipendenti le une dalle altre.

La discordanza dei risultati sull'elastina è dovuta, a nostro avviso, alla diversità dei metodi di estrazione della elastina stessa, alla sua caratteristica insolubilità in solventi blandi e quindi alla impossibilità di purificarla con i metodi comunemente applicati per le proteine solubili, ma soprattutto alla mancanza di un preciso criterio di caratterizzazione, ossia di un criterio che permetta di stabilire quando nel processo di estrazione si sia ottenuta elastina pura, libera dagli altri componenti (collagene, ecc.) dei tessuti.

Per estrarre l'elastina generalmente si seguono tre metodi:

1° Estrazione in autoclave con  $H_2O$  a  $120^{\circ}C$  per 2 ore (Astbury, loc. cit. [3], Bowes e Kenten, loc. cit. [15-16]).

2° Estrazione in ambiente acido (acido ossalico od acetico M/4 a  $98^{\circ}C$  per 20 minuti) (Adair e coll., loc. cit. [7], Gross loc. cit. [13]).

3° Estrazione in ambiente alcalino (NaOH 0,1 N a  $98^{\circ}C$  per 30-45 minuti (Lansing e coll., loc. cit. [4], Banga e coll., loc. cit. [11], Gilligan e coll. [17]).

Questi metodi, come abbiamo potuto accertare anche noi, portano ad un residuo elastinico insolubile quantitativamente diverso l'uno dall'altro, anche partendo dalla stessa sorgente. Ora è difficile stabilire quale dei tre metodi permetta di ottenere una elastina più purificata dagli altri costituenti dei tessuti e nello stesso tempo non alterata dal processo di estrazione stesso.

Dei tre metodi sopracitati, è ritenuto più adatto per la estrazione della elastina quello in ambiente alcalino. Esso permette di ottenere un residuo (elastina) il quale è quantitativamente minore di quello ottenuto con altri metodi, ma che viene considerato il più puro.

Lansing e coll. (loc. cit. [4]) sottoponendo la parete aortica, notoriamente ricca di elastina alla digestione con NaOH 0,1 N a  $98^{\circ}C$  e determinando in funzione del tempo la parte del tessuto che si solubilizzava, hanno osservato che quest'ultima aumentava progressivamente nei primi 40-45 minuti e rimaneva poi costante fino a 60'. Il materiale residuo, essendo libero da collagene e da altri materiali contaminanti, era ritenuto elastina.

Poiché, da quanto risulta in letteratura (Bowes e Kenten, loc. cit. [15-16], Hall e coll., loc. cit. [6]) non era da escludersi a priori che l'elastina avesse un comportamento diverso a seconda del tessuto da cui si estrae (tanto è vero che molti autori parlano di «elastine» e non di «elastina») abbiamo anzitutto voluto vedere se la solubilizzazione con NaOH del ligamento nucale seguisse lo stesso andamento di quello della parete aortica ed in particolare in quale momento di questa solubilizzazione ottenessimo un residuo insolubile avente proprietà strutturali ed istologiche costanti da ritenerle proprie dell'elastina pura.

#### PARTE SPERIMENTALE.

10-20 g. di ligamento nucale bovino venivano affettati al microtomo congelatore. Il materiale così ottenuto era opportunamente sgrassato, prima con acetone (3 o 4 ore) a temperatura ambiente e successivamente in alcool-etero in Soxhlet per 24 ore. Il ligamento nucale così sgrassato veniva sottoposto a trattamento alcalino con NaOH 0,1 N nel rapporto 1 g/100 ml. a bagno maria bollente. A tale scopo in una serie di palloncini, con refrigerante a ricadere, veniva posto in ciascuno 1 g. di ligamento nucale in 100 ml. di NaOH 0,1 N. Ad intervalli di tempo progressivamente crescenti, il materiale rimasto insolubile, veniva filtrato e lavato finché l'acqua di lavaggio mostrava reazione neutra. Il residuo veniva essiccato a 50°C fino a peso costante e poi pesato. Sul ligamento nucale sgrassato e sul residuo insolubile dopo 1-2 ore di trattamento alcalino, sono state eseguite osservazioni istologiche e col microscopio elettronico. Le osservazioni istologiche venivano eseguite, previa colorazione con la resorcin-fuxina, colorante elettivo dell'elastina.

Per l'osservazione elettronica tale materiale dall'aspetto fibroso, sospeso in H<sub>2</sub>O bidistillata (rapporto 1 g/100 ml.), era sottoposto ad omogenizzazione meccanica. La sospensione era centrifugata a bassa velocità (2000 g.) per 10' per eliminare la quota grossolanamente sospesa. Il supernatante invece era sottoposto a blando trattamento ultrasonico per 5 minuti (Quarzo piezoelettrico, frequenza 80.000 Herz) per ottenere una maggiore omogenizzazione. Il materiale era lasciato essiccare all'aria su reticelle di collodio, e poi ombreggiato con Oro-manganina.

#### RISULTATI E DISCUSSIONE.

Il ligamento nucale di partenza, semplicemente sgrassato e quindi contenente ancora tanto l'elastina quanto il collagene, alla osservazione col microscopio elettronico (fig. 1) si presenta costituito essenzialmente dei suoi due componenti: l'elastina costituita da grossi cordoni che talvolta si risolvono in filamenti nei quali non è osservabile alcun periodo assiale ed il collagene i cui filamenti invece hanno il caratteristico periodo di 640 Å.



Se tale tessuto semplicemente sgrassato viene sottoposto successivamente al trattamento alcalino nell'intento di solubilizzarlo, si nota che la velocità di tale solubilizzazione segue tre fasi successive e distinte.

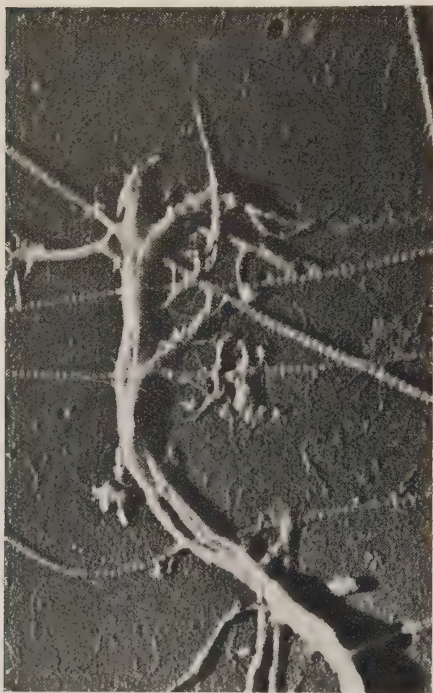


Fig. 1. - Fibre di elastina e filamenti di collagene presenti nel ligamento nucale ( $18.500\times$ . Ombreggio oro-manganina).

Nel diagramma di fig. 2, in ascissa è posto il tempo di trattamento alcalino e in ordinata la percentuale in peso di materiale solubilizzato.

Da questo diagramma si può dedurre che dopo i primi 60 minuti, in cui si solubilizza circa il 30% in peso (costituito praticamente da collagene), segue un intervallo di tempo (circa due ore) durante il quale il residuo insolubile (circa il 70%) rimane praticamente costante. Tale residuo insolubile è quello che noi riteniamo elastina in base alle seguenti osservazioni e precisamente:

1° come le fibre elastiche presenti nel ligamento nucale, questo residuo è perfettamente e omogeneamente colorabile con la resorcin-fuxina, colorante elettivo della elastina (fig. 3); 2° sottoposto alla osservazione elettronica si presenta omogeneo e libero dai filamenti di collagene col caratteristico periodo assiale (fig. 4).

Tale elastina, ormai libera da collagene, è particolarmente resistente a

questa azione solubilizzante, tanto che solo dopo circa 2 ore di permanenza in ambiente alcalino, la solubilizzazione diventa abbastanza veloce, completandosi in circa 8 ore.

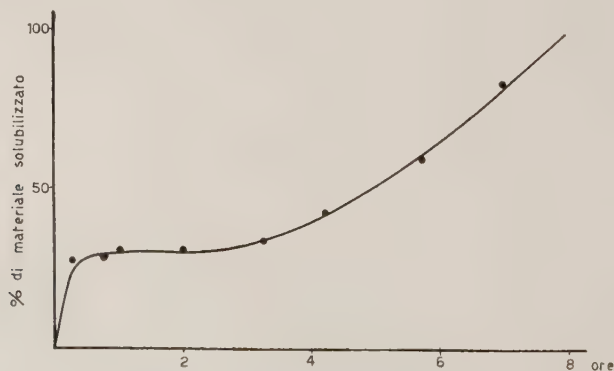


Fig. 2. - Solubilizzazione in NaOH 0,1 N a  $100^{\circ}\text{C}$  del ligamento nucale bovino sgrassato.

A che cosa sia dovuta questa particolare resistenza dell'elastina è difficile dirlo con sicurezza. Può darsi che dipenda dalla natura chimica dell'elastina, ma può darsi anche che alla periferia delle singole fibre elastiche sia disposto un materiale protettivo, di natura non ancora chiarita, presente



Fig. 3. — Fibre di elastina priva di collagene, colorate con la resorcin-fuchina (480  $\times$ ).

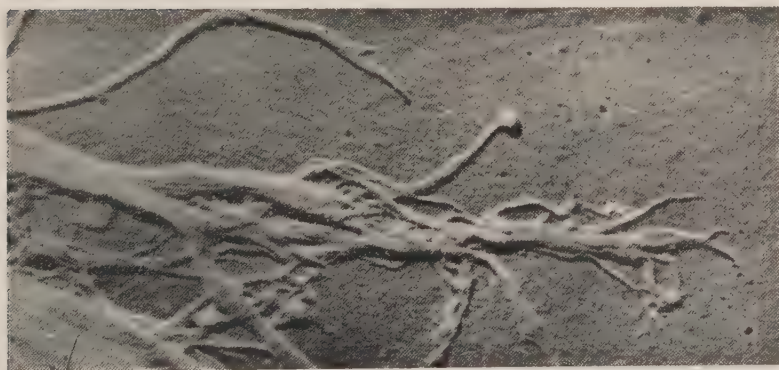


Fig. 4. — Fibre di elastina libere da collagene, osservate al microscopio elettronico. (20.000  $\times$ . Oro-manganina).

in quantità relativamente piccola ma molto più resistente all'azione alcalina. Tale ipotesi sarebbe in accordo con quella di Lloyd e MacGarrod, secondo i quali esisterebbe nella struttura delle singole fibre elastiche un «core» interno ed un manicotto esterno.

Si potrebbe così spiegare perché la solubilizzazione dell'elastina presenti in funzione del tempo due fasi nettamente distinte: la prima, in cui

l'elastina rimane pressoché costante in peso e conserva il suo aspetto fibrillare macroscopico ancora per circa 2 ore; la seconda, in cui l'elastina, degradandosi velocemente, si solubilizza dando origine ad una soluzione colloidale (elastolisato).

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] WOLPERS C., « Klin. Wochenschrift », 23, 169 (1944).
- [2] WOLPERS C., « Makrom. Kem. », 20, 37 (1948).
- [3] ASTBURY W. T., « J. Int. Soc. Leather. Trades. Chem. », 24, 69 (1940).
- [4] LANSING A. I. T., ROSENTHAL T. B., ALEX M., DEMPSEY E. W., « Anat. Rec. », 114, 555 (1954).
- [5] DETTMER, SCHWARZ, « Virch. Arch. », 323, 243 (1953).
- [6] HALL D. A., REED R., TUNBRIDGE R. E., « Nature », 170, 264 (1952).
- [7] ADAIR G. S., DAVIS H. F., PARTRIDGE S. M., « Nature », 167, 605 (1951).
- [8] PARTRIDGE S. M., DAVIS H. F., ADAIR G. S., « Biochem. J. », 61, 11 (1955).
- [9] WOOD G. C., « Biochim. et Biophys. Acta », 15, 311 (1954).
- [10] BEAR R. S., « Adv. in Prot. Chem. », 7, 69 (1952).
- [11] BANGA I., SCHUBER D., « Acta. Physiol. Acad. Sci. Hung. », 4, 13 (1953).
- [12] BAHR G., « Zeitschrift. für. Anat. und. Entwickl. », 111, 237 (1952).
- [13] GROSS J., « J. Exptl. Med. », 89, 699 (1949).
- [14] LLOYD J., MACGARROD, Soc. of Dyers and Colourists. Symposium on fibrous proteins, 24 (1946).
- [15] BOWES J. H., KENTEN R. H., « Biochem. J. », 43, 365 (1948).
- [16] BOWES J. H., KENTEN R. H., « Biochem. J. », 44, 142 (1949).
- [17] LOWRY O. H., GILLIGAN R., KATERSKY E. M., « J. Biol. Chem. », 139, 795 (1941).

**Radiobiologia vegetale.** — *Osservazioni preliminari sugli effetti fisiologici e citogenetici della irradiazione di semi di grano duro « Cappelli » con raggi X e neutroni termici (\*)*. Nota (\*\*) di SILVANA AVANZI, presentata dal Socio A. CHIARUGI.

Durante la permanenza del prof. F. D'Amato presso il [Brookhaven National Laboratory (U.S.A.) fu possibile ottenere dal dott. Seymour Shapiro di quel Laboratorio la irradiazione con diverse dosi di neutroni termici e raggi X di alcuni quantitativi di semi di quattro specie di foraggiere e di tre specie di cereali, fra cui il grano duro « Cappelli ». Ricerche fisiologiche e genetiche su questo materiale, condotte dai proff. F. D'Amato ed E. Moschini, sono attualmente in corso presso l'Istituto di Agronomia della Università di Pisa. Del materiale di grano « Cappelli » una parte è stata messa a mia disposizione per le ricerche delle quali si riportano in questa nota i risultati preliminari.

(\*) Pubblicazione n. 238 del Centro di Studio per la Citogenetica Vegetale del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Firenze.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1957.



## MATERIALE E METODI.

Il materiale studiato consiste di nove lotti di cariossidi irradiati il 17 ottobre 1956 con quattro dosi di neutroni termici (4, 5, 6, 7  $h$  al flusso  $5,82 \times 10^5$  cm<sup>2</sup>/sec corrispondenti alle dosi totali riportate in tabella, e quattro dosi di raggi X (15.000 r, 20.000 r, 25.000 r, 30.000 r), oltre ad un controllo « caldo » che subì tutti i procedimenti preliminari e fu rispedito da Brookhaven insieme al materiale irradiato.

Le prove di germinazione furono effettuate tutte contemporanee ed in duplicato, usando cassule di identico diametro, doppio strato di carta da filtro e identica quantità di acqua. Non fu eseguita la prova di germinazione relativa al trattamento con 30.000 r di raggi X a causa della scarsità di materiale.

Per le prove di accrescimento, allo scopo di ottenere un regolare accrescimento geotropico del fusticino e dell'apparato radicale per una rapida e precisa misurazione, i semi venivano sistemati dieci alla volta tutti allo stesso livello fra due fogli di carta da filtro ricoperti da un foglio di uguali dimensioni di carta assorbente, assicurati con un elastico a delle tavolette di materiale idrofobo e imputrescibile (« Areocel » Montecatini). Queste tavolette (cm.  $30 \times 19 \times 1,5$ ) tenute ferme verticalmente per mezzo di apposito telaio, pescavano con la porzione basale in bacinelle di acqua alla temperatura di 15° C e in ordinarie condizioni di illuminazione di laboratorio. Le prove furono eseguite in triplicato (30 semi alla volta per trattamento) nella prima quindicina di marzo 1957. Per la preparazione del materiale citologico è stata seguita la tecnica dello striscio al Feulgen [1] preceduta dal processo di macerazione del La Cour [2], leggermente modificato. Le cariossidi sono state fatte germinare in cassule contemporaneamente alle prove di accrescimento e per la preparazione degli strisci sono stati presi gli apici delle sole radichette primarie lunghe dai 2 ai 5 mm. (negli apici di questa lunghezza avevamo riscontrato il maggior numero di cellule in primo ciclo mitotico). Gli apici sono stati fissati in 2 BD (20 minuti) quindi macerati in alcool assoluto + acido cloridrico in parti uguali (30 minuti) e poi colorati con la tecnica dello striscio al Feulgen previa usuale idrolisi a 60° C per 7 minuti in HCl/N. Le analisi delle mutazioni sono state fatte su anafasi medie e terminali. Per dette analisi sono stati seguiti i seguenti criteri: ogni frammento doppio è stato considerato causato da una sola rottura (1 B''); i frammenti doppi puntiformi (« minutes ») causati pure da una sola rottura (1 B'') (vedi discussione); per un ponte doppio accompagnato da frammento doppio sono state considerate due rotture (2 B''); per un « ring » due rotture (2 B''). Per quanto riguarda i ponti cromatidici accompagnati da frammento, poiché il materiale in esame è stato tutto trattato allo stato quiescente, noi li abbiamo interpretati come dovuti ad una rottura « pre-split » (1 B'') seguita da fusione « post-split » (« sister-union »). Per i frammenti cromatidici, non potendo appurarne l'origine, ci siamo limitati a contarli come tali, cioè dovuti



a rottura cromatidica ( $I B'$ ) (vedi discussione). Inoltre, abbiamo riunito nel gruppo « anafasi non analizzabili » tutti quegli stadi per i quali non era possibile una esatta valutazione numerica delle rotture in essi avvenute, ma che certamente avevano 20 rotture cromosomiche (spesso questo numero si può considerare una sottostima).

Sono stati anche considerati i pochi casi di rotture incomplete « pre-split » ( $B''_{(i)}$ ) e « post-split » ( $B'_{(i)}$ ) secondo i criteri di D'Amato e D'Amato Avanzi [3].

#### OSSERVAZIONI E DISCUSSIONE.

Prendendo in considerazione la prima Tabella, appare chiaro che sia i neutroni termici sia i raggi X non influenzano la germinabilità del materiale trattato, ma ritardano sensibilmente la germinazione. Questo ritardo appare più evidente per i raggi X che per i neutroni termici ed è tanto più forte quanto più intenso è il trattamento subito. Ciò, d'altra parte, conferma quanto altri Autori avevano trovato in altre piante, per esempio nel tabacco [4] e nel grano duro « Carleton » [5]. La seconda Tabella mette in rilievo, accanto all'effetto citologico, i dati delle prove di allungamento del fusticino e dell'apparato radicale. Anche in questo campo risulta più intensa l'azione dei raggi Röntgen e si nota chiaramente il graduale rafforzarsi dell'effetto in rapporto al rispettivo intensificarsi delle dosi. Dalle lunghezze medie del fusticino e dell'apparato radicale ci sembra di poter dedurre un fatto, che speriamo di mettere in luce in seguito con l'analisi statistica, e cioè che, mentre per i raggi X l'effetto inibitore della crescita si manifesta più intenso sul fusto che sull'apparato radicale, per le cariossidi trattate con i neutroni termici l'influenza negativa sull'allungamento si manifesta maggiormente sulla radice che sul fusto. Poiché si sa che l'apice vegetativo è citologicamente di alcune volte più resistente di quello radicale all'azione di mutageni fisici e chimici [6], il fatto che nel fenomeno di inibizione dell'allungamento l'azione dei raggi X si manifesta più intensa proprio nel fusto ci dimostra che questa depressione non è causata esclusivamente dal danneggiamento cromosomico, ma è essenzialmente un fenomeno fisiologico. D'altra parte, se si assume come misura del danneggiamento cromosomico il n. di  $B''$  per anafase, risulta evidente dalla Tabella II che ad un eguale effetto citogenetico di neutroni e di raggi X fa riscontro un molto maggiore effetto inibitore della crescita da parte del secondo tipo di radiazione (vedi per esempio il trattamento IV con neutroni termici e il trattamento con 30.000 r di raggi X). Queste osservazioni sulla maggiore intensità del danneggiamento fisiologico operato dalla radiazione Röntgen rispetto ai neutroni termici confermano le osservazioni di precedenti Autori sui cereali irradiati [7]. Così pure le nostre osservazioni portano conferma al fatto, già noto nella letteratura, di una chiara differenza di azione citogenetica fra raggi X e neutroni termici [8].

TABELLA I.

*Andamento della germinabilità in lotti di cariossidi di grano «Cappelli» sottoposti a dosi diverse di neutroni termici e di raggi X e in lotto di controllo. Prove in duplicato eseguite simultaneamente alla temp. di 16°C (100 cariossidi per prova).*

Tipo di radiazione	Dose totale	N° semi germinati dopo						N° semi non germinati
		4 gg	6 gg	8 gg	10 gg	12 gg	15 gg	
Controllo		13	34	45	5	2	—	1
id.		13	29	47	8	2	—	1
Neutroni termici	$8,38 \times 10^{12}$ (I)	16	25	52	4	2	—	1
id.	id.	10	13	44	21	11	—	1
id.	$1,05 \times 10^{13}$ (II)	5	14	56	18	7	—	—
id.	id.	9	14	55	13	8	—	1
id.	$1,26 \times 10^{13}$ (III)	20	8	45	12	10	3	2
id.	id.	1	2	58	24	12	2	1
id.	$1,47 \times 10^{13}$ (IV)	1	2	61	21	11	2	2
id.	id.	11	16	53	17	2	1	—
Raggi Röntgen	15.000 r	5	15	62	13	2	2	1
id.	id.	12	31	47	6	3	—	1
id.	20.000 r	1	10	58	18	8	5	—
id.	id.	—	13	42	29	10	5	1
id.	25.000 r	—	4	47	24	17	6	2
id.	id.	—	8	41	27	15	8	1

Le Tabelle II e III mettono in risalto i vari tipi di mutazioni cromosomiche e la loro diversa distribuzione ed è molto chiaro che la media di rotture cromosomiche aumenta con l'intensificarsi del trattamento. Per quanto riguarda i frammenti cromatidici, noi ci siamo limitati, come è stato detto, a contarli come tali; ma è molto probabile, che, trattandosi di materiale irradiato allo stato quiescente, una buona percentuale di essi sia dovuta alla «sister-union» in fase «post-split» di rotture B''. Questa ipotesi è avvalorata dalla presenza di frammenti cromatidici più lunghi di un braccio cromosomico; condizione già riportata per semi di orzo trattati con raggi X [5].

TABELLA II.

*Accrescimento delle plantule e mutabilità cromosomica in lotti di cariossidi di grano «Cappelli» sottoposti a dosi diverse di neutroni termici e di raggi X e in lotto di controllo. Prove di accrescimento eseguite in 3 ripetizioni di 30 semi ognuna (totale: 90 semi per dose); misurazioni eseguite al 10° giorno.*

Tipo di radiazione	Dose totale	N. plantule	Lungh. media fusticino mm.	Lungh. media radici mm.	N. anafasi studiate	N. anafasi con mutazioni	B''		B'		B'' (i) (totale)	B' (i) (totale)
							totale	per anafase	totale	per anafase		
Controllo		90	71,4	113,5	92	3	2	0,022	—	—	—	1
Neutroni termici	$8,38 \times 10^{12}$ (I)	89	62,5	89,2	91	65	273	3,00	29	0,32	3	1
id.	$1,05 \times 10^{13}$ (II)	90	59,3	86,5	89	75	359	4,03	18	0,20	1	2
id.	$1,26 \times 10^{13}$ (III)	90	56,4	75,3	86	82	433	5,03	18	0,21	3	—
id.	$1,47 \times 10^{13}$ (IV)	90	50,9	64,1	89	86	675	7,57	10	0,11	—	—
Raggi Röntgen	15.000 r	89	53,8	88,5	81	64	240	2,98	10	0,12	—	—
id.	20.000 r	90	36,2	65,8	77	66	267	3,47	12	0,15	—	—
id.	25.000 r	89	31,6	58,1	87	86	497	5,71	20	0,22	—	2
id.	30.000 r	90	17,3	34,7	74	73	510	6,90	26	0,35	—	—

TABELLA III.

*Distribuzione dei vari tipi di mutazioni cromosomiche, dovute a rotture B'', in cariossidi di grano duro « Cappelli » sottoposte ad irradiazione con diverse dosi di neutroni termici e di raggi X.*

Tipo di radiazione	Dose totale	N° B''	N° Ponti doppi (interscambi)	Frequenza interscambi (1)	N. Ponti semplici (« sister-union »)	N. « rings »	N. coppie di « minutes »	Frequenza « minutes » (2)	N. frammenti doppi (3)
Neutroni termici	$8,38 \times 10^{12}$ (I)	273	27	0.198	3	—	6	0.022	210
id.	$1,05 \times 10^{13}$ (II)	359	28	0.156	2	—	14	0.039	297
id.	$1,26 \times 10^{13}$ (III)	433	31	0.143	2	1	61	0.142	306
id.	$1,47 \times 10^{13}$ (IV)	675	49	0.144	3	1	123	0.182	449
Raggi Röntgen	15.000 r	240	20	0.166	3	—	42	0.178	155
id.	20.000 r	267	28	0.210	4	—	58	0.217	149
id.	25.000 r	497	24	0.097	4	1	65	0.131	378
id.	30.000 r	510	21	0.083	5	1	87	0.170	374

(1) Calcolata come rapporto fra n. B'' responsabili degli interscambi e n. totale B''.

(2) Calcolata come rapporto fra n. B'' responsabili dei « minutes » e n. totale B''.

(3) Sono esclusi i frammenti doppi accompagnanti i ponti doppi (2 B'' = 1 ponte doppio + 1 frammento doppio).



Le rotture incomplete (sub-cromatidiche) si sono presentate scarse ed in massima parte nei trattamenti deboli; fatto molto comprensibile, rappresentando essi un effetto di «bassa intensità» come soprattutto dimostrato da azioni mutagene chimiche [9, 3]. Limitando la nostra discussione ai due tipi di mutazioni cromosomiche che ci appaiono più interessanti, cioè ponti doppi e «minutes», appare evidente la differenza di azione fra i due tipi di radiazione. La frequenza degli interscambi (calcolata come rapporto fra il numero di  $B''$  che danno ponti doppi e numero totale di  $B''$ ) risulta pressoché costante nei vari trattamenti effettuati coi neutroni termici, mentre diminuisce sensibilmente nei due trattamenti più forti con raggi Röntgen. È evidente che l'intensificarsi di azione dei raggi X determina nella cellula una nuova situazione per la quale viene a ridursi il numero di  $B''$  capaci di realizzare interscambi. Per quanto riguarda i «minutes», essi possono considerarsi come dovuti a due diversi tipi di rottura cromosomica: o sono dei normali frammenti terminali dovuti a rottura vicino al telomero (cromomero terminale), o sono delle delezioni intercalari [8, 10, 11]. Pure ammettendo tutte e due le modalità di formazione, dallo studio dei nostri dati possiamo però dedurre che appare più probabile la formazione di questo tipo di frammenti come delezione intercalare. Infatti, se si trattasse di rotture in prossimità del telomero, si dovrebbe avere la stessa frequenza di interscambi fornita da altri  $B''$ ; al contrario, sono eccezionali i ponti doppi accompagnati da coppie di «minutes». Come già detto, noi abbiamo considerato questi frammenti dovuti ad una sola rottura  $B''$ , accettando l'idea del Sax [10, 11] che essi si realizzino in seguito ad una sola azione rompente, la quale riesce a distaccare un giro della spirale cromonemica, realizzando un frammentino che per autoriproduzione darebbe la coppia di «minutes». Ci sembra, invece, difficile poter ammettere la loro origine come conseguenza di 2  $B''$  producentisi vicinissime sul filamento cromosomico intercinetico [8]; ciò, soprattutto nel caso di trattamenti producenti un'altissima frequenza di «minutes». Il Rick ha trovato che in *Tradescantia* la frequenza delle delezioni intercalari («minutes») aumenta secondo la potenza 1,5 della dose per irradiazioni X ad intensità relativamente alte, concludendo che esse rappresentano «a mixture of one- and two-hit aberrations». Le nostre osservazioni preliminari con i raggi X sembrerebbero indicare una relazione lineare o circa tale, dando ragione all'idea del Sax, che si possa trattare di aberrazioni «one-hit»; problema, questo, che speriamo di risolvere con l'analisi di altro materiale. Per i neutroni termici la relazione fra frequenza di «minutes» e dose appare del tutto oscura, ma comunque chiaramente diversa da quella vigente per i raggi X.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] D'AMATO F., «Nuovo Giorn. Bot. Ital.», n. s., 53, 657-668 (1940).
- [2] LA COUR L. F., «Bot. Rev.», 13, 216-240 (1947).
- [3] D'AMATO F., e D'AMATO AVANZI M. G., «Caryologia», 6, 134-150 (1954).
- [4] SCARASCIA G. T., Convegno di Genetica, Pisa 1956, «Ricerca Scient.», An., 27, Suppl., 135-145 (1957).

- [5] CALDECOTT R. S. e SMITH L., « Cytologia », 17, 224-242 (1952).
- [6] D'AMATO F., e HOFFMANN-OSTENHOF O., « Advances in Genetics », 8, 1-28 (1956).
- [7] MAC KEY J., « Hereditas », 40, 65-180 (1954).
- [8] GILES N. H., « Radiation Biology » (ed. A. Hollaender), 1, 713-761 (1954).
- [9] D'AMATO F., « Caryologia », 2, 229-297 (1950).
- [10] SAX K., « Genetics », 23, 494-516 (1938).
- [11] SAX K., « Genetics », 25, 41-68 (1940).
- [12] RICK C.M., « Genetics », 25, 467-482 (1940).

**Genetica.** — *La variabilità sessuale nelle popolazioni eterogoniche* <sup>(\*)</sup>. Nota <sup>(\*\*)</sup> di GUIDO BACCI <sup>(\*\*\*)</sup> presentata dal Socio G. COTRONEI.

Le brusche modificazioni della composizione sessuale e del modo di riproduzione cui vanno soggette le popolazioni eterogoniche costituiscono l'esempio più impressionante dei profondi rapporti che esistono fra variabilità sessuale e variazioni delle condizioni ambientali.

Mi sembra perciò significativo che lo studio moderno della eterogonia sia stato iniziato dal maggiore degli evoluzionisti postdarwiniani con una serie di ricerche sulla biologia dei Cladoceri in base alle quali veniva impostato in modo originale il problema dei rapporti fra differenziazione specifica o razziale ed adattamento. Concludendo tali lavori il Weismann <sup>(1)</sup> affermò infatti che la comparsa dei maschi dopo una serie più o meno lunga di generazioni partenogenetiche non è dovuta all'azione diretta dei fattori ambientali e che i cicli — diversi nelle diverse specie — sono fissati ereditariamente in ciascun di esse.

Le indagini che successivamente furono estese a differenti specie di Cladoceri, a Nematodi, a Rotiferi ed a numerosi gruppi di Imenotteri e di Omotteri hanno dimostrato la grande diffusione del fenomeno della eterogonia e la sua importanza per il popolamento di speciali ambienti ma hanno forse segnato un passo indietro per quanto concerne il problema del suo determinismo.

Anche le ricerche che, sulla scia del Morgan <sup>(2)</sup>, sono state condotte per chiarire le basi citologiche della comparsa dei maschi in alcune specie di Insetti « a ciclo chiuso », si riferiscono a stadi evolutivi estremamente specializzati. In queste specie è stata raggiunta una coincidenza così perfetta fra ciclo stagionale e ciclo biologico che da quest'ultimo sembrano eliminate

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia e Zoologia generale della Università di Sassari.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1957.

(\*\*\*) Per un programma di ricerche eseguito con contributo del C.N.R.

(1) A. WEISMANN, « Z. wiss. Zool. », vol. 33, 55-270 (1880).

(2) T. H. MORGAN, « Biol. Bull. », vol. 10, 210-206 (1906); T. H. MORGAN, « J. Exp. Zool. », vol. 19, 285-321 (1915).

completamente quelle deviazioni dalla norma che sole renderebbero possibile una analisi genetica efficace del sistema riproduttivo e sessuale.

Quanto alle specie «a ciclo aperto», risulta da una lunghissima lista di lavori che la comparsa dei maschi e delle femmine mitiche può essere provocata dai fattori esterni più svariati (variazioni di temperatura, sostanze varie, tipo di nutrimento, affollamento, eccesso di batteri, etc.), per cui le indagini sono ancora informate al concetto di una presunta opposizione fra determinismo genetico e determinismo fenotipico dei sessi (Bonnemaison <sup>(3)</sup> per gli Afidi). Se però la rigidità degli schemi del Weismann si deve considerare superata sia nei confronti dei Cladoceri che nei confronti dei Rotiferi, appare innegabile, in base ai risultati di diversi Autori (von Herwerden <sup>(4)</sup>, Luntz <sup>(5)</sup>, Woltereck <sup>(6)</sup>, Shull <sup>(7)</sup>) che esistono cicli inerenti a ciascuna popolazione eterogonica i quali implicano altresì particolari tipi di variabilità sessuale. E perciò il Vandel <sup>(8)</sup> - riprendendo un concetto già espresso dal Caullery <sup>(9)</sup> - affermava che il ciclo evolutivo di un Cladocero o di un Rotifero si deve considerare come una reazione specifica ed ereditaria rispetto alle condizioni esterne.

Di fronte a queste conclusioni ed allò sterile moltiplicarsi delle ricerche sulla influenza dei fattori ambientali nella comparsa dei maschi sembra ora giustificato riproporre in termini leggermente variati il problema che mi ero posto di fronte al fenomeno della variabilità sessuale negli ermafroditi e nei gonocoristi atipici. La reazione specifica ed ereditaria, di cui parlano il Vandel e gli Autori più qualificati, dipende dalla norma di reazione di un genotipo sessuale unico per ciascuna popolazione eterogonica oppure dipende dalla esistenza di genotipi diversi con norme di reazione diverse di fronte alle variabili condizioni ambientali ed alla loro pressione selettiva? In altre parole l'esistenza di un ciclo eterogonico inerente a ciascuna popolazione dipende da un solo genotipo oppure risulta dalla struttura genetica sessuale peculiare della popolazione stessa? Mentre la costante presenza di individui determinati ereditariamente in senso maschile accanto a quelli determinati in senso femminile si può considerare dimostrata per le specie a ciclo chiuso, il problema si deve considerare aperto persino per talune forme provviste di cromosomi sessuali e - a maggior ragione - per le popolazioni limniche a cicli aperti. Per queste ultime la seconda ipotesi ripresenta in termini moderni la enunciazione del Weismann e, se dimostrata, permetterà di affrontare lo studio genetico di uno dei più vecchi ed affascinanti problemi dell'adattamento sessuale e riproduttivo.

(3) L. BONNEMAISON, « Ann. des epiphyties », vol. 2, 1-380 (1951).

(4) M. A. HERWERDEN, « Verh. K. Akad. Wet., 2 Sect. », vol. 20, 20 pp. (1918).

(5) A. LUNTZ, « Biol. Zbl. », vol. 46, 233-256; 257-278 (1926).

(6) R. WOLTERECK, « Int. Rev. d. ges. Hydrob. u. Hydrogr. », vol. 19, 172-203 (1928).

(7) A. F. SHULL, « Biol. Rev. Cambridge », vol. 4, 218-248 (1929).

(8) A. VANDEL, « La parthénogenèse », Paris (1931).

(9) M. CAULLERY, « Les problemes de la sexualité », Paris (1913).

## ESAME COMPARATIVO DI ALCUNI CICLI.

Prima di procedere ad analizzare i dati in favore di questa ipotesi di lavoro occorre peraltro dare uno sguardo di insieme alle modalità con le quali si attua l'eterogonia nei casi più importanti. Le differenze nelle nomenclature dei vari Autori e paesi, le finalità ed i metodi diversi con i quali certi fenomeni sono stati studiati hanno portato talvolta a dare peso eccessivo a manifestazioni secondarie oscurando quelli che sono i fatti più generali e quindi biologicamente più importanti. Tali sono:

a) dal punto di vista riproduttivo la produzione più o meno frequente di uova di durata come conseguenza del processo anfigonico;

b) dal punto di vista della sessualità la comparsa di maschi che sarà più o meno frequente a seconda che si tratti di popolazioni poli o monocicliche;

c) dal punto di vista genetico la esistenza di una predeterminazione sessuale con la comparsa delle femmine mitiche o addirittura con la esistenza di linee teligene e arrenogene.

Nello schema annesso ho riassunto — senza entrare in dettagli di carattere morfologico e citologico — i cicli di specie di Cladoceri, Rotiferi, Cinipidi ed Afidi prendendo come punto di partenza le femmine fondatrici originate dall'uovo di durata e limitandomi ad un solo ciclo, cioè all'insieme del periodo partenogenetico e di quello anfigonico. Nello schema mi sono poi limitato a indicare semplicemente come pseudomeiosi i casi di partenogenesi meiotica di I e II tipo (White<sup>(10)</sup>), come meiosi anormali quelle che nella linea arrenogena sono seguite dalla degenerazione di alcuni sperm.

Cladoceri e Rotiferi ci forniscono esempi di forme a ciclo aperto e, mentre la citologia dei primi non è controversa anche se fondata su scarsissimi lavori (Schrader<sup>(11)</sup>, Mortimer<sup>(12)</sup>), quella dei Rotiferi è tuttora in uno stato caotico con Whitney<sup>(13)</sup> il quale sostiene la esistenza di una aploidia maschile e Tauson<sup>(14)</sup> la quale ritiene che gli individui di ambedue i sessi siano diploidi.

*Phylloxera caryaecaulis*, studiata dal Morgan<sup>(2)</sup>, costituisce l'esempio estremo di un ciclo fissato geneticamente nel quale già una parte delle fondatrici è destinata a dare una linea produttrice di femmine ed un'altra una linea produttrice di maschi, caratterizzata da un cromosoma X<sup>1</sup> che si distingue per talune anomalie. Ma si tratta di un tipo di determinazione limitato a quelle specie di Afidi che posseggono numerosi eterocromosomi, nelle quali si stabilisce in tal modo un determinismo rigido dei sessi, che non si riscontra nella maggior parte.

(10) M. J. WHITE, « Animal cytology and evolution ». The Univ. Press. Cambridge, II ed. (1954).

(11) F. SCHRADER, « Z. induct. Abstamm. u. Vererbhlehre », vol. 40, 1-27 (1926)

(12) C. MORTIMER, « Zool. Jb. (Alleg. Zool.) », vol. 56, 323-388 (1936).

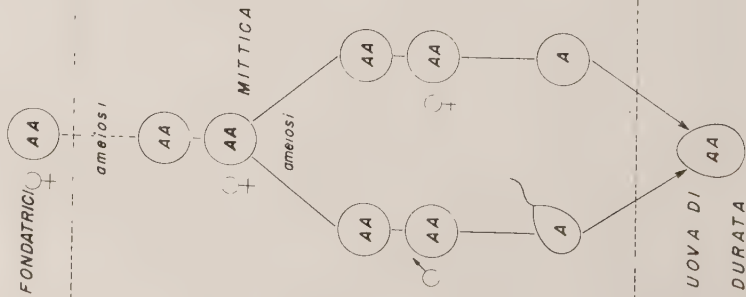
(13) D. D. WHITNEY, « Biol. Bull. », vol. 25, 318-321 (1913).

(14) A. TAUSON, « Z. Zellforsch. », vol. 4, 652-681 (1927).

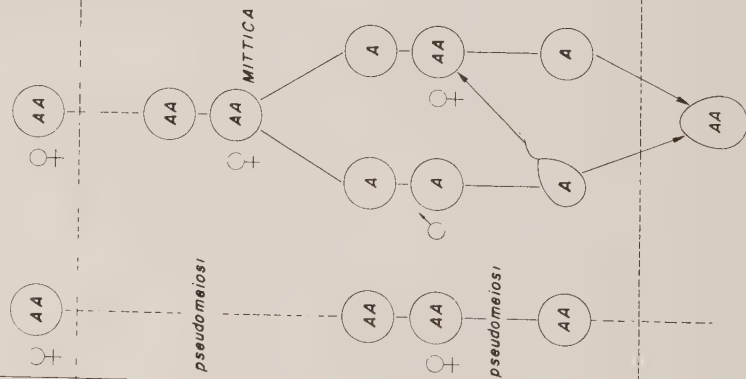


# SPECIE A CICLO APERTO

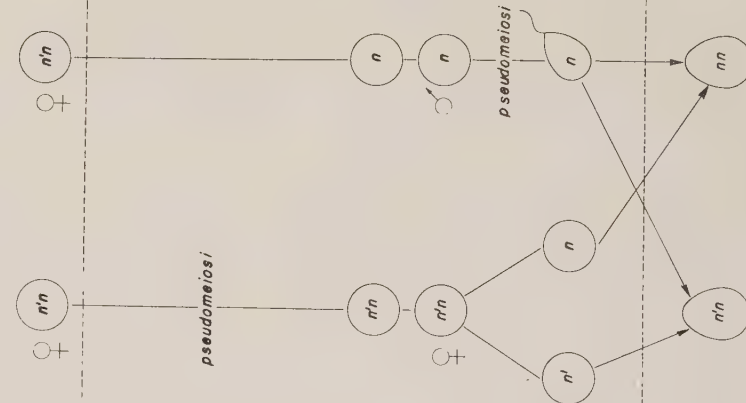
**DAPHNIA MAGNA**  
(sec. Mortimer, 1936)



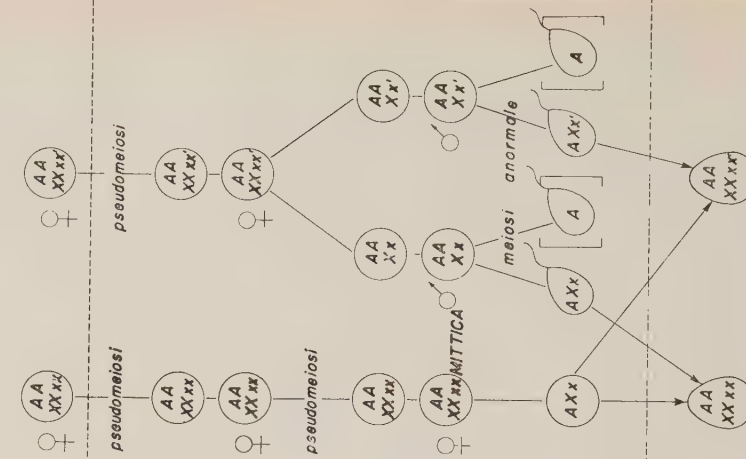
**ASPLANCHNA**  
(sec. Whitney, 1929)



**NEUROTERUS**  
(sec. Patterson, 1928)



**PHYLLOXERA**  
(sec. Morgan, 1909-1915)



# SPECIE A CICLO CHIUSO

Anche nel Cinipide *Neuroterus* si distingue una linea teligena ed una arrenogena (Doncaster<sup>(15)</sup>, Patterson<sup>(16)</sup>) e, in assenza di cromosomi sessuali distinti, si suppone che la determinazione del sesso si realizzi attraverso una eterozigosi maschile o, più probabilmente (per analogia con *Habrobracon*), attraverso una eterozigosi femminile.

#### PREDETERMINAZIONE E VARIABILITÀ SESSUALE.

I due esempi tratti dagli Insetti hanno un notevole interesse in quanto dimostrano — pur nella loro diversità — l'esistenza di una predeterminazione sessuale (Morgan<sup>(2)</sup>) con la formazione di linee produttrici di maschi oppure di femmine anche in assenza di differenze fenotipiche che, nel caso di *Neuroterus*, non sono rivelabili neppure al livello nucleare. L'esistenza di fenotipi femminili destinati a produrre femmine accanto a fenotipi identici destinati a dare maschi ci ricorda quindi (se pur ce ne fosse bisogno) la necessità di tener presente la eventuale esistenza di una variabilità genetica anche di fronte ad una uniformità fenotipica. Solo partendo da tali principi possono essere affrontati con qualche possibilità di soluzione i problemi della cosiddetta determinazione fenotipica.

Il fenomeno della predeterminazione accertato in *Phylloxera* consente pertanto di impostare il problema genetico della variabilità sessuale nelle popolazioni eterogoniche presupponendo che anche nelle specie di Insetti a ciclo aperto e nelle forme limniche sussista un orientamento più o meno accentuato in senso maschile o femminile nei componenti dei diversi cloni. Tale determinismo sarà affidato a geni eterocromosomici ed autosomici nelle specie provviste di eterocromosomi ed a geni autosomici in quelle che ne sono prive. E non è necessario ammettere che la loro trasmissione debba essere legata al meccanismo del reincrocio, ma potrà essere affidata alla esistenza di poligeni, di alleli sessuali multipli, di modificatori sessuali (Bacci<sup>(17)</sup>).

Effettivamente le esperienze di Maupas — confermate dal Whitney<sup>(18)</sup> — permisero già nel 1891<sup>(19)</sup> di distinguere nei Rotiferi eterogonici femmine mittiche e femmine amittiche anche in assenza di caratteri morfologici distintivi, che solo più tardi furono riscontrati da Storch<sup>(20)</sup> nella diversa struttura citoplasmatica delle uova rispettive. Questa distinzione fra femmine che possono o no produrre maschi ci riporta quindi al caso dei Cinipidi e degli Afidi già citati con la differenza che, mentre in questi ultimi si riscon-

(15) L. DONCASTER, « Proc. Roy. Soc. », B., vol. 83, 476-489 (1910). L. DONCASTER, « Proc. Roy. Soc. », B., vol. 89, 183-200 (1916).

(16) J. T. PATTERSON, « Biol. Bull. », vol. 54, 201-211 (1928).

(17) G. BACCI, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 26, 110-137 (1955).

(18) D. D. WHITNEY, « J. Morph. », vol. 47, 415-433 (1929).

(19) E. MAUPAS, « C. R. Acad. Sci. », vol. 113, 388-390 (1891).

(20) O. STORCH, « Zool. Jb. (Anat. Ontog.) », vol. 45, 309-401 (1924).

trano due tipi diversi già nelle femmine fondatrici, nei Rotiferi non si è indagato se le genitrici delle femmine mittiche presentano proprietà particolari.

Anche per i Cladoceri, dove la stessa femmina può generare partenogeneticamente femmine e maschi, non possediamo ricerche sistematiche intese a stabilire se esistano linee particolarmente determinate in senso femminile ed altre più orientate verso la produzione di maschi, come ad esempio si verifica in *Dinophilus* (Nachtsheim<sup>(21)</sup>, Bacci<sup>(22)</sup>).

Da questo punto di vista appaiono peraltro estremamente significative quelle osservazioni che hanno dimostrato una ridotta capacità a produrre maschi da parte di ceppi che si sono riprodotti partenogeneticamente per un gran numero di generazioni (Banta<sup>(23)</sup> per *Moina macrocopa*, Whitney<sup>(24)</sup>, Luntz<sup>(25)</sup> per i Rotiferi). Pure nelle specie di Afidi a ciclo aperto, come i *Chermes*, si è dimostrato (Marchal<sup>(26)</sup>) che le razze di recente adattatesi su *Pinus* ad una partenogenesi indefinita, non sono più capaci di dare maschi anche se riportate su piante (come *Picea*) nelle quali svolgevano normalmente una fase anfigonica. Ci troviamo quindi di fronte sia in laboratorio che in natura ad una ridotta variabilità sessuale di alcuni ceppi che appaiono così orientati in senso femminile e quindi maggiormente atti alla riproduzione partenogenetica. Esperienze opportunamente condotte potranno meglio chiarire questi fenomeni. La eliminazione irreversibile di un sesso è comunque indicativa - e direi dimostrativa - della natura genetica della variabilità sessuale preesistente nei casi citati.

Quanto alle ricerche ed alle osservazioni sulla possibilità di prolungare indefinitamente la fase partenogenetica (Banta<sup>(23)</sup> per i Cladoceri; Whitney<sup>(24)</sup> e Luntz<sup>(25)</sup> per i Rotiferi; Soliman<sup>(27)</sup> per gli Afidi) esse stanno soltanto a dimostrare che in determinate condizioni favorevoli si producono solo femmine. Questi ed analoghi lavori sul determinismo fenotipico indicano in sostanza che certi fattori favoriscono l'espressione di certi caratteri nel fenotipo individuale ma nulla possono rivelare sulla natura del genotipo. Si tratta di indagini che hanno qualche interesse dal punto di vista ecologico ma che - per la loro stessa impostazione - non sono in grado di affrontare il problema della struttura genetica di una popolazione ed anzi ne mascherano talvolta la corretta soluzione.

Possiamo pertanto concludere che nessun dato della letteratura è atto ad escludere la possibile esistenza di genotipi sessuali diversi nell'ambito di popolazioni eterogoniche ed anzi talune ricerche ci inducono ad ammettere in certi casi l'esistenza di diversi genotipi.

(21) H. NACHTSHEIM, « Ark. mikr. Anat. », vol. 69, 63 (1925).

(22) G. BACCI, « Ric. Scient. », vol. 26 (Suppl.), 3-8 (1956).

(23) A.M. BANTA, « Amer. Nat. », vol. 59, 50-61 (1925).

(24) D. D. WHITNEY, « J. Exp. Zool. », vol. 12, 337-362 (1912).

(25) A. LUNTZ, « Biol. Zbl. », vol. 429, 465-482 (1929).

(26) P. MARCHAL, « Ann. Sc. Nat. Zool. », vol. 18, 153-385 (1913).

(27) L. B. SOLIMAN, « Univ. California Public. Entomol. », vol. 4 (1927).

## UNA IPOTESI DI LAVORO.

Partendo da queste constatazioni è quindi possibile abbozzare una teoria esplicativa di quel ritmico alternarsi di generazioni esclusivamente femminili con generazioni dotate di maschi e di femmine, il quale presenta modalità proprie a ciascuna popolazione, come dimostrano osservazioni dirette ed indirette.

Nel pool genico delle razze policicliche – data la più frequente comparsa dei maschi – il rapporto fra geni maschili e femminili è ovviamente più favorevole ai primi che nelle razze monocicliche e – a fortiori – che nelle razze acicliche. La persistenza della condizione policiclica dipenderà pertanto dal mantenersi durante l'anno di un equilibrio globale dei fattori selettivi esterni contro i genotipi maschili e dei corrispondenti fattori contro i genotipi femminili. Il passaggio irreversibile da una condizione poli o monociclica a quella aciclica deriverà da un prevalere dei fattori contro i genotipi maschili di cui abbiamo visto gli effetti attraverso le citate ricerche di Banta, Whitney ed altri. Che questa possa essere una corretta interpretazione dei fenomeni è comprovato dalle esperienze su *Ophryotrocha* in cui dalla condizione ermafrodita (e quindi bisessuale) di un ceppo ho ottenuto per selezione il passaggio ad una condizione molto vicina a quella monogenica (Bacci<sup>(17)</sup>).

Delineata l'interpretazione delle differenze fra razze o specie a cicli diversi si può affrontare la questione della composizione sessuale delle diverse generazioni nell'ambito di una singola razza.

Data una certa variabilità genetica nell'ambito delle specie o popolazioni eterogoniche, è utile distinguere quelle che presentano partenogenesi meiotica da quelle a partenogenesi ameiotica. Nelle prime le femmine fondatrici presenteranno il grado maggiore di eterozigosi individuale che andrà poi attenuandosi di generazione in generazione nei singoli cloni. Nelle seconde invece la eterozigosi si manterrà inalterata – e potrà essere incrementata da mutazioni – nelle generazioni partenogenetiche successive. Nel primo caso avremo quindi l'affermarsi progressivo della omozigosi nell'ambito dei diversi cloni che pertanto si differenziano sempre più gli uni dagli altri, nel secondo caso la differenziazione resterà invece quella che si è stabilita con la riproduzione anfigonica.

Nel frattempo le varianti condizioni stagionali esercitano un'azione duplice sui diversi genotipi gradualmente emergenti nei casi di partenogenesi meiotica e su quelli fissatisi al momento dell'anfimissi. L'azione più ovvia si esplica al livello fenotipico favorendo prima l'espressione dei geni femminili, che è rivelata dal rapidissimo riprodursi delle femmine amittiche, favorendo poi l'espressione dei geni maschili, che permette la comparsa delle femmine mittiche e dei maschi stessi. La seconda azione si manifesta invece attraverso la selezione dalla quale sono incrementati in un primo tempo i genotipi prevalentemente femminili e in un secondo tempo quei genotipi nei quali le differenze fra i geni M ed F hanno raggiunto il minimo epistatico neces-



sario alla espressione del sesso maschile nelle favorevoli (per quel sesso) condizioni ambientali del momento. Fenomeni ciclici del genere sono stati ormai da tempo dimostrati in *Adalia* (Timofeeff-Ressowsky<sup>(28)</sup>) e ne conosciamo la diffusione e la importanza attraverso una serie di ricerche ormai classiche (Dobzhansky e coll.) per cui la possibile applicazione di questi casi ben noti ad un sistema di determinazione sessuale poliallelico o poligenico appare pienamente giustificata e plausibile. Inutile dire che questa ipotesi spiegherebbe pure ottimamente anche i fenomeni di ciclomorfosi così di frequente associati ai cicli eterogonici.

La riprova di questa ipotesi richiede l'impiego di tecniche e soprattutto di criteri idonei a sceverare i fenomeni dovuti all'azione della selezione da quelli dovuti all'influenza diretta dell'ambiente, compito non facile come hanno dimostrato le esperienze di Woltereck sulla cosiddetta induzione collettiva duratura<sup>(6)</sup> e le osservazioni di D'Ancona e Volterra-D'Ancona<sup>(29)</sup> sulle dafnie di Nemi.

Richiamando la distinzione fra specie a partenogenesi meiotica e specie a partenogenesi ameiotica ricorderò poi che nelle prime i fattori ambientali opereranno su materiale genetico più sensibile perchè differenziato mentre nella seconda i fattori ambientali opereranno verosimilmente su genotipi più omogenei ma necessariamente dotati di norme di reazione più estese. Da ciò l'interesse di un ulteriore approfondimento delle basi citologiche della partenogenesi nelle specie a ciclo aperto.

L'integrazione dei processi che ho delineato sottintende l'esistenza di una organizzazione del pool genico (Wright e Dobzhansky<sup>(30)</sup>, Wallace<sup>(31)</sup>) delle popolazioni eterogoniche in fase partenogenetica nelle quali la subitanea insorgenza di tipi riproduttivi e sessuali diversi sarà pertanto favorita da tre fattori potentissimi: il variare dei coefficienti di selezione con il variare delle condizioni ambientali, l'assenza di scambi genetici fra i diversi cloni e, nei casi della partenogenesi meiotica, il realizzarsi progressivo della omozigosi la quale metterà sempre più in risalto i valori adattivi di particolari geni o strutture genetiche.

Se la mia interpretazione non è errata ci troviamo di fronte ancora una volta ad uno di quei casi in cui meccanismi in apparenza antagonisti (la determinazione fenotipica e quella genetica) si integrano nella realizzazione di complessi fenomeni biologici. La concezione di Weismann sembrava implicare l'esistenza di un misterioso ritmo intrinseco della specie o della razza ed ora viene spiegata dalla varia organizzazione dei pools genici e proprio da quella azione dei fattori esterni che sembrava metterne in forse la validità. Quella che il Vandel<sup>(8)</sup> indicava in prima approssimazione come « norma

(28) N. W. TIMOFEEFF RESSOWSKY, « Biol. Zbl. », vol. 60, 130-137 (1940).

(29) U. D'ANCONA e L. VOLTERRA-D'ANCONA, « Ric. Scient. », vol. 19 (Suppl., 3-15 (1949)).

(30) S. WRIGHT and Th. DOBZHANSKY, « Genetics », vol. 31, 125-156 (1946).

(31) B. WALLACE, « Symposium in Genetics of Population Structure », 67-94 (1954).

di reazione di una specie eterogonica » appare così la risultante delle norme di reazione dei genotipi individuali e della loro peculiare organizzazione nelle popolazioni.

La presente interpretazione muove da una concezione parzialmente nuova della genetica del sesso nei Metazoi e dalla applicazione di talune acquisizioni della genetica di popolazioni ai fenomeni finora noti della partenogenesi ciclica. Essa viene presentata come una ipotesi di lavoro capace di suscitare nuovi tipi di ricerche in un campo attualmente un po' negletto della zoologia.

**Biologia.** — *L'attività neurosecretoria del sistema ipotalamo-ipofisario durante lo sviluppo di un Anfibio urodelo* (\*). Nota (\*\*) di MILENA MARINI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Nell'ipotesi che l'accrescimento nucleare riscontrato negli elementi del centro preottico magnocellulare di *Triturus* al termine della metamorfosi fosse correlato con la loro attività neurosecretoria <sup>(1)</sup>, ho iniziato un'indagine intesa a precisare l'andamento di tale attività nell'ultimo periodo larvale. Nel corso di queste osservazioni sono stata indotta ad esaminare il sistema ipotalamo-ipofisario degli Anfibi urodeli durante tutto lo sviluppo, sia perché i dati sull'inizio dei fenomeni neurosecretori sono pochi (specie negli Anamni), sia perché l'Anfibio urodelo da me esaminato è apparso un materiale particolarmente idoneo a precisare alcuni punti che nella letteratura risultavano poco chiariti.

Nella presente Nota espongo i primi risultati sull'inizio e sull'andamento dei fenomeni neurosecretori che si verificano durante l'ontogenesi del *Triturus cristatus*.

Come è noto, nell'ipotalamo di tutti i Vertebrati vi sono elementi neurosecretori: schematicamente si può dire che essi costituiscono il centro preottico magnocellulare negli Anamni e i centri sopraottico e paraventricolare negli Amnioti. Il materiale elaborato dagli elementi di questi centri, tramite il fascio ipotalamo-ipofisario, raggiunge la neuroipofisi.

Bargmann <sup>(2)</sup> per primo ha riscontrato che il materiale neurosecretorio si colora elettivamente con l'ematossilina cromica di Gomori <sup>(3)</sup>. Schiebler <sup>(4)</sup> in seguito a ricerche condotte con metodi istochimici ritiene che il materiale

(\*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » della Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 19 ottobre 1957.

(1) Vedi: M. MARINI, « Riv. di Neurobiol. », (Perugia), 2, p. 495 (1956).

(2) W. BARGMANN, « Z. Zellforschung », 34, p. 610 (1949); (da: « Berichte Wissensch. Biol. », 69, 333; 1950).

(3) G. GOMORI, « Amer. Journ. of Pathol. », 17, p. 395 (1941).

(4) T. H. SCHIEBLER, « Acta Anat. », 13, p. 233 (1951); *ivi*, 15, p. 393 (1952).

neurosecretorio sia di natura glicolipoproteica; secondo indagini più recenti, invece, esso sarebbe una proteina ricca in cistina (Sloper<sup>(5)</sup>).

In base a ricerche sperimentali (Hild e Zetler<sup>(6)</sup>) si ritiene che gli ormoni postipofisari abbiano la loro origine nei centri ipotalamici.

Come ho già accennato, sono invece poco numerose le notizie sull'attività neurosecretoria del sistema ipotalamo-ipofisario durante lo sviluppo dei Vertebrati.

Negli Amnioti l'attività neurosecretoria inizia tardivamente: a stadi avanzati dell'ontogenesi in Rettili (Hild<sup>(7)</sup>) ed in Uccelli (Wingstrand<sup>(8)</sup> Grignon<sup>(9)</sup>), addirittura dopo la nascita in Mammiferi (Bargmann<sup>(2)</sup>, Dawson<sup>(10)</sup>). Negli Uccelli i granuli neurosecretori compaiono contemporaneamente nel centro sopraottico e nella neuroipofisi (Wingstrand, Grignon), negli altri Amnioti esaminati, prima nella neuroipofisi poi nei centri ipotalamici (Hild, Dawson).

A proposito degli Anamni, per quanto mi risulta dalla letteratura, l'unica ricerca è quella condotta in un Anfio anuro (*Rana agilis*) da Mazzi<sup>(11)</sup>, l'Autore ha osservato che nella rana, analogamente a quanto si verifica in altri Vertebrati, il materiale neurosecretorio compare prima nella neuroipofisi (in larve di 11,3 mm di lunghezza) e più tardi nel centro preottico magno-cellulare (in larve di 37,3 mm di lunghezza).

Il materiale, impiegato ai fini della presente ricerca è il *Triturus cristatus carnifex* Laur, di cui ho preso in esame stadi embrionali, larvali ed individui adulti. Per la classificazione dei primi stadi (st. 30-36) mi sono basata sulle tavole di Twitty e Bodenstein<sup>(12)</sup> per il *Triturus torosus*, per gli stadi successivi (st. 36-60) sul lavoro della Glücksohn<sup>(13)</sup>.

Il materiale fissato in Bouin ed incluso in paraffina-celloidina, è stato sezionato in serie a 5  $\mu$  di spessore. Per mettere in evidenza il materiale neurosecretorio ho impiegato il metodo all'ematossilina cromica-floxina di Gomori<sup>(3)</sup> modificato da Bargmann<sup>(14)</sup>. Per l'individuazione del centro e l'esame delle strutture nucleari dei suoi neuroni, mi sono valsa delle serie trattate con i metodi di Bodian, Feulgen, Brachet e metodi per le proteine (BPB e ninidrina-Schiff), allestite per una precedente ricerca<sup>(1)</sup>.

Per la conoscenza del sistema ipotalamo-ipofisario degli Anfibi urodela adulti rimando alle ricerche morfologiche e sperimentali di Mazzi<sup>(15)</sup>.

(5) J. C. SLOPER, « Journ. Anat. », 89, p. 301 (1955).

(6) W. HILD & G. ZETLER, « Experientia », 7, p. 189 (1951).

(7) W. HILD, « Z. Anat. Entwickl. », 115, p. 459 (1951); (cit. da MAZZI<sup>(11)</sup>).

(8) K. G. WINGSTRAND, « Ark. f. Zool. », (Uppsala), 6, p. 41 (1953).

(9) G. GRIGNON, « C. R. Soc. Biol. », (Paris), 149, p. 1457 (1955).

(10) A. B. DAWSON, « Anat. Rec. », 117, p. 620 (1953).

(11) V. MAZZI, « Monit. Zool. Ital. », 62, p. 78 (1954).

(12) Vedi in R. RUGH, *Experimental Embryology* (Minneapolis 1952).

(13) S. GLÜCKSOHN, « Roux' Arch. Entw.-mech. », 125, p. 341 (1932).

(14) W. BARGMANN, « Mikroskopie », 5, p. 289 (1950).

(15) V. MAZZI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 3, p. 155 (1947); « Z. Zellforschung », 39, p. 298 (1953); « Monit. Zool. Ital. », 62, p. 1 (1954).

Nei primi stadî di sviluppo, del centro preottico magnocellulare (c.p.m.) si distinguono solamente una porzione anteriore ed una posteriore (Herrick <sup>(16)</sup>); in quest'ultima si differenziano i neuroni magnocellulari. Infatti già allo stadio 37 ho osservato verso lo strato marginale (che è molto sottile) alcuni elementi più voluminosi dei circostanti ed in via di differenziamento, come lo denotano lo sviluppo dei loro prolungamenti e l'aspetto dei loro nuclei: questi si presentano vescicolosi, con cromatina abbondante sulla membrana nucleare sotto forma di zolle e qualche filamento <sup>(1)</sup>. Negli stadî successivi gli elementi magnocellulari in differenziamento divengono più numerosi e si estendono fin quasi allo strato ependimale. Nell'ultimo periodo larvale essi presentano un aumento dimensionale del pirenoforo del nucleo e dei nucleoli ed aumento dei pentosonucleotidi citoplasmatici e nucleolari.

Va notato inoltre che nel c.p.m., ai primi stadî di sviluppo, come già riscontrato nell'organo sottocommessurale all'inizio del differenziamento <sup>(17)</sup>, molti neuroni presentano nuclei lobati ed in corrispondenza delle lobature grossi vacuoli. Non mi soffermo per ora sull'interpretazione da darsi a questo fenomeno perché, sebbene più raramente, l'ho osservato anche in altre regioni del neurasse.

In *Triturus* l'attività neurosecretoria del *centro preottico magnocellulare* inizia precocemente: infatti allo stadio 37 (movimenti ad S) nel citoplasma degli elementi più voluminosi e differenziati si mettono in evidenza, con l'ematossilina cromica di Gomori, rade e minute granulazioni di materiale neurosecretorio (m.n.). I primi granuli neurosecretori compaiono vicino al nucleo in corrispondenza del polo neuritico della cellula (Tav. I, A); in seguito essi divengono più numerosi e si spingono nel primo tratto dell'assone; allo sgusciamiento (st. 41) qualche sottile granulo colorabile con l'ematossilina di Gomori è rilevabile anche lungo i neuriti che compongono il tratto ipotalamo-ipofisario. Nei successivi stadî embrionali (fino allo st. 45) il m.n. continua ad aumentare sia per il differenziarsi di nuovi elementi sia per l'ingrossarsi dei granuli nelle singole cellule (Tav. I, B).

Con l'inizio della vita larvale (st. 46; tuorlo riassorbito) invece il m.n. scompare quasi completamente per riapparire subito dopo (st. 47) come granuli radi e minuti che restano tali fino allo stadio 60. In questo periodo la quantità di m.n. presente nelle singole cellule è minore di quanto ho osservato in alcuni stadî embrionali.

La sostanza colorabile con l'ematossilina cromica di Gomori riprende ad aumentare negli ultimi stadî larvali: allo stadio 61, oltre ai minuti granuli che divengono più numerosi, se ne osservano alcuni di dimerisioni cospicue (simili a piccole gocce), sia in contiguità della membrana nucleare che lungo l'assone; in animali prossimi alla metamorfosi (st. 62-63; individui di 35-40 mm di lunghezza con branchie in regressione, ma vasco-

(16) C. J. HERRICK, « Journ. Comp. Neurol. », 67, p. 381 (1937).

(17) M. MARINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 23, p. 96 (1957).



larizzate) qualche neurone presenta quadri di accumulo simili a quelli che si riscontrano nell'adulto: zolle perinucleari o aggregati compatti specie al polo neuritico della cellula (formazione di coni e calotte) (Tav. I, D). Lungo il fascio ipotalamo-ipofisario alcune fibre hanno un aspetto moniliforme («Perlschnurfasern» degli Autori tedeschi), altre invece, particolarmente numerose nella regione infundibolare, si colorano omogeneamente con l'ematossilina di Gomori.

Negli animali appena metamorfosati (st. 63) il m.n. presente nei neuroni magnocellulari è di nuovo scarso ed ha ripreso un aspetto finemente granulare (Tav. I, F).

Nella *neuroipofisi* i primi granuli colorabili con l'ematossilina di Gomori, compaiono allo stadio 41, dopo che nel c.p.m. sono stati rilevati chiari indizi di attività neurosecretoria; più tardi si osservano le prime masse di neurosecreto (st. 43; Tav. I, C) e quindi gli accumuli, che divengono via via più voluminosi (dallo st. 45 in poi; Tav. I, E e G).

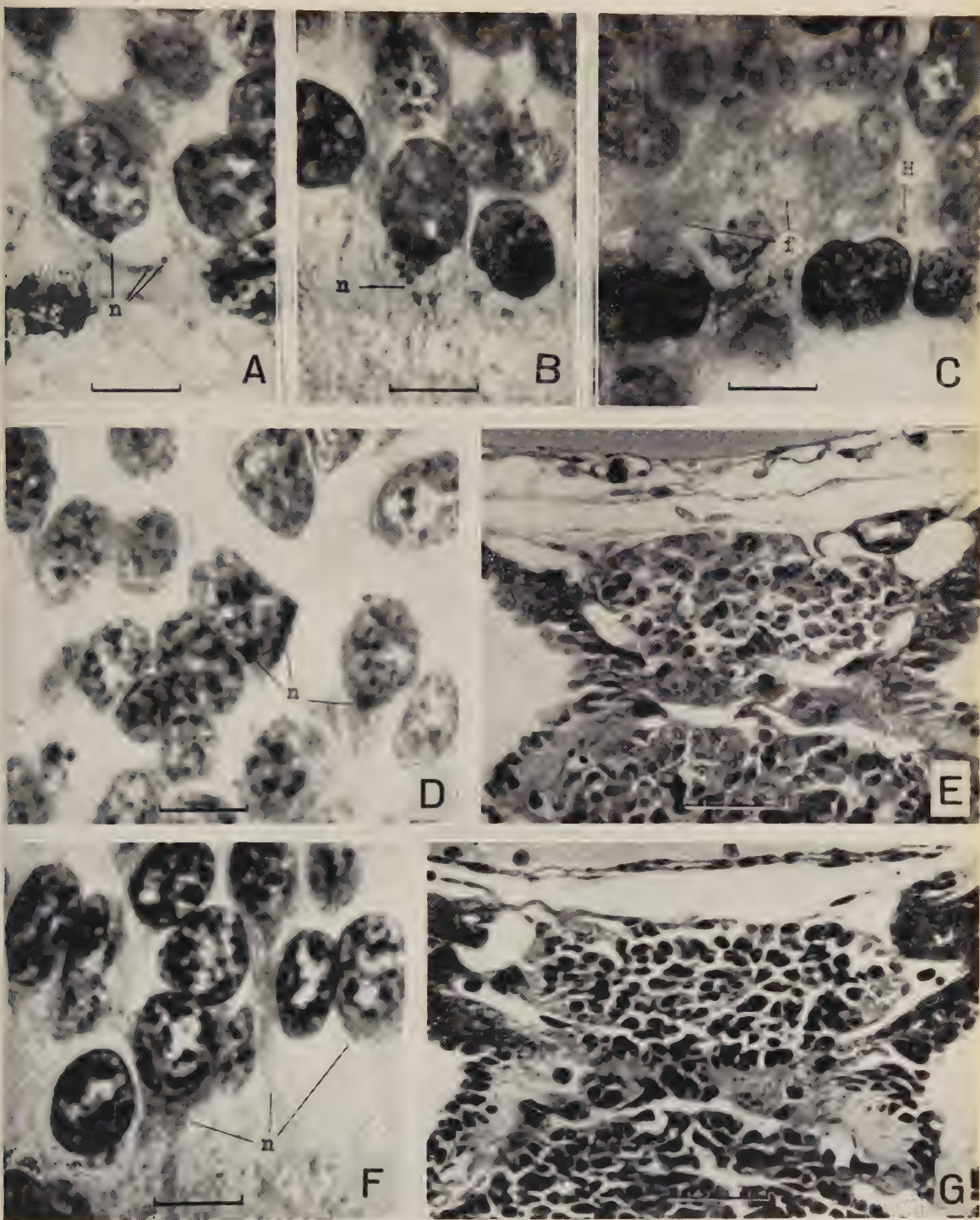
A differenza di quanto si verifica nel c.p.m., nella *neuroipofisi* il m.n. aumenta progressivamente durante tutto lo sviluppo, come lo si deduce dalla maggior concentrazione nell'unità di superficie, nonostante il notevole accrescimento volumetrico cui va incontro la ghiandola.

Come è desumibile dai risultati esposti, i dati più salienti si riferiscono all'inizio dell'attività neurosecretoria ed alle sue variazioni durante lo sviluppo.

L'attività neurosecretoria del c.p.m. inizia quanto la neuroistogenesi è appena cominciata (st. 37); essa pertanto nell'Anfibio urodelo si manifesta più precocemente che in altri Vertebrati (Bargmann <sup>(2)</sup>, Hild <sup>(7)</sup>, Wingstrand <sup>(8)</sup>, Grignon <sup>(9)</sup>, Dawson <sup>(10)</sup>), compresi gli Anfibi anuri (Mazzi <sup>(11)</sup>). La differenza riscontrata tra l'Anfibio urodelo da me esaminato e l'Anfibio anuro (Mazzi <sup>(11)</sup>) può essere dovuta al fatto che in quest'ultimo la cospicua quantità di pigmento, accusata dall'Autore, maschera i primi granuli colorabili con l'ematossilina di Gomori.

Nell'Anfibio urodelo il m.n. compare *prima* nel c.p.m. e *successivamente* lungo il tratto ipotalamo-ipofisario e nella *neuroipofisi*. I precedenti AA., non avendo riscontrato questo fenomeno, hanno dovuto supporre che inizialmente nei centri ipotalamici il m.n. non raggiunga quella concentrazione che lo rende apprezzabile con i metodi istologici. Dalle mie osservazioni invece, grazie al materiale particolarmente favorevole, risulta con chiara evidenza che la sostanza colorabile con l'ematossilina di Gomori compare nella *neuroipofisi* solo qualche giorno dopo che è iniziata l'attività neurosecretoria dell'ipotalamo; queste osservazioni pertanto rappresentano la dimostrazione embriologica del fatto che il materiale neurosecretorio ha origine dagli elementi dei centri ipotalamici.

Circa l'aspetto del m.n. al suo apparire, i miei dati concordano pienamente con quelli di precedenti Autori (Wingstrand <sup>(8)</sup>, Grignon <sup>(9)</sup>, ecc.); anche



Comparsa del materiale neurosecretorio (A, allo st. 37) e suoi quadri in neuroni del c.p.m. durante lo sviluppo di *Triturus* (B, allo st. 43; D, allo st. 62; F, allo st. 63) - Comparsa di masserelle di neurosecreto nella neuroipofisi (C allo st. 43) e aspetti dell'ipofisi allo stadio 62 (E) ed alla metamorfosi (G). Allo stadio 62 e 63 i quadri neurosecretori degli elementi del c.p.m. (D, F) differiscono tra di loro, mentre la neuroipofisi (E, G) presenta aspetti simili.

(n = materiale neurosecretorio; f = fibre del tratto ipotalamo-ipofisario; H = accumulo terminale in una fibra neurosecretoria).  
(Ogni intervallo delle scale in calce = 10  $\mu$ ).





in *Triturus* infatti, il materiale colorabile con l'ematossilina di Gomori compare come granuli radi e minuti sia nei neuroni secernenti che nella post-ipofisi; i granuli più voluminosi e gli aggregati si notano solo quando il m.n. diviene abbondante.

Per quanto riguarda la quantità di m.n., è da notare che mentre nella neuroipofisi aumenta progressivamente durante lo sviluppo, nei neuroni magnocellulari presenta delle variazioni in coincidenza a peculiari stadî che rivestono una notevole importanza fisiologica: ultimi stadî del periodo embrionale, primi ed ultimi stadî della vita larvale, metamorfosi.

Merita infine qualche cenno l'accrescimento nucleare, l'ipertrofia nucleolare, l'aumento dei pentosonucleotidi nel citoplasma e nel nucleolo osservati negli elementi del c.p.m. di *Triturus* al termine della metamorfosi. Avevo già accennato a questi fenomeni in un precedente lavoro <sup>(1)</sup>, e fin d'allora avevo supposto che potessero essere correlati con l'attività neurosecretoria del centro; l'aver riscontrato, nel corso di questa indagine, che i quadri descritti si accompagnano a rarefazione del m.n., ne è la conferma; infatti il complesso di questi fenomeni, alla luce delle correnti vedute, va interpretato come espressione di intensa attività neurosecretoria. È prematuro decidere se l'intensificarsi dell'attività neurosecretoria al termine della metamorfosi sia correlata con il passaggio dell'Anfibio dalla condizione acquatica a quella terrestre. Ho in corso osservazioni, anche su altro materiale, intese a precisare se tale relazione effettivamente sussista o se per caso si tratti di fortuita coincidenza <sup>(18)</sup>.

CONCLUDENDO: nel c.p.m. di *Triturus* l'attività neurosecretoria inizia precocemente (allo st. 37); il materiale colorabile con l'ematossilina cromica di Gomori compare *prima* nel c.p.m. e *poi* nella neuroipofisi (st. 41), come granuli molto minuti.

Nella neuroipofisi i primi aggregati di materiale neurosecretorio compaiono precocemente (st. 43-45) ed in seguito divengono via via più abbondanti; nel c.p.m. invece, gli aggregati sono stati osservati solo in larve prossime alla metamorfosi (st. 62-63), quando qualche neurone presenta quadri di accumulo (zolle e calotte perinucleari).

La quantità di m.n. presente nei neuroni magnocellulari varia notevolmente nel corso dello sviluppo; le maggiori variazioni si riscontrano al passaggio dalla vita embrionale a quella larvale e dalla condizione acquatica a quella terrestre.

(18) Ringrazio il prof. Baffoni per i suoi consigli.



**Biologia.** — *Modificazioni nel midollo spinale in Anfibi anuri e urodeli adulti in seguito all'asportazione di un arto* (\*). Nota (\*\*) di MARISA SCORCUCCHI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

Riferisco in questa Nota preliminare i risultati che ho finora raggiunti in una serie di esperienze — che ho eseguite per consiglio e sotto la guida del prof. T. Perri — consistenti nell'asportazione di un arto in Anfibi anuri e urodeli adulti per studiarne le conseguenze sul midollo spinale.

Gli scopi di queste ricerche sono essenzialmente due. Uno di essi è di agevolare un confronto con quanto avviene eseguendo l'asportazione in embrioni o in larve, cui si riferiscono anche lavori eseguiti in questo stesso Istituto; si viene così a meglio valutare la differenza a seconda che si tratti di uno stadio in cui il midollo spinale si va differenziando e accrescendo oppure quando già da tempo ha raggiunto lo stadio adulto.

L'altro scopo di queste ricerche, e sul quale più mi soffermerò in questo lavoro, è di esaminare i contributi che questo genere di esperienze può apportare per una migliore comparazione tra Anuri, Urodeli e altre forme. È noto infatti che dalla sperimentazione del Detwiler risultò che eseguendo in embrioni di Urodeli l'asportazione di un arto non si hanno nella parte motoria del midollo spinale sensibili differenze tra il lato normale e quello dell'asportazione. Negli Anuri allo stadio di embrioni o larve giovanissime, le ricerche del Braus, del Dürken, del May, del Perri e di altri mostrarono che in essi, a differenza che negli Urodeli, l'asportazione di un abbozzo di arto apporta notevole diminuzione della regione motoria dell'intumescenza interessata. Per questo aspetto gli Anuri si avvicinano, per il loro comportamento, al pollo, secondo quanto in quest'ultimo fu visto particolarmente dall'Hamburger ed allievi (1).

Per quanto a mia conoscenza, non erano state indagate le differenze che emergono nel confronto tra Anuri ed Urodeli se si opera in stadi adulti. Ricordo le ricerche del Cavazzani (1897) che amputando un arto di rana adulta osservò una riduzione di volume nelle cellule dei gangli spinali corrispondenti.

Nell'esecuzione dell'esperienze ho usato esemplari adulti di *Rana esculenta*, *Hyla arborea* e *Triton cristatus*.

In *Rana esculenta* ho esaminato esemplari cui avevo asportato un arto posteriore sacrificandoli da uno a sette mesi dopo l'operazione. L'esame mi-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Perugia, con un contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 26 ottobre 1957.

(1) Per ulteriori dati rinvio particolarmente ai lavori: V. HAMBURGER e R. LEVI-MONTALCINI, in « Genetic Neurology edited by P. Weiss, Chicago », p. 128 (1950); V. HAMBURGER, in « Annals of the New York Acad. Sciences », vol. 55, p. 117 (1952); T. PERRI, in « Arch. Zool. Ital. », vol. 41, p. 369 (1956); T. PERRI, in « Rivista di Biologia », in corso stampa.

croscopico dell'intumescenza lombo-sacrale ha posto in evidenza che le grosse cellule motorie dei corni motori sono, nel lato dell'asportazione, nettamente aumentate di volume. L'aumento è molto notevole ed è a carico sia del nucleo sia del citoplasma; quest'ultimo appare più omogeneo, come rigonfio, rispetto al normale. Nessuna atrofia cellulare. Il fatto del turgore cellulare acquista maggior rilievo in confronto con quanto ho riscontrato in *Triton* e in *Hyla*.

In *Triton cristatus* mi sono trovata dinanzi ad una notevolissima difficoltà costituita dal forte potere rigenerativo dell'arto, per cui molto materiale è andato perduto. Ho esaminato esemplari nei quali invece la rigenerazione non si era verificata, oppure esemplari nei quali l'avevo impedita mediante röntgenirradiazione limitata alla regione dell'arto (mentre il midollo spinale, mediante opportuna schermatura, ne rimaneva protetto). Gli esemplari esaminati furono sacrificati da uno a tre mesi dall'asportazione di un arto posteriore. L'esame microscopico della regione lombo-sacrale del midollo spinale non pone in evidenza nette differenze tra i due lati. In particolare, sul lato dell'asportazione le grosse cellule motorie non hanno presentato quel rigonfiamento che si è invece osservato in *Rana esculenta*, e neppure una netta diminuzione del loro volume; al pari che in *Rana esculenta*, non ho riscontrato fatti di necrosi cellulare. In qualche caso ho eseguito, nei tritoni operati, iniezioni di tiroxina per elevare il metabolismo; anche in questi non ho osservato chiare modificazioni per quanto riguarda le cellule motorie del lato dell'asportazione. In questa differente reazione è la principale differenza tra *Triton* e *Rana esculenta*.

Per quanto riguarda, infine, i casi di *Hyla arborea*, ricordo che anche questi furono sacrificati da uno a tre mesi dopo l'asportazione di un arto posteriore. L'esame microscopico del midollo spinale ha posto in evidenza che le grosse cellule motorie sul lato operato non presentano chiare e costanti variazioni rispetto al lato normale; esse non subiscono né un netto rigonfiamento né una netta diminuzione. Questa specie, adunque, mostra da tale punto di vista un comportamento simile a quello notato in *Triton*.

*Considerazioni.* Queste ricerche vanno approfondite ed estese in altre specie, particolarmente in *Bufo vulgaris* ove, in questo Istituto, più si è svolta la sperimentazione in stadi embrionali e larvali. Per ora ho sperimentato nelle specie menzionate, perché in queste la tecnica della decalcificazione (ho fissato la parte interessata di midollo spinale insieme con il corrispondente tratto di colonna vertebrale) offre minori difficoltà.

Mi pare che i risultati raggiunti già presentino un certo interesse. Come ho detto nella parte precedente del lavoro, nel midollo spinale degli esemplari esaminati, non ho mai notata un'atrofia cellulare. È ben nota la legge del Levi (1906-1908)<sup>(2)</sup> secondo la quale nel neurone esiste una correlazione tra il volume del pirenoforo e l'estensione del suo neurite; un aspetto di questa

(2) Vedi G. LEVI in *Accrescimento e senescenza*. «La Nuova Italia», Firenze 1946; e in «*Rivista di Biologia*», vol. 41, p. 5 (1949).

legge è la riduzione di grandezza del pirenoforo dopo l'asportazione dell'organo periferico corrispondente. Levi-Montalcini e Levi (1943) osservano che i neuroni sensitivi si atrofizzano in via secondaria quando non contraggono sinapsi con gli organi periferici. Per l'interpretazione dei miei risultati (assenza di atrofia cellulare) si deve tenere conto dei limiti di tempo trascorsi dall'operazione; limiti che occorre protrarre di molto, perché tutto lascia prevedere che in queste forme l'instaurarsi di un'atrofia nelle cellule del midollo spinale richieda molto tempo. Ricordando che il Beaudoin (1954) ha osservato che usando la tiroxina si accelera il processo di distruzione delle cellule nervose sul lato dell'asportazione di un arto (esperienze su larve di Anuri), ho praticato anch'io, come ho detto sopra, iniezioni di tiroxina in esemplari di *Triton cristatus* operati di asportazione di un arto: per ora non ho avuto risultati positivi.

Si tenga presente che negli Anfibi adulti l'asportazione di un arto può agire solo provocando o meno un'atrofia delle cellule nervose interessate. Differentemente (vedi i lavori citati nella nota <sup>(1)</sup>) vanno i processi in embrioni di pollo ove la riduzione dell'estensione della periferia provoca nei gangli spinali un'atrofia e successiva scomparsa di neuroni già differenziati (Levi-Montalcini e Levi, 1942; Hamburger e Levi-Montalcini, 1949) e controlla nella parte motoria del midollo spinale (Hamburger e Keefe, 1944) il differenziamento dei neuroblasti potenziali in neuroni motori. Per gli Anuri, il May ha osservata una ipoplasia della parte motoria del midollo spinale, mentre il Perri ritiene probabile che le deficienze riscontrate nell'asportazione di un arto, non siano causate da variazioni dell'attività proliferativa. Per gli Urodeli ho già riferito che la periferia non ha importanza per la proliferazione (Detwiler).

Il fatto più interessante che le mie ricerche hanno posto in evidenza è dato dalla differente reazione che le grosse cellule motorie hanno presentato. Ho detto infatti che in *Rana esculenta* si verifica, almeno nei primi mesi dall'amputazione, un loro rigonfiamento che non si ha invece né in *Triton* né in *Hyla*. È da ricordare che nei Mammiferi adulti vari Autori hanno osservato che in seguito al taglio di nervi si ha, in un primo tempo, un turgore nelle cellule motorie del midollo spinale e nelle cellule dei gangli corrispondenti. Una reazione di questo genere l'ho riscontrata in *Rana esculenta* ma non in *Triton* né in *Hyla*. Si pone adunque in evidenza negli Anfibi una differente reazione a seconda della specie nella quale si esperimenta, mostrando che in alcune si verifica un comportamento che, per certi aspetti, ricorda quello delle forme superiori.

CONCLUSIONI. - Dall'esposizione dei risultati di queste esperienze preliminari di asportazione di un arto in esemplari adulti di Anfibi, risultano adunque, nei primi mesi dall'amputazione, differenze nella reazione del midollo spinale a seconda delle forme usate. In *Rana esculenta* si ha infatti, sul lato operato, un turgore delle cellule motorie che dura almeno alcuni mesi, mentre ciò non si è verificato né in *Triton* né in *Hyla*.

**Zoologia.** — *Falso gonocorismo in «Coris julis» (L.)* (\*). Nota (\*\*) di GUIDO BACCI e ALBERTO RAZZAUTI, presentata dal Socio GIULIO COTRONEI.

Alcuni animali presentano durante la maggior parte della loro esistenza gonadi totalmente maschili o femminili — e sembrano pertanto gonocorici — sebbene ad un certo stadio perdano gli elementi germinali di un sesso per sostituirli completamente con quelli dell'altro.

Gli animali che subiscono normalmente questo processo di inversione sono pertanto dei falsi gonocoristi <sup>(1)</sup> e il loro tipo di sessualità può essere ravvicinato a quello degli ermafroditi successivi per cui sono stati indicati anche col nome di ermafroditi successivi a maturazione distinta <sup>(2)</sup> in base alla separazione delle due fasi sessuali. La coesistenza generalmente brevissima degli elementi maschili e femminili nella gonade e la netta successione temporale del differenziamento li fa inoltre rientrare nell'ambito degli intersessuati nel senso di D'Ancona <sup>(3)</sup>.

La scoperta di questo comportamento sessuale può aver luogo attraverso lo studio degli allevamenti — come nei casi delle ostriche e di alcuni Ciprinodonti — oppure si può ottenere integrando indagini statistiche ed istologiche — come nel caso delle patelle <sup>(4)</sup>. Si tratta comunque di processi alla cui conoscenza si giunge attraverso indagini piuttosto laboriose oppure attraverso fortunate circostanze e perciò è lecito supporre che il falso gonocorismo, cioè un tipo speciale di ermafroditismo, sia ben più diffuso di quanto faccia apparire la attuale imperfetta conoscenza della maggior parte dei gruppi zoologici dal punto di vista della sessualità.

#### IL SUPPOSTO DIMORFISMO SESSUALE E LA SISTEMATICA DEI *Coris*.

*Coris julis* (L.) costituisce un nuovo esempio di questo tipo di sessualità nel gruppo dei Teleostei.

Si distinguono di solito due specie mediterranee del genere *Coris*: il *C. julis*, che si riferisce alla forma descritta da Linneo (*Labrus julis* L., 1766) e il *C. giofredi* che fu descritto dal Risso (1810) in base a caratteri distintivi che riferiremo in seguito. Nel 1868 lo Steindachner <sup>(5)</sup> sostenne che non

(\*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Biologia generale dell'Università di Sassari e nel Laboratorio di Biologia dell'Acquario Comunale di Livorno, con contributi del C.N.R.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1957.

(1) G. BACCI, «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», vol. 26, 110-137 (1955).

(2) G. BACCI, «Attual. Zool.», vol. 7, 57-151 (1951).

(3) U. D'ANCONA, «Experientia», vol. 5, 381-389 (1949).

(4) G. BACCI, «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», vol. 21, 181-192 (1947).

(5) F. STEINDACHNER, «Sitzber. k. Akad. Wissenschaften, Wien», vol. 57, 701 (1868).



si tratta di due specie distinte ma che *C. julis* è il maschio e *C. giofredi* la femmina di una stessa specie e tale opinione fu accettata da Günther <sup>(6)</sup> sebbene precedentemente <sup>(7)</sup> avesse ammesso la duplicità della specie. Anche Jordan <sup>(8)</sup> nella monografia dei Labridi considerò il *C. giofredi* come femmina del *C. julis*. Il Canestrini nella sua Fauna d'Italia <sup>(9)</sup> affermò poi di aver riscontrato forme di passaggio fra *C. giofredi* e *C. julis* pur mantenendo distinte le due specie. Nel 1891 il Moreau <sup>(10)</sup> sostenne la distinzione delle due specie in base al rinvenimento di maschi e di femmine nelle due forme e ciò fu confermato successivamente dal Lobianco <sup>(11)</sup>.

A titolo di curiosità ricordiamo che nella nomenclatura volgare *C. julis* e *C. giofredi* a Messina sono indicati rispettivamente come *vidiola masculina* e *vidiola fimminedda* <sup>(12)</sup>.

Attualmente quasi tutti gli AA. ammettono come valide le specie *C. giofredi* e *C. julis* ma Tortonese e Trotti <sup>(13)</sup> considerano *C. giofredi* sinonimo di *C. julis*. Vi è comunque un intimo rapporto fra il problema del dimorfismo sessuale e quello sistematico per cui il secondo non può essere risolto senza la soluzione del primo.

Abbiamo perciò affrontato la questione da un nuovo punto di vista, partendo cioè dalla presunzione della esistenza di un falso gonocorismo e di un elevato grado di variabilità sessuale. Osservazioni casuali fatte nelle vasche degli acquari di Livorno e di Napoli ci avevano del resto rivelato la comparsa di stadi di transizione fra individui in livrea di *giofredi* ed in livrea di *julis*.

#### OSSERVAZIONI MORFOLOGICHE E STATISTICHE SULLE LIVREE.

La presente ricerca è stata eseguita su materiale proveniente da Livorno e da P.to Torres.

Gli *julis* pescati nelle acque di Livorno hanno una lunghezza media di cm.  $16,1 \pm 0,2$  e sono caratterizzati dalla netta prominenza dei primi tre raggi della dorsale e dalla presenza di un dente ricurvo in avanti nella estremità prossimale di ciascuna mascella superiore. Presentano una colorazione molto vivace; il dorso è di un bleu verdastro intenso, una striscia dentellata e colorata di arancio cupo si estende dalla regione opercolare alla coda e sotto questa striscia si osserva una corta banda nera che comincia dal punto di

(6) A. GÜNTHER, « Study of Fishes », 530 (1880).

(7) A. GÜNTHER, « Cat. of Fishes », vol. 4, 195-197 (1862).

(8) D. S. JORDAN, « U.S. Rep. Comm. Fish and Fisheries », vol. 15, 399-699 (1887).

(9) G. CANESTRINI, « Fauna d'Italia, Pesci », 71-72 (s. d.).

(10) E. MOREAU, « Poissons de la France », vol. 4, 50-51 (1891).

(11) S. LOBIANCO, « Mitth. Zool. Stat. Neapel », vol. 19, 513 (1909).

(12) SPARTÀ, « Mem. Com. Talass. Ital. », n. 203, 1-15 (1938).

(13) E. TORTONESE, L. TROTTI, « Atti Acc. Ligure Sc. e Lett. », vol. 6, 94-95 (1949).

attacco delle pettorali e si interrompe in un punto situato costantemente al disotto dell'11° raggio della dorsale. Inoltre si osservano macchie di un nero indaco e di un rosso intenso fra i primi tre raggi della dorsale.

Gli *julis* pescati nelle acque di P.to Torres ( $\bar{m} = \text{cm. } 14,2 \pm 0,1$ ) ed anche sulle coste orientali della Corsica si distinguono per un maggiore sviluppo della fascia aranciata la quale è generalmente più alta di quella degli esemplari di Livorno e si estende fino all'apice del muso. La banda nera è invece assai più breve, più sottile e sfumata in avanti.

I *giofredi* di Livorno nel loro aspetto tipico hanno una lunghezza media di  $\text{cm. } 9,4 \pm 0,1$ , presentano i raggi della dorsale di altezza uniforme e sono privi del dente alla mascella superiore; il loro dorso è di un bruno castagno ed esiste una larga fascia dorata su ciascun lato della regione ventrale. Mancano la fascia aranciata e le macchie nera e rossa fra i primi raggi della dorsale.

I *giofredi* di P.to Torres ( $\bar{m} = \text{cm. } 12,5 \pm 0,2$ ) hanno il dorso di colore rossastro invece che marrone ma per il resto posseggono tutti i caratteri distintivi dei *giofredi* delle popolazioni di Livorno.

Sia a Livorno che a P.to Torres si trovano individui che presentano una livrea di transizione e che hanno lunghezze medie ( $\text{cm. } 12,9 \pm 0,1$  quelli di Livorno,  $\text{cm. } 13,2 \pm 0,1$  quelli di P.to Torres) che stanno fra quelle dei *giofredi* e quelle degli *julis*.

Una analisi accurata delle livree alle diverse lunghezze ha rivelato poi che il passaggio da *giofredi* a *julis* è contrassegnato dalla comparsa di caratteri nella successione seguente: I) fascia marrone rossiccia con margini dentellati nella posizione che sarà successivamente occupata dalla fascia aranciata; II) lieve affumicatura fra i primi raggi della dorsale; III) lieve allungamento dei primi tre raggi dorsali e comparsa delle macchie nere e rosse non molto accentuate; IV) sviluppo delle bande aranciata e nera e completo sviluppo dei raggi dorsali e delle relative macchie; V) comparsa dei denti alle estremità prossimali della mascella superiore; VI) scomparsa delle fasce aranciate ventrali.

Le osservazioni sono state eseguite su 518 individui di Livorno e su 238 di P.to Torres pescati i primi durante tutto il ciclo annuale fra il mese di agosto 1956 e il luglio 1957, fra il settembre 1956 e l'agosto 1957 i secondi. Sono stati inclusi nelle forme di transizione gli individui con almeno due e non più di tre caratteri di *julis* abbastanza pronunciati e determinati attraverso criteri che discuteremo in altra sede.

Le tabelle annesse mostrano che a Livorno si è pescata una maggiore percentuale di *giofredi* che a P.to Torres e ciò è dovuto al modo di pesca dei campioni delle due località: a Livorno si è infatti pescato generalmente con una bilancina a maglia fitta, mentre a P.to Torres sono stati utilizzati esemplari pescati con reti a strascico (sciabica o paranza) che hanno maglie più larghe e che quindi non trattengono gli individui di dimensioni minori. Ciò spiega anche le differenze fra le medie degli esemplari in livrea di *giofredi* di Livorno e di P.to Torres.

TABELLA I.

*Frequenze degli individui in livrea di «giofredi», di transizione e di «julis», a diverse lunghezze.*

Popolazioni di Livorno dall'agosto 1956 al settembre 1957.

Lunghezza in cm.	Livree			Totale
	<i>giofredi</i>	transizione	<i>julis</i>	
5-6	3	—	—	3
6-7	22	—	—	22
7-8	64	—	—	64
8-9	98	—	—	98
9-10	85	—	—	85
10-11	65	—	—	65
11-12	50	1	2	53
12-13	23	12	5	40
13-14	4	5	13	22
14-15	2	1	7	10
15-16	—	1	8	9
16-17	—	—	11	11
17-18	—	—	20	20
18-19	—	—	13	13
19-20	—	—	3	3
Totale . . . . .	416	20	82	518
$\bar{m} = 9,4$ $\bar{m} = 12,9$ $\bar{m} = 16,1$ $\sigma = 1,7$ $\sigma = 0,9$ $\sigma = 2,1$ $\sigma_{\bar{m}} = 0,1$ $\sigma_{\bar{m}} = 0,2$ $\sigma_{\bar{m}} = 0,2$				

TABELLA II.

Popolazioni di P.to Torres dal settembre 1956 all'ottobre 1957.

Lunghezza in cm.	Livree			Totale
	<i>giofredi</i>	transizione	<i>julis</i>	
9-10	1	—	—	1
10-11	3	—	—	3
11-12	13	3	4	20
12-13	6	2	33	41
13-14	10	2	59	71
14-15	6	1	48	55
15-16	—	2	25	27
16-17	—	—	10	10
17-18	—	—	6	6
18-19	—	—	3	3
19-20	—	—	—	—
20-21	—	—	—	—
21-22	—	—	—	—
22-23	—	—	1	1
Totale . . . . .	39	10	189	238
$\bar{m} = 12,5$ $\bar{m} = 13,2$ $\bar{m} = 14,214$ $\sigma = 1,32$ $\sigma = 1,53$ $\sigma_{\bar{m}} = 0,2$ $\sigma_{\bar{m}} = 0,113$				

TABELLA III.

*Frequenze degli individui in fase femminile e maschile a diverse lunghezze.*

Popolazioni di Livorno.

Lunghezza in cm.	Fasi sessuali		Totale	% maschi
	femminile	maschile		
5-6	1	—	1	—
6-7	6	1	7	14
7-8	11	—	11	—
8-9	23	3	26	11
9-10	21	4	25	16
10-11	31	5	36	13
11-12	23	7	30	23
12-13	18	16	34	47
13-14	2	11	13	84
14-15	2	8	10	80
15-16	1	1	2	50
16-17	—	9	9	100
17-18	—	11	11	100
18-19	—	10	10	100
Totale . . . . .	139	86	225	

$\bar{m} = 10,1$	$\bar{m} = 14,1$
$\sigma = 1,9$	$\sigma = 3$
$\sigma_{\bar{m}} = \pm 0,2$	$\sigma_{\bar{m}} = \pm 0,3$

TABELLA IV.

Popolazioni di P.to Torres.

Lunghezza in cm.	Fasi sessuali		Totale	% maschi
	femminile	maschile		
9-10	1	—	1	—
10-11	4	—	4	—
11-12	8	6	14	42
12-13	2	21	23	91
13-14	12	26	38	68
14-15	5	25	30	83
15-16	1	19	20	95
16-17	—	6	6	100
17-18	—	5	5	100
18-19	—	2	2	100
Totale . . . . .	33	110	143	

$\bar{m} = 12,681$	$\bar{m} = 14,274$
$\sigma = 1,489$	$\sigma = 1,76$
$\sigma_{\bar{m}} = \pm 0,257$	$\sigma_{\bar{m}} = \pm 0,167$



I dati precedenti provano dunque l'esistenza di tre tipi di livree: di *giofredi*, di transizione e di *julis* in un'unica specie, che per la legge di priorità si deve chiamare *Coris julis* (L.).

Saranno prossimamente pubblicati dati su esemplari di *Coris* mantenuti da più di un anno in acquario a Livorno.

La probabile esistenza di due sottospecie di *Coris* - che sarà da noi investigata in altra sede - non infirma la omogeneità dei dati nella successione delle livree.

#### LA STATISTICA E LA CITOLOGIA DELLA INVERSIONE SESSUALE.

La massima parte dei dati utilizzati per questa ricerca è stata raccolta nei mesi di riposo sessuale durante i quali i fenomeni di inversione appaiono generalmente più frequenti<sup>(4)</sup>. Perciò le fasi sessuali sono state determinate per ciascun individuo attraverso lo studio istologico delle gonadi ed è stato determinato il sesso di soli 225 individui di Livorno e di 143 di P.to Torres. Sei individui trovati in fase di inversione sono stati classificati fra quelli in fase maschile dato che gli elementi germinali erano già in attiva spermatogenesi. Le tabelle annesse ci forniscono i dati relativi alle fasi sessuali nelle diverse lunghezze.

Le differenze fra le medie degli individui in fase maschile e femminile non è così netta come quella fra le medie degli individui in livrea di *giofredi* e di *julis* perché l'esame delle gonadi è stato fatto principalmente in individui di lunghezze medie nella ragionevole presunzione che fra di essi si dovessero trovare gli esemplari in fase di inversione. Appare invece molto significativo l'aumento delle percentuali dei maschi con l'aumentare della lunghezza, cioè dell'età: assenti o quasi nelle classi minori di lunghezza, finiscono con il soppiantare del tutto le femmine nelle classi maggiori. L'esistenza di un individuo in fase maschile nella classe di 6-7 cm. e di femmine nella classe di 15-16 cm. fa comunque pensare alla possibile esistenza di maschi e femmine puri<sup>(10)</sup> in una popolazione ermafrodita a forte variabilità sessuale.

Abbiamo in corso una ricerca per determinare, attraverso lo studio degli otoliti, l'età dei *Coris* nelle diverse classi di grandezza.

I dati più significativi si hanno infine quando si considerano le fasi sessuali alle diverse lunghezze nell'ambito degli individui in livrea di *giofredi*, di transizione e di *julis*. Dato che le informazioni sulle popolazioni di Livorno e su quelle di P.to Torres si completano a vicenda e sono sommabili dal punto di vista delle variazioni di livrea e sessuali abbiamo ritenuto opportuno riunire i dati relativi nella tabella V.

L'analisi di questa tabella ci fa constatare che fra gli individui in livrea di *giofredi* esiste un 15,4 % di maschi concentrati soprattutto nelle classi maggiori, che in livrea di transizione ne esiste già il 64 %, e che fra gli *julis* si ha il 97,4 % di maschi con poco più del 2 % di femmine raggruppate nelle classi minori di lunghezza. Le inversioni sessuali debbono quindi aver luogo soprattutto fra i grossi *giofredi*, gli individui di transizione e gli *julis* più piccoli.

TABELLA V.

*Frequenze degli individui in fase femminile e maschile delle diverse livree a diverse lunghezze.*

Popolazioni di Livorno e P.to Torres.

Lunghezza in cm.	<i>giofredi</i>		transizione		<i>julis</i>		Totale generale
	femm.	masch.	femm.	masch.	femm.	masch.	
5-6	1	—	—	—	—	—	1
6-7	6	1	—	—	—	—	7
7-8	12	—	—	—	—	—	12
8-9	23	3	—	—	—	—	26
9-10	23	4	—	—	—	—	27
10-11	34	5	—	—	—	—	39
11-12	31	6	—	4	—	3	44
12-13	15	7	4	8	1	20	55
13-14	9	2	2	3	3	34	53
14-15	5	1	1	—	—	33	40
15-16	—	—	2	1	—	18	21
16-17	—	—	—	—	—	10	10
17-18	—	—	—	—	—	16	16
18-19	—	—	—	—	—	13	13
19-20	—	—	—	—	—	3	3
20-21	—	—	—	—	—	—	—
21-22	—	—	—	—	—	—	—
22-23	—	—	—	—	—	1	1
Totale . . .	159	29	9	16	4	151	368
$\bar{m} = 10,33$ $\bar{m} = 11,05$ $\bar{m} = 13,61$ $\bar{m} = 12,62$ $\bar{m} = 13,25$ $\bar{m} = 15,01$							

È quanto ci confermano i reperti citologici: fra i campioni che presentano ovociti più o meno degenerati accanto a cellule in attiva spermatogenesi vi sono tre grossi *giofredi*, un individuo in livrea di transizione e due *julis* uno dei quali è piccolo (119 mm.) e l'altro invece piuttosto sviluppato (mm. 149).

La figura riportata in questa nota (fig. 1) si riferisce ad un esemplare di P.to Torres in livrea di *giofredi* e della lunghezza di 119 mm. In alto si osservano due zone della gonade già ripiene di spermatogoni in attivo accrescimento e in basso si vedono taluni piccoli ovociti (diam.  $10\ \mu$ ), mentre

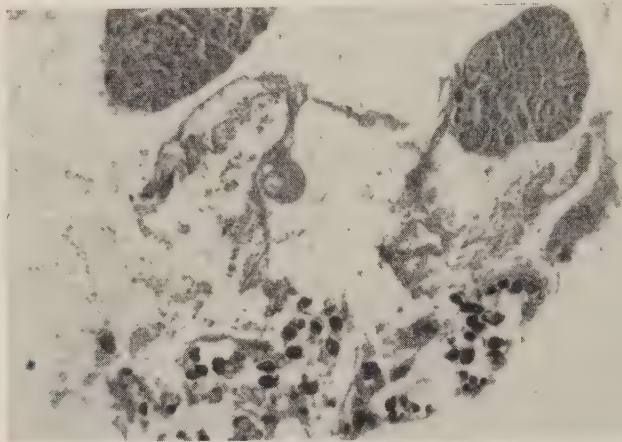


Fig. 1.

al centro della figura è rimasto un grosso ovocita (diam.  $40\ \mu$ ) la cui degenerazione darà origine a un corpo giallastro che si ritrova anche in talune gonadi maschili di recente formazione.

L'esame citologico di altri stadi di inversione - che verrà approfondito in altro lavoro - permette di stabilire che l'inversione ha luogo in gonadi quasi totalmente svuotate degli ovociti, dove la spermatogenesi prende inizio a partire da protogoni restati in sito oppure migrati di recente. Gli elementi maschili riempiono rapidamente tutto il territorio della gonade e gli ovociti residui vengono espulsi oppure vengono fagocitati dopo essere stati circondati dagli spermatogoni.

La grande rarità degli stadi di inversione rispetto alle fasi completamente maschili e femminili (6 su 369) dimostra poi che la coesistenza di elementi sessuali maschili e femminili si verifica durante un periodo estremamente breve in confronto all'intera durata della vita di un *Coris* e che ci troviamo di fronte ad un caso tipico di falso gonocorismo con proteroginia.

#### CONCLUSIONI E NUOVI PROBLEMI.

I risultati principali raggiunti in questa prima serie di indagini sono dunque i seguenti:

1° *C. julis* e *C. giofredi* appartengono ad un'unica specie che deve chiamarsi *C. julis* (L.) e che presenta due diverse livree;

2° *C. julis* è una specie ermafrodita proteroginica con brevissima fase di inversione e lunghe fasi puramente femminili e maschili per cui rientra nella categoria dei falsi gonocoristi;

3° La completa sostituzione degli elementi femminili con elementi maschili in tutto il territorio della gonade fa escludere definitivamente la presunta distinzione di una porzione midollare e corticale della gonade;

4° La esistenza di maschi in livrea di *giofredi* e soprattutto quella di femmine in livrea di *julis* fanno concludere che le due livree sono indipendenti dalle fasi sessuali attraversate dai singoli individui.

Ulteriori ricerche dovranno investire i seguenti nuovi argomenti:

a) Le età nelle quali hanno luogo il cambiamento di livrea e di sesso;

b) L'estensione della variabilità sessuale in *Coris*;

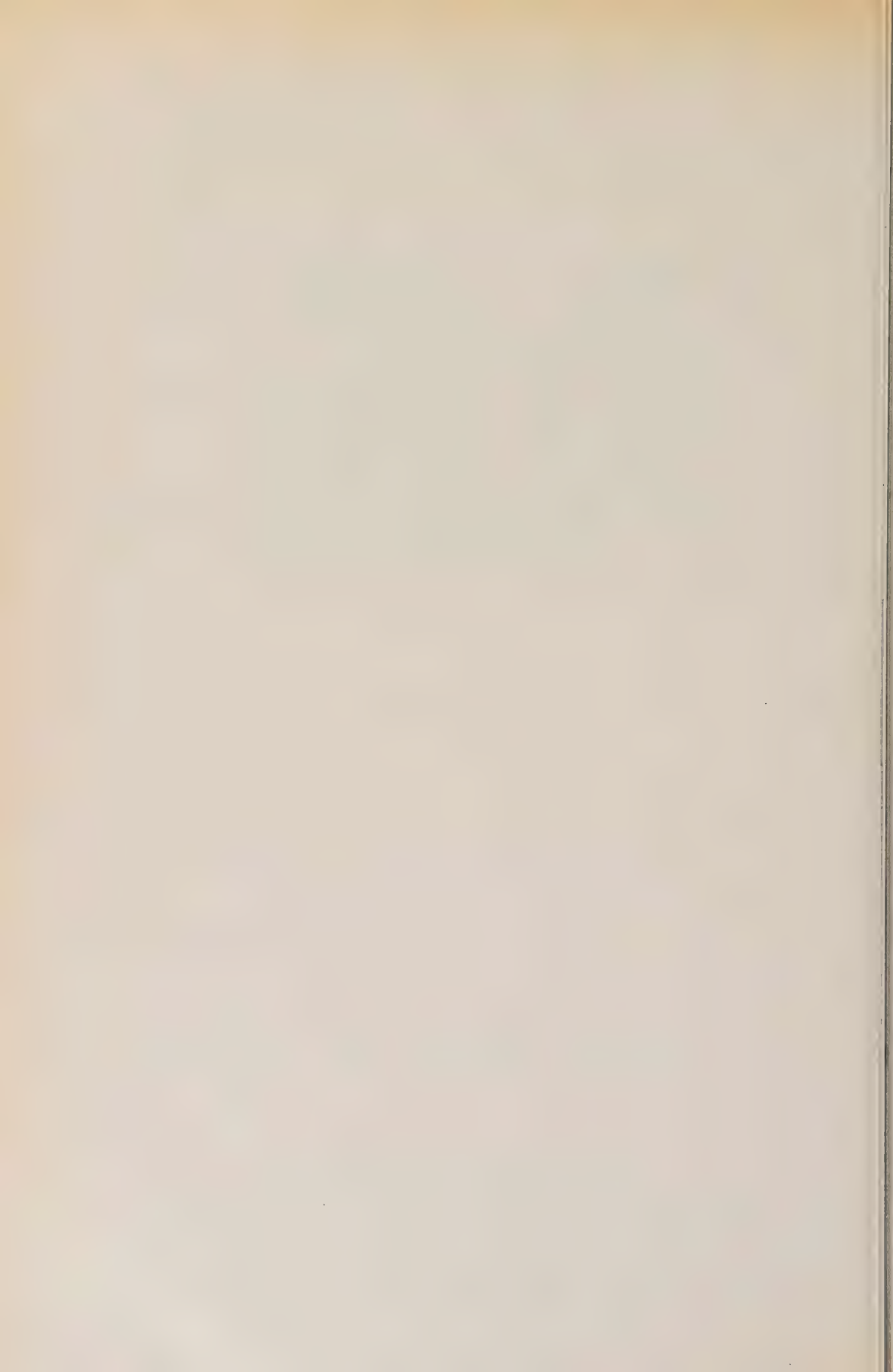
c) Il valore sistematico delle differenze fra popolazioni sarde e livornesi di *Coris*;

d) Il dimorfismo sessuale della famiglia dei Labridi, il quale potrebbe essere invece l'indizio di un falso gonocorismo anche negli altri generi del gruppo;

e) Il determinismo delle livree dei *Coris*.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 9 novembre 1957*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Chimica.** — *Spettro ultrarosso di assorbimento del ruteniocianuro di potassio allo stato cristallino ed in soluzione acquosa*<sup>(\*)</sup>. Nota di G. B. BONINO e GIANFRANCO FABBRI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. B. BONINO.

Le analogie chimiche tra il ferro ed il rutenio prevedibili in base alle reciproche positure di questi due elementi nella Tabella periodica, si manifestano, come è noto, con tutta una serie di analogie nei caratteri chimici e fisici dei relativi composti. Così, per esempio, il ruteniocianuro di potassio  $K_4Ru(CN)_6 \cdot 3H_2O$  mostra strette analogie con il ferrocianuro di potassio.

Anche dal punto di vista cristallografico queste analogie sono strettissime. Ricordiamo frattanto che il ruteniocianuro di potassio cristallizza, come il ferrocianuro, con tre molecole di acqua. Le ricerche di Pospelov e Zdanov [1] [2] mostrano che ambedue questi complessi (ferrocianuro di potassio e ruteniocianuro di potassio con tre molecole d'acqua di cristallizzazione) danno cristalli monoclinali la cui cella elementare contiene quattro molecole di complesso ed è, per ambedue i composti, riferibile al gruppo spaziale  $C_{2h}^6$ .

In precedenti lavori [3, 4, 5, 6, 7] di questo Centro Studi si è studiato lo spettro ultrarosso di assorbimento del ferrocianuro di potassio allo stato cristallino ed in soluzione acquosa mettendo in particolare evidenza l'azione perturbatrice del campo cristallino sulle oscillazioni molecolari di valenza CN

(\*) La vora eseguito presso il Centro Studi di Chimica fisica ed idrologica del C.N.R. nell'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

della molecola del complesso. A questa (considerata come isolata) competerebbe una simmetria ottaedrica (gruppo  $O_h$ ), assai più alta quindi che quella del cristallo.

Una indagine basata su considerazioni di simmetria, porta, nel caso del ferrocianuro cristallino, alla conclusione che nello spettro ultrarosso del detto complesso si dovrebbero rilevare 6 bande di valenza CN molto intense e cioè 4 di tipo  $A_u$  e 2 di tipo  $B_u$  del gruppo di simmetria  $C_{2h}$  dovute ad oscillazioni attive provenienti dalla perturbazione del campo cristallino sulle oscillazioni ottaedriche del complesso.

Si rileva anche la possibilità di altre 6 bande attive in ultrarosso ma più deboli e dovute all'accoppiamento antisimmetrico (secondo  $C_{2h}$ ) di oscillazioni di per sé inattive delle singole molecole del complesso nella cella cristallina elementare.

Nel caso del ferrocianuro di potassio le 6 bande intense del CN tra 2026 e 2073  $\text{cm}^{-1}$  sono nettamente identificabili. Appaiono nella stessa zona, nelle condizioni sperimentali da noi verificate, altre tre bande deboli interpretabili anche come sopra accennato. Ma queste bande poco intense, e che appaiono nella zona delle oscillazioni di valenza del CN, richiedono a nostro avviso ulteriori ricerche sperimentali per essere nettamente identificate e definitivamente interpretate.

Era utile, anche sotto questo punto di vista, esaminare lo spettro di assorbimento del ruteniocianuro di potassio, onde trarre dalle analogie dei due spettri nuovi elementi per la discussione.

*Caratteristiche chimiche del composto studiato.* - Il composto, preparato per la prima volta da Claus [8] per fusione del rutenio (IV) nitrosopentacloruro d'ammonio con KCN, ed in seguito da Joly [9] per reazione del KCN sul rutenato potassico in soluzione, cristallizza in tavolette trasparenti e incolori con tre molecole d'acqua di cristallizzazione.

Già Claus nel lavoro citato aveva notato l'isomorfismo del composto in esame con il ferrocianuro di potassio; questa osservazione fu poi confermata in anni successivi da Dufet [10] che, con misure goniometriche ( $\alpha : b : c = 0,3936 : 1 : 0,3948$  ;  $\beta = 90^\circ, 6'$ ) mise in luce la monoclinicità del cristallo.

Misure roentgenografiche recenti di Pospelov e Zdanov [1] [2] hanno confermato con certezza i dati di Dufet.

Misure termoponderali eseguite in questo Istituto permettono di confermare che il composto contiene tre molecole d'acqua di cristallizzazione.

Per quanto riguarda le caratteristiche spettroscopiche, rileviamo che lo spettro ultrarosso dettagliato del ruteniocianuro di potassio non era noto mentre era noto lo spettro Raman eseguito da Samuel e Khan [11] e discusso da Bose [12].

Il composto preparato allo stato grezzo venne purificato sciogliendo lo stesso in acqua e precipitandolo lentamente con alcool. L'operazione è

stata eseguita più volte, fintanto che non si sono ottenuti, per cristallizzazione da una soluzione acquosa, dopo eliminazione di ogni traccia di alcool, bei cristalli di caratteristiche esattamente corrispondenti a quelle descritte dalla letteratura.

*Preparazione dei campioni e apparecchiature spettroscopiche.* — Gli spettri sono stati ottenuti su campioni allo stato solido sotto forma di polveri impastate in olio di vasellina o perclorobutadiene. Non è stato possibile operare su polvere « secca » data la igroscopicità del composto quando si trovi suddiviso in cristalli di dimensioni dell'ordine del micron.

Gli spettri, nella zona fra 2,5 e 15  $\mu$  sono stati ottenuti con uno spettrofotometro Perkin Elmer 21 equipaggiato con ottica in salgemma <sup>(1)</sup>. La zona compresa fra 2,5 e 5,5  $\mu$  è stata ripetuta, al fine di ottenere la maggiore risoluzione possibile, con uno spettrofotometro Beckman IR2 con ottica in fluoruro di litio; la zona spettrale compresa fra 15 e 25  $\mu$  è stata esplorata con uno spettrofotometro Beckman IR2 munito di ottica in bromuro di potassio.

Accoppiato agli spettrofotometri Beckman IR2 è stato usato un registratore Speedomax della Leeds e Northrup e le condizioni di lavoro erano tali da fornire la massima risoluzione permessa dalle apparecchiature.

Gli spettri ultrarossi di assorbimento del ruteniocianuro di potassio sia anidro che idrato sono mostrati dalla Tabella I e dalla fig. 1. Lo spettro del sale anidro si differenzia per il fatto di non mostrare gli assorbimenti a circa 3 e 6,2  $\mu$  corrispondenti alle oscillazioni delle molecole di acqua.

Dalla figura 1 può osservarsi che il composto idrato mostra nella zona dei 2,8–3  $\mu$  un assorbimento costituito da 5 componenti relative ad oscillazioni di valenza delle molecole di acqua.

Il confronto con lo spettro in tale zona del ferrocianuro di potassio idratato (fig. 1) mostra la perfetta analogia dei due spettri. Lievi differenze nella posizione degli assorbimenti misurati possono anche derivare dalla notevole larghezza e asimmetria delle bande in questa zona.

Perfetta analogia fra ruteniocianuro di potassio e ferrocianuro di potassio idratati si riscontra pure nell'assorbimento a 6–6,2  $\mu$  attribuibile alle oscillazioni di deformazione delle molecole d'acqua.

*Oscillazioni di valenza  $C \equiv N$ .* — Come può osservarsi nella figura 2 il ruteniocianuro di potassio presenta, come il ferrocianuro, un sistema di sei bande intense costituite da tre doppietti, molto ben risolti nello spettro del composto anidro e meno nettamente nel composto idratato.

Una settima banda assai debole appare nella zona delle oscillazioni  $C \equiv N$  del ruteniocianuro di potassio mentre nello spettro del ferrocianuro

(1) Ringraziamo il prof. C. Ferrari, Direttore dell'Istituto di Chimica Agraria della Università di Bologna, per averci concesso l'uso di questo apparecchio in dotazione al Suo Istituto.



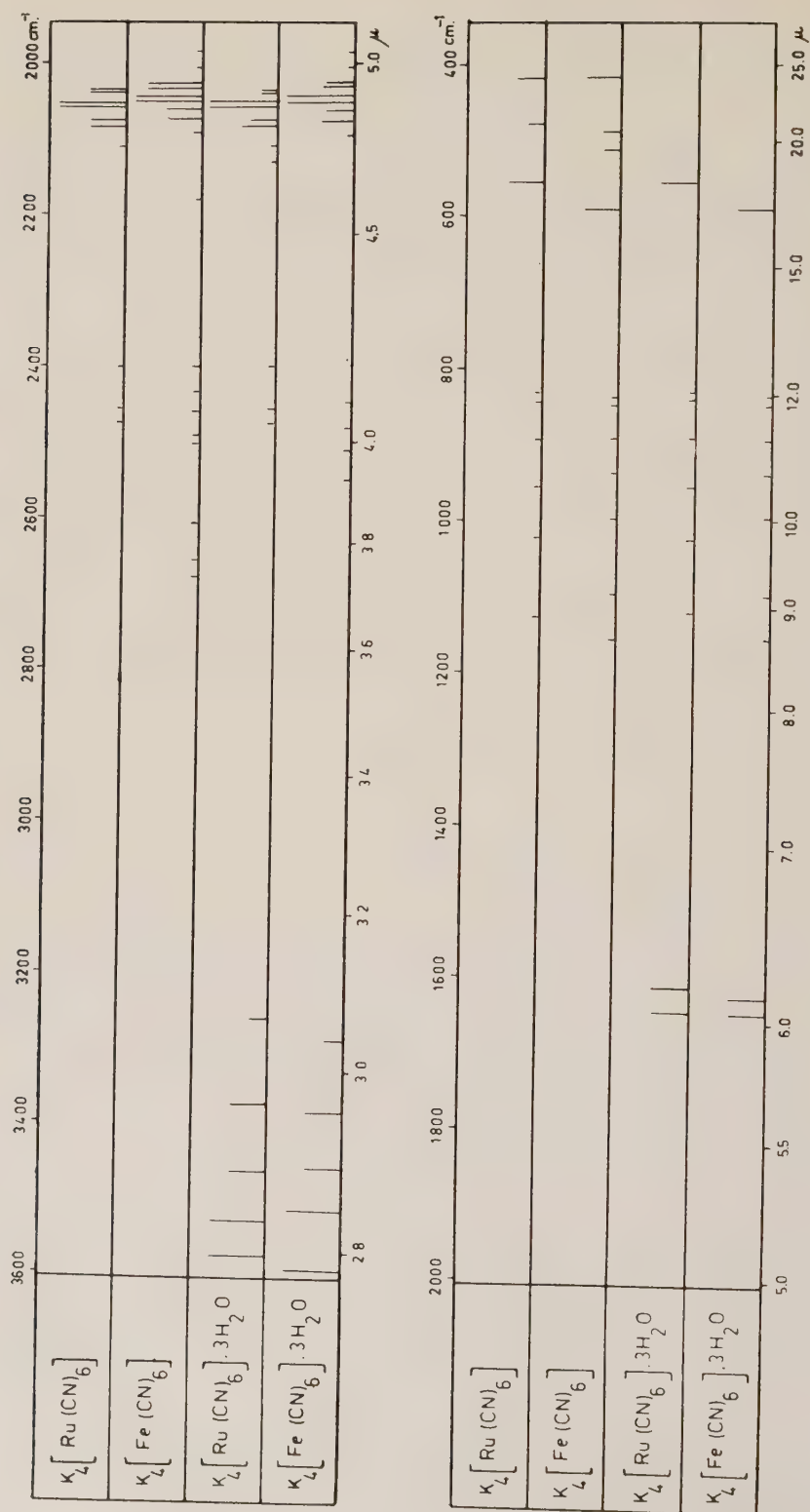


Fig. 1.

avevamo riscontrato almeno tre bande deboli in questa zona oltre, ben s'intende, le sei bande intense e caratteristiche. Ma lievi differenze fra gli spettri del sale di rutenio e quello di ferro in questa zona, riguardante alcuni debolissimi assorbimenti CN, possono essere messi in relazione anche con le grandi difficoltà che si riscontrano nella loro rilevazione.

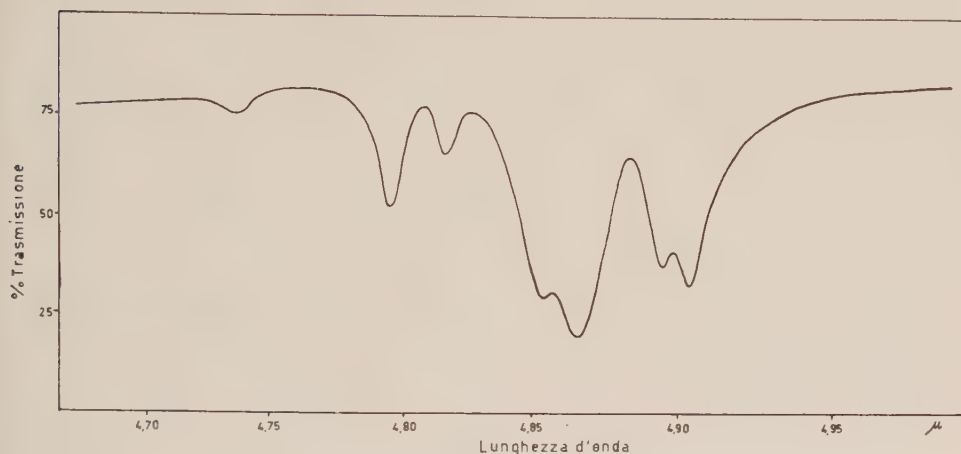


Fig. 2.

*Zona spettrale fra 15 e 25 μ.* — Sul sale anidro si osservano in questo intervallo di frequenze tre assorbimenti in posizione pressoché analoga a quelli riscontrati nel ferrocianuro di potassio anidro, a meno di una debole banda non osservata nel sale di rutenio, probabilmente perché troppo poco intensa.

Sul composto idratato si è rilevata in questa zona una sola banda, in parallelismo con quanto è avvenuto per il composto del ferro. È stato osservato un netto spostamento, di circa  $30\text{ cm}^{-1}$ , nella banda che il ferrocianuro di potassio presenta a  $587\text{ cm}^{-1}$ , tale da far pensare di attribuire l'assorbimento alla oscillazione di un legame molto sensibile al cambiamento dello ione centrale.

Vorremmo qui fermare ancora la nostra attenzione sulle due bande a circa  $600\text{ cm}^{-1}$  ed a circa  $400\text{ cm}^{-1}$  che compaiono molto nettamente negli spettri dei complessi studiati allo stato anidro rispettivamente a  $587$  e a  $416\text{ cm}^{-1}$  in quello del ferrocianuro di potassio ed a  $552$  e  $419\text{ cm}^{-1}$  in quello del ruteniocianuro di potassio.

La banda a circa  $400\text{ cm}^{-1}$ , in analogia a quanto hanno calcolato recentemente Hiromou, Murata e Kijoasu Kawai [13] per il caso dei cromocarbonili, dovrebbe considerarsi una oscillazione triplamente degenera di valenza e cioè una  $\nu(\text{Me}-\text{C})$  indicata da questi Autori con il simbolo  $\sigma_8(F_{1u})$  mentre essi classificherebbero la banda a circa  $600\text{ cm}^{-1}$  come dovuta ad una oscillazione di deformazione  $\delta(\text{Me}-\text{C}-\text{X})$  che indicano con  $\sigma_7(F_{1u})$ .

TABELLA I.

*Spettro ultrarosso del ruteniocianuro di potassio cristallino fra 2,5 e 25  $\mu$ .*

$K_4 Ru(CN)_6$			$K_4 Ru(CN)_6 \cdot 3H_2O$		
$\lambda$ ( $\mu$ )	$\nu$ ( $cm^{-1}$ )	I	$\lambda$ ( $\mu$ )	$\nu$ ( $cm^{-1}$ )	I
			2,797	3575	<i>f</i>
			2,836	3527	<i>f</i>
			2,886	3465	<i>m</i>
			2,962	3376	<i>m</i>
			(3,067)	(3261)	
4,041	2474	<i>dd</i>	4,040	2475	<i>dd</i>
4,072	2456	<i>dd</i>	4,072	2456	<i>dd</i>
4,167	2400	<i>dd</i>	4,165	2401	<i>dd</i>
4,739	2110	<i>d</i>	4,692	2131	<i>dd</i>
			4,740	2110	<i>dd</i>
4,799	2084	<i>f</i>	4,798	2084	<i>f</i>
4,820	2075	<i>f</i>	4,821	2075	<i>m</i>
4,858	2059	<i>ff</i>	4,853	2058	<i>ff</i>
4,870	2053	<i>ff</i>	4,875	2051	<i>ff</i>
4,902	2040	<i>f</i>	(4,896)	(2042)	
4,913	2034	<i>f</i>	4,909	2037	<i>f</i>
			6,08	1645	<i>m</i>
			6,20	1613	<i>m</i>
8,88	1126	<i>dd</i>	8,94	1119	<i>dd</i>
9,80	1020	<i>dd</i>	9,78	1022	<i>dd</i>
10,51	952	<i>dd</i>	10,51	952	<i>dd</i>
11,23	891	<i>dd</i>	11,21	892	<i>dd</i>
11,88	842	<i>dd</i>	11,89	841	<i>dd</i>
12,05	830	<i>dd</i>	12,04	830	<i>dd</i>
18,13	552	<i>f</i>	18,13	552	<i>f</i>
20,98	477	<i>d</i>			
23,86	419	<i>m</i>			

Soluzione satura: banda semplice simmetrica a  $4,874 \mu = 2051 \text{ cm}^{-1}$ .

In precedenti lavori (cfr. ad esempio [7]) seguendo la classificazione introdotta da Hankin, Mattraw, Sabol e Carpenter [14] avevamo indicato la  $\nu$  (Me — C) con il simbolo  $\nu_7(F_{1u})$  ovvero  $\nu_7(T_{1u})$ .

A parte queste differenze di simbolismo fra i diversi Autori resta però assodato che ambedue queste bande sono riferibili ad oscillazioni triplamente degeneri del complesso ottaedrico.

Rileviamo che mentre la banda a circa  $400\text{ cm}^{-1}$  [ $\nu$  (Me — C)] coincide quasi nella posizione per i due spettri del ferrocianuro e del ruteniocianuro, la banda a circa  $600\text{ cm}^{-1}$  [ $\delta$  (Me — C — X);  $F_{1u}$ ] seguendo la classificazione degli Autori giapponesi) è spostata nello spettro del ruteniocianuro di una trentina di numeri d'onda verso le minori frequenze rispetto alla analoga del ferrocianuro.

Si noti anche che mentre le frequenze di valenza triplamente degeneri ( $F_{1u}$ ) del complesso ottaedrico dovute alle oscillazioni CN sono risolte nello spettro del cristallo nelle componenti volute dalla simmetria cristallina, le oscillazioni  $\nu$  (Me — C) e  $\delta$  (Me — C — X) si osservano ancora non risolte come se permanesse anche nel cristallo la tripla degenerescenza. Potrebbe però supporre che la separazione nella risoluzione di queste bande nel cristallo fosse così piccola da non poter essere rilevata con i mezzi sperimentali usati ovvero che la larghezza delle bande e la parziale sovrapposizione delle stesse impedisca l'osservazione delle varie componenti.

Una analoga osservazione è stata da noi già fatta anche a proposito dello spettro del cobalticianuro di potassio allo stato cristallino [15].

Come può osservarsi in Tabella I si sono osservati un certo numero di deboli assorbimenti attribuibili ad armoniche e bande di combinazione.

La soluzione acquosa satura del sale ha mostrato nella zona dei CN un assorbimento semplice ed unico a  $4,874\text{ }\mu$  corrispondente a  $2051\text{ cm}^{-1}$  e interpretabile come dovuto alla oscillazione triplamente degenera  $\nu$  (C=N)[ $\nu_6(T_{1u})$ ] della simmetria ottaedrica analogamente a quanto già osservato nello spettro del ferrocianuro di potassio.

Ci riserviamo di riprendere la discussione di questi spettri specialmente per ciò che riguarda l'interpretazione dei gruppi di debolissime bande mostrate dal ruteniocianuro di potassio come dal ferrocianuro.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] POSPELOV V. A., ZDANOV G. S., « Z. Fiz. Khim. S.S.S.R. », 21, 405 (1947).
- [2] POSPELOV V. A., ZDANOV G. S., « Z. Fiz. Chim. S.S.S.R. », 21, 879 (1947).
- [3] BONINO G. B., FABBRI G., « Rend. Accad. Naz. Lincei », 19, 386 (1955).
- [4] BONINO G. B., FABBRI G., « Rend. Accad. Naz. Lincei », 20, 414 (1956).
- [5] BONINO G. B., « Rend. Accad. Naz. Lincei », 20, 419 (1956).
- [6] BONINO G. B., SALVETTI O., « Rend. Accad. Naz. Lincei », 20, 150 (1956).
- [7] BONINO G. B., SALVETTI O., « Ricerca scientifica », 26, 3627 (1956).
- [8] CLAUS, *Beitrag zur Chemie der Platinmetalle*, Fortsheift Universitat Kasan, Dorpat 1854, p. 97.



- [9] JOLY, « *Encycl. Chim.* », III, 17 (1) 247 (1900). Cfr. anche PASCAL, *Traité de Chimie minérale*, vol. XI, p. 438, Paris (1932).
- [10] DUFET, « *C. R.* », 120, 377 (1895).
- [11] SAMUEL, KHAN, « *Z. Phys.* », 84, 88 (1933).
- [12] BOSE, « *Indian J. Phys.* », 9, 277 (1934-35).
- [13] HIROMON, MURATA, KIJOJASU, KAWAI, « *J. Chem. Phys.* », 27, 605 (1957).
- [14] HAUKINS, MATTRAW, SABOL, CARPENTER, « *J. Chem. Phys.* », 23, 2422 (1955).
- [15] BONINO G. B., FABBRI G., « *Rend. Accad. Naz. Lincei* », 21, 488 (1956).

**Chimica.** — *Misure quantitative di assorbimento della 2-pirrolaldeide nello spettro ultrarosso* (\*). Nota di G. B. BONINO e P. MIRONE, presentata (\*\*) dal Socio G. B. BONINO.

Le discussioni sulla struttura molecolare della 2-pirrolaldeide tengono conto particolarmente di un fatto, e che cioè nella molecola del detto derivato pirrolico si trova un atomo di idrogeno « facilmente sostituibile con metalli alcalini » come hanno dimostrato già nel 1914 Angeli e Alessandri con la preparazione del sale sodico dell'aldeide stessa [1]. Tale atomo di idrogeno è assai più facilmente sostituibile da atomi metallici che non l'idrogeno iminico del pirrolo non sostituito.

Questo particolare comportamento del detto atomo di idrogeno nell'aldeide pirrolica è stato considerato come una prova della struttura ossimetilenica dell'aldeide stessa. Si è interpretato perciò il detto idrogeno come un idrogeno ossidrilico della forma ossimetilenica e non un idrogeno iminico di una forma normale carbonilica della 2-pirrolaldeide.

D'altra parte invece molti fatti, sia di carattere chimico che fisico, parlano a favore di una struttura carbonilica della 2-pirrolaldeide e lo stesso spettro ultrarosso di questo composto rivela una banda che è più plausibile attribuire ad un gruppo iminico che non a un gruppo ossidrilico.

L'ipotesi che nel sale sodico si stabilizzi una forma ossimetilenica del composto non è in accordo con il fatto che la struttura degli spettri ultrarossi dell'aldeide pirrolica ordinaria e del suo sale non mostrino [2] differenze così spiccate quali ci si dovrebbe attendere se il composto fosse riferibile ad una struttura carbonilica ed il suo sale fosse invece da riportarsi ad una struttura ossimetilenica. Così gli spettri ultrarossi della 2-pirrolaldeide non danno elementi per suffragare l'ipotesi che si verifichi per essa un equilibrio fra le due forme. Se tale equilibrio si verificasse dovrebbero apparire nello spettro ultrarosso chiari segni della duplicità delle forme in presenza.

La banda ultrarossa di assorbimento a  $3458\text{ cm}^{-1}$  riferibile all'idrogeno « mobile » della molecola della 2-pirrolaldeide (sciolta in  $\text{CCl}_4$ ), come già si

(\*) Lavoro eseguito al Centro Studi di Chimica Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

è riferito in un precedente lavoro [2] e come sarà chiarito meglio in lavori di prossima pubblicazione, ha piuttosto le caratteristiche di una banda dovuta alla oscillazione di valenza del gruppo  $N-H$  e non a quella di un ossidrilico, anche se si tien conto che l' $O-H$  di una forma ossimetilenica dell'aldeide pirrolica sarebbe legato ad un carbonio non saturo.

Per rimuovere le apparenti contraddizioni si potrebbe tentare di dare una interpretazione dello stato dell'aldeide pirrolica ricorrendo alla nota teoria della risonanza quantica tra varie forme (comprese anche forme polari) del composto. Riteniamo però che tale procedimento (del quale ad onor del vero si fa molto uso nella chimica organica attuale) non sia chiaro e del tutto inequivocabile finché non si possa sottoporre lo stesso ad un controllo matematico quantitativo, sufficientemente rigoroso e sicuro (come per esempio si può fare per il caso del benzolo).

Abbiamo perciò preferito continuare le nostre indagini sperimentali per rilevare altri dati di fatto prima di lasciarci tentare da interpretazioni di sapore quantomeccanico più o meno suggestive ma talvolta anche illusorie, quando mancano di un sufficiente supporto quantitativo.

Lo spettro ultrarosso di assorbimento permette una indagine sulle proprietà polari di un legame chimico (come per esempio quello del gruppo  $N-H$  dell'aldeide pirrolica supposta nella sua forma carbonilica) studiando l'intensità integrata della banda che corrisponde alla oscillazione di valenza del gruppo.

Abbiamo iniziato perciò una ricerca sistematica sulla intensità integrata riferibile alla banda a  $3458\text{ cm}^{-1}$  mostrata dall'aldeide pirrolica ordinaria in  $CCl_4$  e, presso a poco nella stessa posizione, da aldeidi pirroliche sostituite. Per queste ultime si riferirà in un prossimo lavoro.

Un esame più approfondito di questo aspetto dello spettro ultrarosso di assorbimento può raggiungersi mediante lo studio delle intensità delle bande riferibili non solo alla frequenza fondamentale di oscillazione ma anche alle armoniche superiori onde valutare il carattere di anarmonicità dell'oscillazione stessa, come hanno dimostrato appunto per l'oscillazione di valenza  $N-H$  Russel e Thompson in un recente lavoro [3]. Confidiamo di poter avere presto a disposizione i mezzi sperimentali per poter trattare il problema della aldeide pirrolica anche sotto questo punto di vista.

La determinazione della intensità integrata della banda a  $3458\text{ cm}^{-1}$  della 2-pirrolaldeide è stata compiuta con il metodo di Wilson e Wells modificato da Ramsay [4].

Le misure sono state eseguite su soluzioni di pirrolaldeide in tetracloruro di carbonio, perfettamente puro e secco, a cinque diverse concentrazioni comprese tra  $5,5 \times 10^{-5}$  e  $33 \times 10^{-5}$  moli/litro. La cella impiegata aveva uno spessore di 10 cm. e la larghezza spettrale della fenditura corrispondeva a  $6,2\text{ cm}^{-1}$  nella zona di  $3450\text{ cm}^{-1}$ .

Per ogni concentrazione sono state eseguite due registrazioni. La densità ottica ottenuta come media di queste due registrazioni è stata riportata in

funzione della frequenza e l'area compresa sotto la curva è stata misurata per mezzo della regola di Simpson su un intervallo di  $140 \text{ cm}^{-1}$  simmetrico rispetto al centro della banda.

All'area ottenuta si è aggiunto un termine correttivo per tener conto dell'area compresa sotto le ali della banda. Tale termine viene ricavato dalla Tabella V del citato lavoro di Ramsay e ammonta a circa il 9% dell'area misurata. Dall'area così corretta moltiplicata per il fattore  $2,303/cd$  si ottiene così il valore di:

$$B = \frac{1}{Cd} \int \ln \left( \frac{T_0}{T} \right) \cdot d\nu$$

(C: concentrazione in moli/litro;  $d$ : spessore dello strato assorbente;  $T/T_0$ : trasmissione apparente).

Questa grandezza portata in diagramma in funzione della concentrazione, viene estrapolata a concentrazione 0. Il risultato ottenuto rappresenta la vera intensità integrata  $A = \int \epsilon \cdot d\nu$  della banda. L'extrapolazione a concentrazione 0 ha in generale il compito di correggere l'errore dovuto alla larghezza finita della fenditura; nel nostro caso serve anche a eliminare l'errore dovuto alla piccola frazione di molecole di 2-pirrolaldeide, che probabilmente risultano ancora associate alle concentrazioni studiate. Da questa estrapolazione si è ottenuto:

$$A = 2,25 \cdot 10^4 \text{ litri/mole cm}^2.$$

Le altre grandezze caratteristiche della banda sono:

$$\nu = 3458 \pm 1 \text{ cm}^{-1} \quad ; \quad \Delta\nu_{1/2} = 19,1 \text{ cm}^{-1};$$

$$\epsilon_{\max} = 740 \text{ l/mole cm}.$$

La semilarghezza  $\Delta\nu_{1/2}$  e il coefficiente di assorbimento  $\epsilon_{\max}$  sono stati corretti per la larghezza finita della fenditura mediante i fattori delle Tabelle II e I del lavoro di Ramsay. Inoltre  $\epsilon_{\max}$  è stato estrapolato a concentrazione zero.

I valori di  $A$ ,  $\Delta\nu_{1/2}$  e del coefficiente di assorbimento  $\epsilon_{\max}$  determinati per la banda a 3458 della 2-pirrolaldeide possono essere confrontati con i valori delle stesse grandezze determinati da Russell e Thompson per la banda N—H del pirrolo e dei suoi derivati [5] e da Barrow per la banda O—H degli alcoli e del fenolo [6] sempre in soluzione di tetracloruro di carbonio (Tabella I).

A proposito di questi dati bisogna osservare che i valori delle semilarghezze dati da Russell e Thompson sono valori apparenti, cioè non corretti per la larghezza finita della fenditura; le semilarghezze reali sono probabilmente inferiori per un fattore 1,2-1,7. Inoltre né Russell e Thompson né Barrow hanno apportato la correzione per l'area sotto le ali della banda; perciò i loro dati per l'intensità integrata sono probabilmente affetti da un errore del 5-10% in meno.

TABELLA I.

	$A \cdot 10^{-4}$ (litri/mole $\cdot$ cm <sup>2</sup> )	$\Delta\nu_{1/2}$ (cm <sup>-1</sup> )	$\epsilon_{\max}$ (litri/mole $\cdot$ cm)	$\nu$ (cm <sup>-1</sup> )
<i>Banda NH</i> <sup>(5)</sup>				
1-Metilcarbazolo .	1,00	19,5	415	3482
2-Fenilindolo . .	1,00	19	415	3480
3-Metilcarbazolo .	1,10	16,5	520	3482
Carbazolo . . . .	1,10	18,5	530	3478
Pirrolo . . . . .	1,15	14	540	3495
3-Metilindolo . .	1,25	16,5	575	3490
Indolo . . . . .	1,31	14	670	3490
<i>Banda OH</i> <sup>(6)</sup>				
Alcool t-butilico .	0,42	—	—	3614
» isopropilico .	0,48	—	—	3620
» sec-butilico .	0,58	—	—	3623
» etilico . . . .	0,62	—	—	3634
» n-butilico . .	0,72	—	—	3636
» metilico . . .	0,53	—	—	3644
Fenolo . . . . .	1,2	—	—	3609

Tenuto conto di questo, se si confronta l'intensità integrata della banda a 3458 cm<sup>-1</sup> della 2-pirrolaldeide con quella della banda NH del pirrolo si vede che il rapporto fra la prima e la seconda è circa uguale a 2. Tenendo presente la relazione:

$$A = \frac{1N \cdot \pi}{3 \cdot 10^3 \cdot c^2} \left( \frac{\partial \mu}{\partial Q} \right)^2$$

dove:

$\mu$  = momento elettrico molecolare,

$Q$  = coordinata normale, e considerando inoltre che in questo caso la coordinata normale coincide con buona approssimazione con lo spostamento dell'atomo di idrogeno della sua posizione di equilibrio, si deve concludere che, se la banda a 3458 cm<sup>-1</sup> della 2-pirrolaldeide fosse dovuta ad un gruppo NH, questo dovrebbe avere un carattere ionico considerevolmente più accentuato che nel pirrolo.

Questa conclusione concorda con i valori assai alti della polarizzazione dielettrica (di orientamento) misurati in questo Istituto per la 2-pirrolaldeide in soluzione benzenica [7].

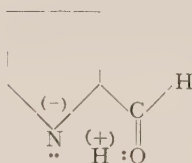


Poiché il carattere ionico del legame è determinato qui da una rarefazione della nuvola elettronica sull'atomo di idrogeno del gruppo in considerazione, si constata nella 2-pirrolaldeide una particolare situazione di questo idrogeno che al limite tende a diventare uno ione.

Questa situazione (sempre considerando il caso limite), può interpretarsi con l'alternativa che detto idrogeno possa trovarsi legato all'azoto secondo un legame iminico molto polarizzato ma si possa anche considerare come un ione idrogeno legato all'ossigeno carbonilico attraverso alla coppia di elettroni  $2p_y$  dello stesso senza che perciò si distrugga il doppio legame  $C=O$  in questo passaggio dell'idrogeno iminico all'ossigeno aldeidico.

Le possibilità classiche per graficizzare tale passaggio ci porterebbero direttamente ad una formula ossimetilenica che però sacrifica il doppio legame carbonilico. Questo doppio legame invece è dimostrato dagli spettri ultrarossi e Raman.

Una tale situazione porterebbe certamente a valori relativamente elevati di  $\partial\mu/\partial Q$  che renderebbero conto del valore assai alto dell'area integrata della banda di assorbimento dovuta alle oscillazioni dell'«idrogeno mobile» nella molecola dell'aldeide pirrolica.



L'ipotesi di un parziale o totale impegno della coppia elettronica  $2p_y$  dell'ossigeno carbonilico nella 2-pirrolaldeide potrebbe trovare riscontro in considerazioni che sono già state fatte da uno di noi in collaborazione con Marinangeli nella interpretazione degli spettri ultravioletti dell'aldeide pirrolica [8].

L'esame di tali spettri ultravioletti non mostra con evidenza la solita banda del  $C=O$  dovuta ad un salto elettronico  $N \rightarrow A$ , (transizione  $n \rightarrow \pi^*$ ) nel quale si impegna appunto il livello elettronico  $[y]^2$  corrispondente alla coppia  $2p_y$  dell'ossigeno carbonilico. E ciò fa appunto supporre che tale livello elettronico dell'ossigeno della 2-pirrolaldeide sia altrimenti impegnato o comunque perturbato per ragioni di struttura interna della molecola.

Sarebbe interessante insistere per chiarire questo punto onde indagare se con una simile ipotesi di un impegno dell'atomo di idrogeno dell'imino pirrolico all'atomo di ossigeno attraverso all'orbitale atomico  $(2p_y)^2$  dello stesso, e cioè senza impegno degli orbitali  $\pi(2p_z)$  e perciò senza compromettere il doppio legame carbonilico  $C=O$ , si possa interpretare sul piano elettronico l'idea già espressa tanti anni fa da Emilio Fischer [9] che «nell'aldeide pirrolica debba esistere una relazione tra l'idrogeno iminico ed il gruppo aldeidico che non risulta manifesta per mezzo delle attuali formule di costituzione».

Recentemente J. W. Sidman [10] ha sviluppato una trattazione teorica delle strutture di composti contenenti un gruppo carbonilico coniugato. Questo metodo si presta in modo particolare ad uno studio teorico delle transizioni  $n \rightarrow \pi^*$ .

Sono in corso in questo Istituto alcuni calcoli che, seguendo questa traccia speriamo ci permettano di approfondire il problema sopra prospettato.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] ANGELI e ALESSANDRI, « Rend. Accad. Lincei », 23, 93 (1914).
- [2] BONINO e MIRONE, « Rend. Accad. Lincei » [VIII], 17, 167 (1954).
- [3] RUSSELL e THOMPSON, « Proc. Roy. Soc. », A 234, 318 (1956).
- [4] RAMSAY, « Journ. Am. Chem. Soc. », 74, 72 (1952).
- [5] RUSSELL e THOMPSON, « Journ. Chem. Soc. », p. 483 (1955).
- [6] BARROW, « Journ. Phys. Chem. », 59, 1129 (1955).
- [7] MARINANGELI e BONINO jr., « Annali Chim. », 44, 953 (1954).
- [8] BONINO e MARINANGELI, « Rend. Accad. Lincei », [VIII], 19, 229 (1955).
- [9] E. FISCHER, « Ber. », 46, 2508 (1913).
- [10] SIDMAN, « Journ. Chem. Phys. », 27, 429 (1957).

#### **Fisiologia.** — *Analisi delle funzioni nervose elementari nell'uomo*<sup>(\*)</sup>.

Nota di RODOLFO MARGARIA, TORQUATO GUALTIEROTTI e DOMENICO SPINELLI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio R. MARGARIA.

L'analisi di alcuni parametri riguardanti l'attività riflessa spinale nell'uomo presenta due ordini di vantaggi rispetto alle stesse determinazioni eseguite nell'animale in esperimenti cruenti. In primo luogo si eliminano gli effetti dovuti all'eventuale narcotico e quelli traumatici dell'intervento chirurgico, tra i quali ad esempio importantissime le variazioni nella pressione arteriosa e nella glicemia; in secondo luogo l'esperimento sull'uomo permette di studiare l'effetto di grandezze psichiche sulle funzioni nervose elementari, mentre un tale tipo di indagine è assai difficile nell'animale.

È stato quindi messo a punto un metodo che permette di determinare nell'uomo: 1° il tempo riflesso spinale; 2° il ritardo di placca motrice; 3° la velocità di conduzione delle fibre motorie e 4° di quelle sensitive. Un 5° elemento che si è pure studiato nell'uomo è la soppressione di una risposta riflessa monosinaptica che segua a meno di 150 millisecondi una precedente stimolazione: tale dato dà informazioni dirette sullo stato di inibizione o

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

facilitazione dei motoneuroni spinali interessati nell'attività nervosa elementare studiata.

Il principio del metodo consiste nel provocare un riflesso monosinaptico mediante la stimolazione elettrica di un nervo misto, come è dimostrato schematicamente nella fig. 1. Il nervo è stimolato con un impulso quadrato

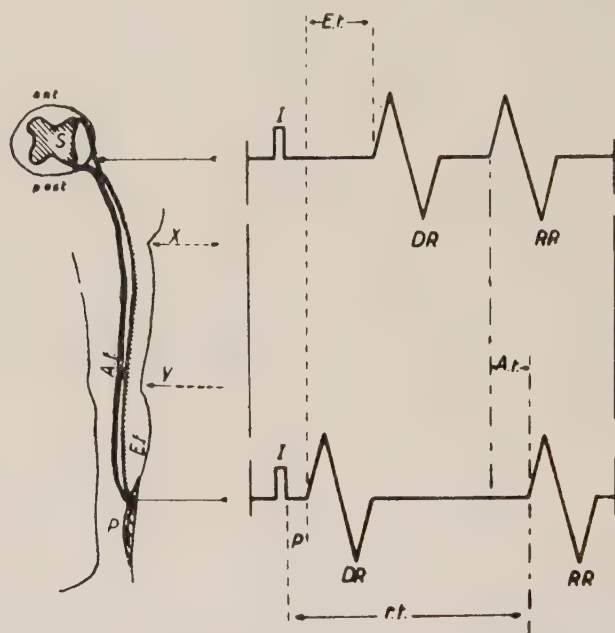


Fig. 1.

X-Y = Posizione degli elettrodi stimolanti.

Et = Tempo di conduzione motoria.

At = Tempo di conduzione sensitiva.

rt = Tempo riflesso totale.

1)  $Ef/Et$  = velocità di conduzione motoria.

2)  $Af/At$  = velocità di conduzione sensitiva.

3) P = ritardo di placca motrice.

4)  $(At + S + Et) - (At + Et)$  = tempo spinale (S).

unidirezionale per mezzo di elettrodi a placca applicati alla pelle sopra il decorso del nervo in due punti il più possibile distanziati: ad esempio, per lo sciatico nella regione poplitea e immediatamente sotto la plica glutea. La risposta muscolare viene rilevata con l'elettromiogramma per mezzo di elettrodi a placca, dello stesso tipo di quelli usati per la stimolazione, applicati sulla pelle al di sopra di un muscolo del territorio del nervo misto scelto. I potenziali muscolari sono amplificati da amplificatori in collegamento diretto e tubo a raggi catodici il cui asse dei tempi costituisce l'ascissa temporale.

Ogni stimolo provoca due risposte muscolari, la prima nel tempo dovuta all'eccitazione delle fibre motorie del nervo (risposta diretta) e l'altra all'ecci-

tazione delle fibre sensitive e dei centri spinali (risposta riflessa). La differenza di tempo fra l'inizio della risposta sia diretta che riflessa provocata dalla stimolazione di uno dei due punti sul nervo e l'inizio delle stesse risposte seguenti alla stimolazione dell'altro è dovuta alla conduzione nelle fibre sensitive e motorie. Il calcolo dei primi 4 parametri è eseguito come appare nella fig. 1. Il 5° parametro è stato studiato stimolando il nervo con treni di due stimoli distanziati 75 millisecondi e misurando l'altezza della seconda risposta rispetto alla prima.

Le difficoltà della stimolazione di un nervo misto nell'uomo che è alla base della tecnica suddescritta sono di due tipi:

1° data l'elevata resistenza di contatto degli elettrodi cutanei (5.000–8.000 Ohm), occorre un'alta tensione di stimolazione, la maggior parte della tensione di stimolo infatti cadendo a cavallo della resistenza di contatto. Inoltre dovendo stimolare un nervo, che è relativamente piccolo ed immerso in un conduttore di volume, la dispersione della corrente stimolante è elevata, e solo una frazione assai piccola di essa raggiunge il nervo: occorre quindi un'alta intensità di stimolo che, sommata alla suesposta necessità di un'alta tensione, significa una forte potenza di uscita nello stadio finale dello stimolatore impiegato. Questa difficoltà è resa ancora maggiore dal fatto che a qualche millisecondo dalla stimolazione è necessario registrare la risposta elettrica muscolare che costituisce il rilievo basale per il calcolo dei parametri della attività nervosa. Poiché questa risposta elettrica è dell'ordine di grandezza di 1–2 mV al massimo, essa va amplificata notevolmente e gli amplificatori non devono essere disturbati dall'artefatto elettrico indotto dal forte stimolo elettrico usato;

2° come si è visto nella descrizione in dettaglio del metodo, la misura del tempo di conduzione che deve essere sottratto dal tempo riflesso totale per ottenere il parametro più importante, cioè il tempo spinale, si basa sulla misura diretta della differenza fra i tempi delle risposte muscolari provocate dalla stimolazione del nervo nei due punti distanti: è necessario perciò che anche il momento dell'eccitamento del nervo sia noto con la massima precisione possibile. È ovvio che l'eccitamento del nervo ha luogo durante il passaggio dell'impulso elettrico e perciò quanto più breve sarà l'impulso tanto minore sarà la differenza fra tempo di stimolazione e tempo di eccitamento. Gli impulsi da noi usati avevano una durata di 30 microsecondi. È necessario per ciò disporre di una potenza ancora più elevata: lo stadio di uscita dello stimolatore usato poteva raggiungere 10.000 Watt per 30 microsecondi. Normalmente per stimolazioni sovramassimali impulsi della potenza di 3.000–6.000 Watt, a seconda della resistenza cutanea, erano sufficienti: occorreva cioè una tensione di 3.000–5000 Volt e un'intensità di 0,3–0,8 Ampère. L'artefatto attraverso gli amplificatori della risposta elettrica muscolare era ridotto quasi a zero usando *a*) un'uscita in radio-frequenza per lo stadio finale dello stimolatore, con una capacità di accoppiamento del circuito fluttuante di circa 50 picofarad, e *b*) amplificatori in collegamento diretto con una discriminazione in fase-controfase del segnale di 1/100.000.



Mediante gli accorgimenti tecnici descritti, i 5 parametri studiati sono apparsi assai costanti nell'uomo in condizioni normali, essendo la sensibilità del metodo di circa 0,1 millisecondi, limite questo imposto dal dispositivo registratore. Particolarmente suscettibili sono apparsi tutti e 5 i parametri a modificazioni metaboliche fondamentali, quali deficit di ossigeno e deficit di glucosio nel sangue. Anche prolungati esercizi muscolari, probabilmente in quanto appunto incidono sul metabolismo del sistema nervoso, hanno provocato sensibili variazioni. Le analisi dell'attività neuronica elementare con questo metodo si sono poi estese a varie condizioni fisiologiche, quali lo stato di fatica, la mancanza di sonno, le modificazioni della temperatura ambiente, ecc., e durante l'azione di varie sostanze sia partecipanti all'attività nervosa, quali l'acetilcolina e l'adrenalina, sia farmaci neurotropi, quali alcuni curaro-simili, gli eccitanti corticali tipo ritalin e simpamina, caffeina, ecc., l'alcool, i barbiturici, e un gruppo di cosiddetti tranquillanti e atarassici. I risultati in dettaglio di questi esperimenti sono in corso di stampa<sup>(1)</sup>: si accenna solo qui al fatto che la modificazione di maggior significato e più frequentemente rilevabile è costituita da una modificazione del tempo spinale. Questo aumenta in tutti i casi in cui l'azione della condizione generale o del farmaco era di tipo depressivo e si accorcia quando di tipo eccitatorio. Nella grandissima maggioranza dei casi non ci sono state modificazioni nella conduzione lungo le fibre nervose periferiche, mentre i curarici, ad esempio, esercitavano il massimo effetto a livello neuro-muscolare, allungando notevolmente il tempo di conduzione attraverso la placca motrice.

Il metodo descritto è suscettibile di essere usato come mezzo esatto di indagine per l'analisi delle attività elementari del midollo spinale nelle più svariate condizioni fisiologiche, ed anche come mezzo diagnostico nelle alterazioni patologiche del sistema nervoso e muscolare.

Questa ricerca è stata finanziata dall'Ufficio di Ricerca Scientifica dell'Air Research and Development Command, United States Air Force, tramite il suo Ufficio Europeo, secondo il Contratto AF 61 (514)-637.

(1) R. MARGARIA, T. GUALTIEROTTI e D. SPINELLI, *Variations in spinal reflexes in some stress inducing conditions*. In corso di stampa; R. MARGARIA, T. GUALTIEROTTI e D. SPINELLI, *Esame nell'uomo dell'attività dei neuroni spinali inferiori*. In corso di stampa (« Boll. it. Soc. Biol. sper. »); T. GUALTIEROTTI, R. MARGARIA e D. SPINELLI, *Modificazioni nell'attività dei neuroni spinali inferiori nell'uomo indotte da sostanze neurotrope*. In corso di stampa (« Boll. Soc. it. Biol. sper. »); R. MARGARIA, T. GUALTIEROTTI, D. SPINELLI e C. MORPURGO, *Changes in elementary neuron activity produced by some neurotropic drugs*. In corso di stampa.

**Patologia.** — *Ricerche sul potere patogeno di actinomiceti coltivati nella cavità allantoidea di embrione di pollo*<sup>(\*)</sup>. Nota di G. SALVATORE e LUIGI CALIFANO, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio L. CALIFANO.

La patogenesi delle infezioni da actinomiceti è poco conosciuta anche perché è difficile distinguere quanto concorrano in essa i fattori di virulenza e di patogenicità propri dei germi e quanto quelli di resistenza degli ospiti ritenuti sensibili.

La incostanza delle risposte nelle infezioni sperimentali anche con ceppi di actinomiceti isolati da focolai patologici, l'impossibilità di modificarne la virulenza e la patogenicità mediante ripetuti passaggi in animali sensibili, sono tutti fattori che hanno condotto a ritenere, specialmente negli anni recenti, che nella patogenesi dell'infezione abbia maggiore importanza la sensibilità reattiva dell'ospite che la virulenza della specie e del ceppo. Zironi (1951) ritiene infatti che « una abnorme recettività dell'ospite sia la causa del persistere e dello estendersi della malattia » e attribuisce ad essa « una influenza di gran lunga preponderante su quella dell'agente patogeno in sé »; Cavallero (1939) conclude che « la condizione di iperrecettività è fattore essenziale per lo stabilirsi e il persistere di ogni affezione da actinomiceti ». Inoltre la larga diffusione nell'ambiente, rispetto alla rarità delle infezioni spontanee, lascia presumere frequentissimo il contagio non seguito da infezione. Redaelli e Piantoni (1953 *a*; 1953 *b*) sono riusciti poi ad ottenere l'infezione sperimentale in *Mus decumanus* *albus* con un ceppo poco virulento di *Proactinomyces asteroides* associando la somministrazione di cortisone, che deprime tipicamente i processi difensivi organici locali e generali.

La modificazione della sensibilità dell'ospite, sperimentalmente indotta, è certamente utile per la comprensione della patogenesi di alcuni casi di infezione spontanea o sperimentale da actinomiceti, ma non si può dire da ciò che la virulenza del germe e la sua patogenicità abbiano scarso o verun significato perché ceppi diversi dello stesso actinomicete si comportano in modo diverso sia nelle infezioni spontanee che in quelle provocate in condizioni standard (Skinner et al., 1951).

La virulenza e la patogenicità sono poi da ritenere espressioni di proprietà biologiche del microrganismo, cioè esistenti a prescindere dalla recettività e dalla resistenza dell'ospite anche se questo interviene necessariamente nella stima di esse (cfr. Califano, 1956). Anche se le nostre attuali conoscenze non ci permettono la determinazione diretta della virulenza di un germe (ad esempio mediante lo studio quantitativo in via chimica dei fattori di virulenza) è necessario distinguere virulenza da determinazione di essa.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale dell'Università di Napoli.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

Per gli actinomiceti il problema è più difficile perché non sono stati ancora dimostrati fattori di virulenza o di patogenicità, intendendo per virulenza la proprietà specifica del germe che lo rende capace di superare o annullare l'immunità naturale della specie sensibile e per patogenicità, invece, la capacità del germe a determinare il fatto patologico (cfr. Califano, 1956).

Lo studio del decorso delle infezioni spontanee o sperimentali lascia tuttavia presumere che negli actinomiceti i fattori di virulenza sono probabilmente diversi da quelli di patogenicità; le specie maggiormente capaci di determinare il fatto patologico, ossia quelle comunemente ritenute patogene, presentano notevolissima variabilità nella capacità di superare la immunità naturale della specie sensibile, ossia hanno virulenza molto variabile.

Si è perciò ricercata una condizione sperimentale che permettesse di porre in evidenza le proprietà patogene di ceppi di actinomiceti scarsamente virulenti; a tale condizione può rispondere un test sensibile, in cui sono scarsamente attivi i poteri di difesa legati alla immunità naturale. L'infezione dell'embrione di pollo è sembrato il mezzo migliore per tale scopo: le varie strutture dell'embrione, mentre offrono al germe condizioni di sviluppo paragonabili a quelle esistenti negli organismi infettati, hanno inoltre il vantaggio di possedere più scarsi e più indifferenziati poteri di difesa. Recentemente Blitek et al. (1957) hanno dimostrato che l'embrione di pollo è il substrato più adatto per saggiare il potere patogeno di alcuni ceppi di brucelle e Frappier e Sonea (1953, 1954) hanno messo a punto nell'embrione di pollo di 18-19 giorni un metodo di infezione stafilococcica sperimentale che ha permesso anche (Sonea e Frappier, 1955) un dosaggio quantitativo dell'azione *in vivo*, delle sostanze antistafilococciche.

Salvatore e Pontieri (1956) hanno poi dimostrato che nella cavità allantoidea di embrione di pollo si avvera per *Proactinomyces ruber* la cosiddetta «riduzione morfologica parassitaria». I proactinomiceti, germi tipicamente dimorfi, nelle culture o nella fase saprofitica presentano un micelio che generalmente dura poco come tale perché si verifica presto la frammentazione di esso con formazioni di elementi prima bacillari e poi coccoidi che continuano a riprodursi come tali; nella fase parassitaria gli stessi proactinomiceti presentano, invece, sempre micelio indiviso e cioè aspetto filamentoso. Nelle colture in cavità allantoidea si avvera, come nella fase parassitaria, sviluppo miceliale ad ife assai lunghe e ramificate; questo aspetto è caratteristico anche del proactinomicete coltivato nella cavità allantoidea.

Il *Coccidioides immitis* nelle lesioni patologiche si presenta sotto forma di sferule mentre nei terreni di coltura ha forma miceliale, comportamento morfologico cioè invertito rispetto a *Proactinomyces*. Nel sacco vitellino di embrione di pollo si otterrebbe, nonostante qualche voce discordante in proposito (Newcomer et al., 1952), la formazione delle sferule caratteristiche della fase parassitaria (Brueck e Buddingh, 1951; Vogel e Conant, 1952).

Con le presenti ricerche si è studiata la possibilità di coltivare alcuni actinomiceti nella cavità allantoidea, e di aumentarne la patogenicità mediante passaggi seriatati.

Tra i vari actinomiceti importanza sempre maggiore come causa di malattia viene attribuita al genere *Proactinomyces* (o *Nocardia*): secondo Kligman e De Lamater (1950) circa metà dei casi di micosi non identificate sono dovuti a differenti specie di *Nocardia*. Per tale ragione, e per le cennate relazioni esistenti in questi germi tra aspetto morfologico (monomorfo o dimorfo) e condizione biologica (parassitaria o saprofitica), è stata principalmente studiata una specie del genere *Proactinomyces*.

Negli actinomiceti, e nel genere *Nocardia* in particolare, vi è una notevolissima variabilità nella virulenza non solo da una specie all'altra, ma anche da ceppo a ceppo della stessa specie (cfr. Skinner et al., 1951). La specie *asteroides* è senza dubbio quella che si riscontra più frequentemente nei casi di nocardiosi spontanea (Conant e Rosebury, 1952; Mariat et al., 1955), ma anche con essa le prove di patogenicità sperimentale danno risultati discordi (cfr. Drake e Henrici, 1943 con Skinner et al., 1951).

Nelle presenti ricerche è stato adoperato un ceppo della specie *ruber*, specie sulla quale nulla si conosce che riguardi le infezioni sperimentali. Il ceppo in esame è studiato dal punto di vista morfologico (Baldacci, 1944; Salvatore e Pontieri, 1956; Pontieri e Salvatore, 1956) e metabolico (McLung, 1954; Mariat, 1954 a, 1954 b); se esso va identificato, come sembra con *N. corallina*, appartiene di certo ad una specie ubiquitaria e scarsamente infettante. Pur appartenendo al gruppo dei proactinomiceti di tipo  $\alpha$  secondo Umbreit (1939) (i quali in genere hanno scarso potere patogeno), nella cavità allantoidea di embrione di pollo tale specie mostra la conversione  $\alpha \rightarrow \beta$  (Salvatore e Pontieri, 1956).

#### MATERIALE E METODI.

##### 1. — Ceppi adoperati.

1) *Proactinomyces ruber* (Casabò) Baldacci, ceppo inizialmente isolato da una lesione cutanea della mano (cfr. Baldacci, 1944).

Waksman ed Henrici (1943, 1948) distinguono, in base a leggere differenze nel colore delle colonie, tre specie di *Nocardia* con pigmento non diffusibile tendente al roseo: *N. rubra* (Krassilnikov), *N. corallina* (Bergey et al.) e *N. rubropertincta* (Hefferan).

Baldacci (1944) ha identificato, invece, tale proactinomicete con *P. corallinus* (Hefferan) Jensen: tale identificazione, e quindi quella con *N. corallina*, sembra confermata dai risultati di Salvatore e Pontieri (1956) e da quelli di McLung (1954) che ha trovato analogie sostanziali nell'utilizzazione di alcuni nutrienti tra *P. ruber* e *N. corallina*. Le lievi differenze riscontrate sono più esigue di quelle esistenti tra ceppi diversi della stessa specie (ad



esempio tra i 6 ceppi di *N. asteroides* studiati dall'A.), mentre è notevole che, tra i 90 ceppi di nocardie esaminati, essi siano i soli ad utilizzare il fenolo come sorgente di carbonio.

2) *Actinomyces madurae* (Vincent) Lachner-Sandoval, inviato al prof. Baldacci dal Centraalbureau voor Schimmelcultures di Baarn sotto la denominazione *Actinomyces ruber* (Krainsky). Per la formazione di un ben definito micelio aereo e per l'assenza di frammentazione del micelio vegetativo non può essere identificato con *Nocardia madurae* (Vincent) Blanchard di Waksman ed Henrici. Dagli studi di numerosi Autori (cfr. Baldacci 1944; Gonzales Ochoa e De Los Angeles Sandoval, 1955, ecc.) sembra che la specie *madurae* debba essere classificata nel genere *Actinomyces* (*Streptomyces*) e non in *Proactinomyces* (*Nocardia*).

3) *Actinomyces griseus* (Krainsky) Waksman, della collezione dell'Istituto Superiore di Sanità. Corrisponde allo *Streptomyces griseus* (Krainsky) di Waksman ed Henrici.

## 2. - Terreni di cultura.

1) terreno solido di Czapek, secondo la modificazione proposta da Baldacci et al. (1954); la sorgente di azoto è costituita da idrolizzato di caseina (Difco) privo di vitamine;

2) terreno solido di Sabouraud al maltosio della Difco;

3) agar-patata contenente il 2 % di glucosio;

4) acqua peptonata contenente il 4 % di glucosio;

5) liquido allantoideo di uova embrionate al 12° giorno di sviluppo.

## 3. - Inoculazione nelle uova fecondate.

Questa veniva eseguita secondo la tecnica di Beveridge e Burnet (1946) con alcune modifiche rese necessarie sia dallo sviluppo relativamente lento degli actinomiceti, sia dalla convenienza di ottenere risultati quanto più possibile riproducibili.

Le uova, di peso tra i 50 e i 55 g., provenienti dallo stesso allevamento (razza livornese), venivano incubate a 36,5° C. Nella camera di incubazione veniva mantenuta una umidità relativa dell'80 % circa, valore un po' più alto di quello comunemente usato ma giustificato dallo scopo di ottenere, per ciascun embrione, la massima quantità possibile di liquido allantoidec. Le inoculazioni venivano eseguite:

a) nella cavità allantoidea, al 10° giorno di incubazione;

b) sulla membrana corion-allantoidea, al 12° giorno di incubazione;

c) nella cavità amniotica, al 13° giorno di incubazione.

Al 16° giorno di sviluppo gli embrioni sopravvissuti venivano uccisi mediante permanenza per 8-10 ore a + 4° C allo scopo di evitare copiose emorragie all'atto del prelievo. Si asportava quindi sterilmente il liquido allantoideo o amniotico, a seconda del tipo di inoculazione eseguito, e

mentre una aliquota veniva immediatamente inoculata in altri embrioni, un'altra veniva usata per controlli microscopici e culturali. Venivano poi esaminati la membrana corion-allantoidea, la membrana amniotica e i vari organi dell'embrione.

Il primo inoculum era costituito da 0,15 ml di una sospensione in 20 ml di brodo e soluzione fisiologica a parti eguali di agar-coltura di 8 giorni, i successivi da 0,10 ml di liquido allantoideo o amniotico appena prelevato. Contemporaneamente si eseguiva una serie di inoculazioni controllo: 0,15 ml di brodo sterile al primo inoculo, 0,10 ml di liquido allantoideo sterile prelevato dalle uova controllo ai successivi.

Altre serie di inoculazioni sono state eseguite con colture di *Proactinomyces ruber* di 72 ore: a) in liquido allantoideo sterilmente prelevato da embrioni al 12° giorno di incubazione; b) in acqua peptoglucoata.

È difficile standardizzare l'inoculum iniziale, soprattutto di *P. ruber*, a causa della sua crescita ad ammassi granulari nei terreni liquidi e dell'impossibilità di ottenere una sospensione omogenea partendo da culture su terreni solidi. Controlli eseguiti su un'aliquota della sospensione inoculata, mediante dosaggio dell'N totale con il micrometodo di Kjeldhal, hanno dato infatti, tra campioni diversi di uno stesso inoculo notevoli differenze e tra campioni di inoculi diversi differenze ancora più grandi. Nei passaggi successivi non è stato possibile valutare quantitativamente gli actinomiceti presenti negli inoculi: molto variabile è infatti la torbidità dei liquidi e non è possibile quindi riferirsi né al peso secco né all'azoto totale. Il tipo di crescita ad ammassi granulari impedisce ovviamente la conta delle colonie.

#### RISULTATI.

In seguito alla inoculazione nella cavità allantoidea di embrione di pollo di una sospensione di *P. ruber* da agar-culture si osserva:

1° Il liquido allantoideo prelevato dopo l'uccisione dell'embrione si presenta costantemente più torbido di quello delle uova controllo. Nei successivi passaggi la torbidità aumenta nettamente; dopo il 5°-6° passaggio il liquido diviene anche francamente emorragico. L'osservazione microscopica del liquido allantoideo dimostra la presenza del proactinomicete con micelio costantemente indiviso corrispondentemente a quanto descritto da Salvatore e Pontieri (1956).

Retrocolture dal liquido stesso sui terreni descritti danno costantemente risultato positivo. Esse si differenziano dalle colture ottenute da cellule provenienti dai comuni terreni per l'iniziale colorito biancastro della patina sui terreni solidi e per la maggiore persistenza della fase miceliale.

2° La membrana corion-allantoidea si presenta edematosa, ispessita, iperemica; le alterazioni nei successivi passaggi diventano sempre più gravi perché compaiono noduli biancastri e focolai emorragici. Nello strato mesodermale non si notano segni di infiammazione specifica ma infiltrati ematici con elementi miceliali del proactinomicete.

3° I vari organi dell'embrione sono notevolmente congesti; non si notano, però, né alterazioni istologiche degne di rilievo, né presenza di elementi del proactinomicete.

4° Mentre per i controlli la mortalità degli embrioni non supera mai il 10 %, nelle serie delle uova inoculate con *P. ruber* dopo un numero variabile di passaggi, si manifesta un evidente effetto letale sugli embrioni di pollo.

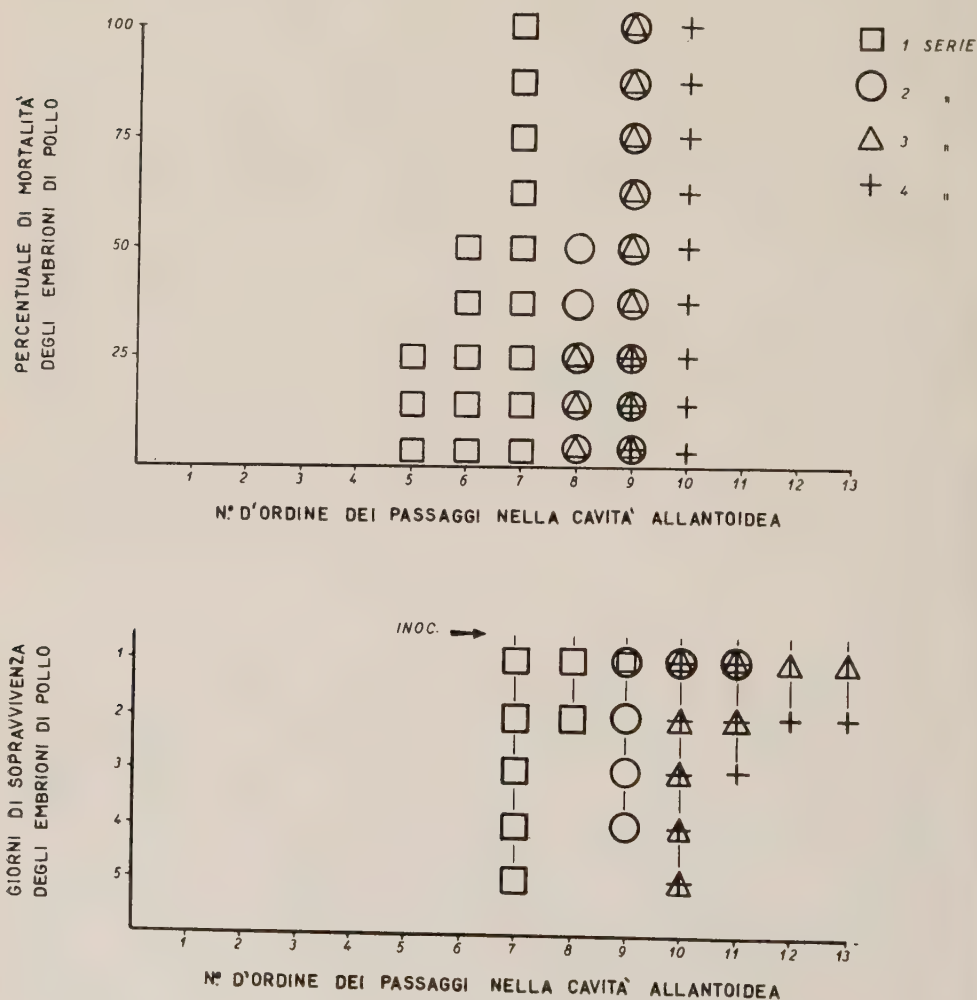


Fig. 1.

Nella fig. 1 viene riassunto l'esperimento n. 1.

Dal diagramma superiore si nota:

1° Anche nello stesso esperimento, a seconda della serie, l'effetto letale si manifesta dopo un numero di passaggi variabile; al 5° passaggio

nella I serie (25 % delle uova inoculate); all'8° nella II e III serie (25 e 50 % rispettivamente) al 9° nella IV serie (25 %).

Nonostante tutti i tentativi per standardizzare le condizioni sperimentali, non è riuscito possibile eliminare tale variabilità nei successivi esperimenti. La seguente tabella riassume i risultati ottenuti:

*Passaggio al quale è comparso l'effetto letale sull'embrione di pollo. Inoculazione in cavità allantoidea di 0,1 ml di sospensione P. ruber*

	Esp. 1	Esp. 2	Esp. 3	Esp. 4
Serie I . . . . .	5°	3°	7°	8°
» II . . . . .	8°	5°	7°	9°
» III . . . . .	8°	8°	8°	11°
» IV . . . . .	9°	8°	8°	neg. al 13°

Si noti che l'effetto letale si è manifestato tra il 3° (serie I dell'esp. 2) e l'11° passaggio (serie III dell'esp. 4); esso si è però verificato costantemente con una sola eccezione (serie IV dell'esp. 4), più spesso all'8° passaggio.

2° Una volta manifestatosi in una serie, l'effetto letale si verifica poi costantemente nei passaggi successivi ed anzi la percentuale di mortalità si eleva in uno o due passaggi fino a raggiungere il 100 %. Il fenomeno cioè è irreversibile e progressivo.

Dal diagramma inferiore si nota, inoltre, che una volta ottenuta la morte del 100 % degli embrioni di una stessa serie, nei successivi passaggi il tempo di sopravvivenza degli embrioni diminuisce.

Nella serie I, ad esempio, gli embrioni sono sopravvissuti al 7° passaggio 5 giorni, all'8° 2 giorni e al 9° sono morti in meno di 24 ore.

Risultati analoghi si ottengono usando come inoculo di partenza una coltura di *P. ruber* in acqua peptoglicosata. Se, invece, l'inoculo di partenza è costituito da una coltura di *P. ruber* di 96 ore in liquido allantoideo di embrione di pollo, l'effetto letale si manifesta, in genere, prima. Esso è ancora più precoce se il proactinomicete è adattato a tale mezzo di cultura mediante successivi trapianti, essendo tuttavia necessari sempre più di tre passaggi perché esso si manifesti.

Sospensioni di *P. ruber* da retrocolture da liquido allantoideo non hanno effetto letale sull'embrione di pollo.

L'inoculazione sulla membrana corion-allantoidea provoca alterazioni più evidenti a carico della membrana ma lo sviluppo del proactinomicete nel liquido allantoideo è più scarso e più irregolare.

L'inoculazione nel sacco amniotico provoca, invece, una elevata mortalità aspecifica degli embrioni di pollo, in gran parte legata alla stessa



tecnica di inoculazione. L'effetto letale sull'embrione di pollo si manifesta forse più precocemente ma, data l'alta mortalità nelle serie controllo, l'analisi dei risultati è più difficile.

Per tali ragioni si è eseguita abitualmente l'inoculazione nella cavità allantoidea.

Esperimenti analoghi sono stati condotti con *A. madurae* e *A. griseus*: l'effetto letale sugli embrioni di pollo si verifica con questi actinomiceti più tardivamente ( $12^{\circ}$ - $13^{\circ}$  passaggio) e con minore regolarità, ma anche in questo caso una volta manifestatosi in una serie, esso si verifica costantemente.

#### DISCUSSIONE.

I risultati ottenuti dimostrano anzitutto che la cavità allantoidea di embrione di pollo è adatto mezzo di cultura per *P. ruber*, *A. madurae* e *A. griseus*.

L'inoculazione di essi nella cavità allantoidea, tra le varie modalità di infezione delle uova fecondate, è risultato il mezzo più semplice e più sicuro per la valutazione dell'attività patogena svolta sull'embrione. Tale tecnica, relativamente semplice, poco traumatizzante e quindi con mortalità aspecifica praticamente nulla per l'embrione di pollo, permette di eseguire passaggi in serie e rende facile l'analisi dei risultati ottenuti. L'inoculazione sulla membrana corion-allantoidea è invece mezzo utile per l'osservazione delle eventuali alterazioni specifiche prodotte dagli actinomiceti (cfr. anche Peragallo, 1940; Cilli et al., 1954) ma è meno adatta per coltivazioni seriate.

Utilizzando poi la tecnica dei passaggi in serie è stato possibile valutare l'aumento del potere patogeno esercitato dagli actinomiceti, e specialmente da *P. ruber*, sull'embrione di pollo. Esperienze preliminari hanno inoltre dimostrato che tale aumento del potere patogeno non si manifesta solo verso l'embrione di pollo, ma anche verso gli animali da esperimento (topolino bianco, cavia). La comparsa dell'effetto letale dopo un numero variabile di passaggi conferma inoltre l'ipotesi che la coltivazione in serie nella cavità allantoidea induca un aumento del potere patogeno del proactinomicete.

La variabilità del numero dei passaggi necessari perché appaia l'effetto letale sembra in gran parte legata alla difficoltà di ottenere condizioni standard nell'inoculo iniziale e nei successivi passaggi. È tuttavia notevole che, una volta verificatosi, l'effetto letale rapidamente raggiunge in solo uno o due passaggi il 100 % degli embrioni di una stessa serie e si manifesta costantemente nei passaggi successivi. Variabile è quindi solo l'insorgere dell'effetto letale, essendo costante il decorso successivo del fenomeno che, valutato come effetto finale (morte dell'embrione), ha inizio brusco e, nelle varie serie, andamento parallelo.

L'aumento del potere patogeno di *P. ruber* sembra inoltre che continui anche dopo che si è manifestato l'effetto letale sul 100 % degli embrioni della serie: il tempo di sopravvivenza, infatti, diminuisce nei passaggi successivi fino a ridursi a meno di 24 ore.

Circa l'interpretazione dei risultati ottenuti non si può credere che la coltivazione nella cavità allantoidea provochi la selezione di un mutante virulento presente in minima percentuale nella coltura di partenza perché le retrocolture ottenute dal liquido allantoideo perdono del tutto il loro potere patogeno per l'embrione di pollo.

Senza dubbio nei proactinomiceti esistono rapporti molto stretti tra aspetto morfologico monomorfo (miceliale) e stato parassitario. È noto che le prove di patogenicità sperimentale hanno risultato positivo specialmente con i proactinomiceti di tipo  $\beta$ , secondo la distinzione di Umbreit (1939) ossia con i microrganismi di questo genere che possiedono micelio più stabile e più ramificato. *P. ruber* va certamente incluso nei proactinomiceti di tipo  $\alpha$ , ma la coltivazione nella cavità allantoidea ne modifica notevolmente le proprietà biologiche sia inducendo la conversione  $\alpha \rightarrow \beta$  (Salvatore e Pontieri, 1956) sia esaltando le sue caratteristiche patogene. I due fenomeni appaiono dai nostri risultati strettamente collegati senza che ciò significhi necessariamente che l'un fenomeno sia causa dell'altro.

Le condizioni esistenti nella cavità allantoidea modificano le proprietà biologiche del proactinomicete con un meccanismo presumibilmente analogo a quello che nei tessuti invasivi provoca la cosiddetta « animalizzazione » dell'actinomicete. Tale termine sta ad indicare un cambiamento improvviso nelle proprietà patogene dell'actinomicete che diviene atto ad esercitare sull'animale azioni patogene prima del tutto assenti. Le cause di tale fenomeno, generalmente spontaneo perché difficile od impossibile a provocare sperimentalmente, sono del tutto sconosciute, ma esso presenta analogie con l'acquisto delle proprietà patogene indotto dalla coltivazione nella cavità allantoidea. Tale acquisto, se valutato come capacità di provocare la morte dell'embrione, appare bruscamente, ma è del tutto reversibile perché è sufficiente un solo trapianto sui comuni terreni di coltura per fare perdere al proactinomicete le sue proprietà patogene. Ciò è in accordo con le ripetute osservazioni che mentre il materiale patologico prelevato da un focolaio d'infezione da *Nocardia* è spesso anch'esso patogeno per gli animali da esperimento, l'inoculazione di retrocolture del proactinomicete responsabile della infezione ha risultato negativo.

È inoltre difficile determinare costantemente l'infezione sperimentale da actinomiceti. Strauss e Kligmann (1951) e Strauss et al. (1951) affermano che è possibile provocare con sufficiente regolarità la morte degli animali da esperimento mediante inoculazione di *N. asteroides* in una sospensione di mucina gastrica al 2-5 %; con tale metodo i risultati non sono stati però sempre altrettanto favorevoli (cfr. Mariat et al., 1955). La coltivazione nella cavità allantoidea di embrione di pollo, permettendo di ottenere una vera infezione sperimentale da actinomiceti, potrebbe essere altro mezzo utile per lo studio

di quegli actinomiceti per i quali la scarsa o variabile virulenza rende difficile realizzare l'infezione sperimentale. Essa, infatti, fornendo un substrato vivente con scarsi poteri di difesa permette di apprezzare il potere patogeno degli actinomiceti indipendentemente sia dalla loro virulenza sia dall'interferenza che i poteri di difesa dell'ospite esercitano sulla loro moltiplicazione.

## BIBLIOGRAFIA.

- BALDACCİ E., «Atti Ist. Bot. Univ. Pavia», serie V, 3, 139 (1944).  
 BALDACCİ E., GREIN A. e SPALLA C., «Nuovi Ann. Ig. Microbiol.», 5, 296 (1954).  
 BEVERIDGE W. I. B. a. BURNET F. M., *The cultivation of viruses and rickettsiae in the chick-embryo*, Medical Research Council, London 1946.  
 BLITEK D., PARNAS J. et ZUBER S., «Ann. Inst. Pasteur», 92, 146 (1957).  
 BRUECK J. W. a. BUDDINGH C. J., «Proc. Soc. Expl. Biol. Med.», 76, 258 (1951).  
 CALIFANO L., «Atti IX Congr. Naz. Soc. It. Microbiol.», 74 (1956).  
 CAVALLERO C., «Mycopath.», 2, 219 (1939).  
 CILLI V., BATTELLI C. e CECCARELLI A., «Boll. Ist. Sieroter. Milanese», 33, 139 (1954).  
 CONANT N. F. a. ROSEBURY T. in DUBOS R. J., *Bacterial and mycotic infections of man*, 2th Ed. Lippincott J. B. Co., Philadelphia, 634, 1952.  
 DRAKE C. H. a. HENRICI A. T., «Am. Rev. Tuberc.», 48, 184 (1943).  
 FRAPPIER A. et SONEA S., «Rev. Can. Biol.», 12, 184 (1953).  
 FRAPPIER A. et SONEA S., «Union Méd. Canada», 83, 382 (1954).  
 GONZALES OCHOA A. y DE LOS ANGELES SANDOVAL M., «Rev. Inst. Salubr. Enferm. Trop.», 15, 149 (1953).  
 KLIGMAN A. M. a. DE LAMATER E. D., «Ann. Rev. Microbiol.», 4, 283 (1950).  
 MARIAT F., «Ann. Inst. Pasteur», 86, 479 (1954 a).  
 MARIAT F., «Ann. Inst. Pasteur», 87, 233 (1954 b).  
 MARIAT F., HAZEN E. L., LE BEAU J. et TESTARD E., «Ann. Inst. Pasteur», 89, 256 (1955).  
 MCLUNG N. M., «J. Bacteriol.», 68, 231 (1954).  
 NEWCOMER V. D., WRIGHT E. T. a. TAMBLYN E. E., «J. Infect. Dis.», 90, 258 (1952).  
 PERAGALLO I., «Giornal. Batteriol. Immunol.», 27, n. 4 (1940).  
 PONTIERI G. e SALVATORE G., «Giorn. Microbiol.», 1, 393 (1956).  
 REDAELLI P. e PIANTONI L., Symp. V: *Actinomycetales: Morfologia, biologia e sistematica*; VIth Intern. Congr. Microbiol., Roma (1953 a).  
 REDAELLI P. e PIANTONI L., «Giorn. Mal. Inf. Parass.», 5, 77 (1953 b).  
 SALVATORE G. e PONTIERI G., «Giorn. Microbiol.», 1, 385 (1956).  
 SKINNER C. E., EMMONS C. W. a. TSUCHIYA H. M., *Henrici's Molds, Yeasts and Actinomycetales*, II ee., Wiley and Sons, New York 1951.  
 SONEA S. a. FRAPPIER A., «Can. J. Microbiol.», 1, 597 (1955).  
 STRAUSS E. R. a. KLIGMAN A. M., «J. Infect. Dis.», 88, 151 (1951).  
 STRAUSS E. R., KLIGMAN A. M. a. PILLSBURY D. M., «Am. Rev. Tuberc.», 63, 441 (1951).  
 UMBREIT W. W., «J. Bacteriol.», 38, 73 (1939).  
 VOGEL R. A. a. CONANT N. F., «J. Bacteriol.», 64, 83 (1952).  
 WAKSMAN S. A. a. HENRICI A. T., «J. Bacteriol.», 46, 337 (1943).  
 WAKSMAN S. A. a. HENRICI A. T., in BREED R. G., MURRAY E. G. D. a. HITCHENS A. P., *Bergey's Manual of Determinative Bacteriology*, VI ed., Baillière, Tindall & Cox, London 1948.  
 ZIRONI A., *L'allergia nelle malattie infettive*, Ist. Sierot. Milanese, Milano 1951.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sur un invariant du groupe des équivalences superficielles de l'espace euclidien à trois dimensions.* Nota di M. PAUL VINCENSINI, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Le but de cette Note est de faire connaître une propriété des transformations du groupe des équivalences de l'espace métrique euclidien  $E_3$ , c'est-à-dire des correspondances ponctuelles entre deux surfaces données quelconques de cet espace, dans lesquelles deux éléments superficiels homologues quelconques ont même aire.

Cette propriété met en jeu une circonstance relative à la déformation des surfaces, que nous avons indiquée dans une Note antérieure (1), et que nous commencerons par rappeler.

$S$  étant une surface quelconque de  $E_3$  rapportée à un système quelconque de coordonnées curvilignes  $(u, v)$ , prenons arbitrairement, dans le plan tangent en chacun de ses points  $P(u, v)$ , un point  $I$ , la loi  $(P, I)$  associant chaque point  $P$  au point  $I$  correspondant étant seulement astreinte à être continue, et dérivable jusqu'à l'ordre deux au moins relativement aux deux variables  $u$  et  $v$ .

Lorsque  $P$  décrit une courbe quelconque  $C$  sur  $S$ ,  $I$  décrit une certaine courbe  $\Gamma$  de  $E_3$ , et les courbes  $C$  de  $S$  correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires homologues aux courbes  $\Gamma$  associées forment un certain réseau, dépendant de la loi d'association  $(P, I)$  choisie.

Si la loi est définie par les deux fonctions  $a(u, v)$  et  $b(u, v)$ , donnant  $I$  à partir de  $P$  par la relation vectorielle

$$(1) \quad \vec{I} = \vec{P} + a \frac{\partial \vec{P}}{\partial u} + b \frac{\partial \vec{P}}{\partial v},$$

l'équation du réseau en question est

$$(2) \quad A du^2 + B du dv + C dv^2 = 0,$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont les expressions

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = E \left( 1 + \frac{\partial a}{\partial u} \right) + F \frac{\partial b}{\partial u} + \frac{a}{2} \frac{\partial E}{\partial u} + \frac{b}{2} \frac{\partial E}{\partial v}, \\ B = 2 F + E \frac{\partial a}{\partial v} + G \frac{\partial b}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} (aF) + \frac{\partial}{\partial v} (bF), \\ C = G \left( 1 + \frac{\partial b}{\partial v} \right) + F \frac{\partial a}{\partial v} + \frac{b}{2} \frac{\partial G}{\partial v} + \frac{a}{2} \frac{\partial G}{\partial u}; \end{array} \right.$$

(\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) P. VINCENSINI, *Sur certains cônes quadratiques issus des points d'une hypersurface de l'espace euclidien à  $n$  dimensions*, « C. R. », t. 226, pp. 1069-1071 (1948).



E, F, G sont les coefficients du  $ds^2$  de S, et il convient de noter que les quantités  $a$  et  $b$  sont liées aux coordonnées  $l$  et  $m$  de I, relatives au système d'axes du plan tangent en P à S constitué par les tangentes aux courbes  $u$  et  $v$ , par les formules

$$(4) \quad l = a\sqrt{E} \quad , \quad m = b\sqrt{G}.$$

En général le réseau (2) est unique; il y a possibilité d'exception pour les surfaces S applicables sur les *surfaces spirales*, qui, moyennant la loi (P, I) associant, à chaque point P, le centre de courbure géodésique I de la trajectoire orthogonale des spirales gauches déformées issue de P, donnent un réseau du type envisagé *complètement indéterminé* (tout déplacement infinitésimal de P sur S est orthogonal au déplacement infinitésimal correspondant de I).

La loi d'association (P, I) étant supposée choisie ( $a$  et  $b$  données), fixons chaque point I dans le plan tangent à S au point P associé, de sorte que, si l'on soumet S à une déformation (métrique) arbitraire au cours de laquelle la surface entraîne ses différents plans tangents, les différents points I restent invariablement liés aux plans tangents à S aux points P correspondants. La forme de l'équation (2), dont les coefficients A, B, C, définis par les formules (3), ne dépendent que de la loi d'association (P, I) et des coefficients de la première forme fondamentale de S, montre alors que le réseau précédemment défini reste inchangé, c'est-à-dire est toujours constitué par les deux mêmes familles de courbes de la surface S. Pour une loi d'association (P, I) donnée ce réseau est donc un invariant de déformation de la surface S; nous l'appellerons le *réseau invariant de S relatif à la loi d'association considérée*.

Tout réseau de S peut, d'une infinité de façons, être regardé comme un réseau invariant au sens qui vient d'être précisé, et cette circonstance permet, en associant au réseau le plus général de S l'une quelconque des lois (P, I) qui lui confèrent la qualité d'invariant de déformation, d'envisager cet être géométrique d'un point de vue nouveau, et d'en faire, dans bien des cas, un intéressant instrument d'investigation.

2. Demandons-nous quelles sont, pour une surface quelconque S donnée, les lois d'association (P, I) relativement aux quelles les réseaux invariants dont il vient d'être question sont *orthogonaux*. En exprimant l'orthogonalité du réseau (2) par sa conjugaison par rapport au réseau des lignes de longueur nulle de S, on trouve sans peine que cette orthogonalité se traduit par l'équation

$$(4) \quad \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + a \frac{\partial \text{Log } \sqrt{EG - F^2}}{\partial u} + b \frac{\partial \text{Log } \sqrt{EG - F^2}}{\partial v} + 2 = 0,$$

qui exprime la condition nécessaire et suffisante à vérifier par les fonctions  $a$  et  $b$  pour que le réseau invariant de S relatif à la loi d'association (P, I) soit orthogonal.

L'équation (4) ne dépend que de la quantité  $EG - F^2$  qui définit, moyennant la formule  $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv$ , l'élément d'aire  $d\sigma$  de  $S$ ; cette équation est donc la même pour toutes les surfaces en correspondance ponctuelle les unes avec les autres avec conservation des aires, les points homologues sur les différentes surfaces étant supposés repérés au moyen des mêmes paramètres  $u$  et  $v$ .

De là on déduit que les différents couples de fonctions  $(a, b)$  définissant, pour une surface quelconque  $S$ , les lois d'association  $(P, I)$  relativement auxquelles le réseau associé invariant (par déformation *métrique* de  $S$ ) est *orthogonal*, constituent un ensemble invariant vis-à-vis, non seulement du groupe des transformations métriques de  $S$ , mais plus généralement du groupe des *transformations équivalentes* de cette surface, c'est-à-dire des transformations ponctuelles de  $S$  conservant les aires, les points homologues sur  $S$  et sur ses transformées correspondant aux mêmes valeurs des paramètres  $u$  et  $v$ .

3. Voyons maintenant ce que l'on peut dire des positions géométriques que, pour une loi  $(a, b)$  déterminée du type envisagé, le point  $I$  définissant la loi en question occupe, respectivement, dans le plan tangent  $\pi$  au point courant  $P$  de la surface  $S$  et dans le plan tangent  $\pi'$  au point correspondant  $P'$  de l'une quelconque  $S'$  de ses transformées équivalentes. Au voisinage du couple  $(P, P')$  la correspondance ponctuelle entre  $S$  et  $S'$  est tangente à une certaine affinité conservant les aires entre les plans  $\pi$  et  $\pi'$  (affinité unimodulaire), et si l'on désigne par  $(x, y)$  et  $(x', y')$  les coordonnées, relatives aux systèmes d'axes formés par les tangentes aux courbes  $u, v$  de  $S$  et  $S'$ , de deux points quelconques  $M$  et  $M'$  de  $\pi$  et  $\pi'$  homologues dans l'affinité précédente, celle-ci est définie par les équations

$$(5) \quad \frac{x'}{\sqrt{E'}} = \frac{x}{\sqrt{E}} \quad , \quad \frac{y'}{\sqrt{G'}} = \frac{y}{\sqrt{G}} \quad .$$

Or, si l'on considère les deux points  $I$  et  $I'$  que la loi  $(a, b)$  associe, dans  $\pi$  et  $\pi'$  respectivement, aux deux points  $P$  et  $P'$ , et si l'on désigne par  $(l, m)$ ,  $(l', m')$  les coordonnées de  $I$  et  $I'$  dans  $\pi$  et  $\pi'$ , les relations (4) écrites respectivement pour  $I$  et  $I'$  montrent que les coordonnées de ces points vérifient les équations (5), et que par suite  $I$  et  $I'$  se correspondent dans l'affinité unimodulaire envisagée.

Si l'on prolonge toute correspondance ponctuelle équivalente entre deux surfaces quelconques  $S, S'$  par les correspondances équivalentes (affinités unimodulaires) qu'elle induit entre deux plans tangents homologues quelconques de  $S$  et de  $S'$ , on définit une transformation géométrique agissant simultanément sur les points  $P$  de  $S$  et sur les différentes lois d'association  $(P, I)$  possibles, de façon que,  $P'$  étant le transformé de  $P$ , le point  $I'$  définissant la loi d'association  $(P', I')$  transformée de  $(P, I)$  soit celui que l'équivalence induite entre les plans tangents en  $P$  et  $P'$  à  $S$  et  $S'$  fait correspondre au point  $I$ .

Il résulte de ce qui précède que toute transformation équivalente des surfaces de  $E_3$ , étendue comme il vient d'être dit aux lois d'association  $(P, I)$ , transforme toute loi  $(P, I)$  relative à une surface quelconque  $S$  de l'espace, pour laquelle le réseau invariant tel qu'il a été défini plus haut est orthogonal, en une loi  $(P', I')$  relative à la surface  $S'$  transformée de  $S$ , pour laquelle le réseau invariant associé sur  $S'$  est aussi orthogonal.

Si donc on considère l'ensemble  $(L)$  constitué par les lois d'association  $(P, I)$  relatives aux différentes surfaces de l'espace euclidien  $E_3$ , et si l'on adopte, pour les éléments de cet ensemble, la loi géométrique de transformation définie comme il vient d'être expliqué à partir du groupe  $(G)$  des transformations superficielles équivalentes de  $E_3$ , on peut dire que *le sous-ensemble  $(L_0)$  constitué par les lois d'association  $(P, I)$  pour lesquelles le réseau invariant associé est orthogonal est invariant par les opérations du groupe  $(G)$ .*

Il est à peine nécessaire de faire observer, que sur deux surfaces quelconques en transformation superficielle équivalente, les réseaux orthogonaux invariants relatifs à deux lois d'association transformées *ne se correspondent généralement pas.*

**Matematica.** — *Osservazioni sulle serie di potenze nei moduli quadratici.* Nota di MICHELE SCE, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

In questo breve lavoro consideriamo dei moduli con unità che siano quadratici, e cioè i cui elementi (rispetto alla struttura moltiplicativa indotta nei moduli dalla loro algebra tensoriale) soddisfino ad un'equazione quadratica. Mostriamo che, in questi moduli, le serie di potenze (positive o negative) annullano — se l'ordine del modulo è pari — una potenza di un laplaciano generalizzato. Ciò permette di estendere alcuni risultati del Fueter e della sua scuola sulle funzioni nei quaternioni e nelle algebre di Clifford.

1. Sia  $\mathbf{M}$  un modulo su di un campo  $\mathbf{F}$  di caratteristica diversa da 2 e sia  $\mathbf{I} = i_0, i_1, \dots, i_n$  una sua base. Dopo aver identificato l'identità di  $\mathbf{F}$  e quella di  $\mathbf{M}$ , potremo scrivere gli elementi di  $\mathbf{M}$  nella forma

$$x = x_0 + x_1 i_1 + \dots + x_n i_n = x_0 + \mathbf{x} \quad (x_i \in \mathbf{F}).$$

Sia  $\mathbf{T}$  l'algebra tensoriale su  $\mathbf{M}$  e supponiamo che per gli elementi  $\mathbf{x}^2$  di  $\mathbf{T}$  si abbia

$$(1) \quad \mathbf{x}^2 = q(\mathbf{x}) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k$$

dove  $q(\mathbf{x})$  denoti una forma quadratica su  $\mathbf{F}$ ; ne segue che  $\mathbf{x}^2 (\in \mathbf{T})$  è in  $\mathbf{M}$ . Allora  $\mathbf{M}$  risulta chiuso rispetto all'operazione che alla coppia  $x, y$  fa cor-

(\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

rispondere  $(xy+yx)/2$ , la quale fornisce un'algebra  $\mathbf{M}^+$  di Jordan. Quando il modulo  $\mathbf{M}$  si consideri in  $\mathbf{T}$  dotato della struttura moltiplicativa di  $\mathbf{M}^+$ , lo si dirà un *modulo quadratico* e lo si indicherà con  $\mathbf{M}_q$ .

Poiché, portando  $q(\mathbf{x})$  a forma canonica, si vede che  $\mathbf{M}^+$  è un'algebra di Jordan centrale semplice di grado 2,  $\mathbf{M}_q$  si può immergere soltanto in algebre  $\mathbf{A}$  tali che  $\mathbf{A}^+$  contenga una siffatta algebra di Jordan. Tra queste sono particolarmente interessanti le algebre ottenibili con il procedimento di Cayley-Dickson; queste algebre sono esse stesse moduli quadratici <sup>(1)</sup>. Se poi  $\mathbf{A} \supset \mathbf{M}_q$  è associativa, essa contiene l'algebra quoziente di  $\mathbf{T}$  e dell'ideale generato dalla (1); perciò la più piccola algebra associativa che contiene un modulo quadratico è un'algebra di Clifford o un'algebra che ha come parte semisemplice un'algebra di Clifford e come radicale un'algebra a quadrato nullo — secondo che  $q(\mathbf{x})$  non è od è degenera <sup>(2)</sup>.

2. Diremo coniugato di un elemento  $x = x_0 + \mathbf{x}$  di  $\mathbf{M}_q$  l'elemento  $\bar{x} = x_0 - \mathbf{x}$ ; è immediato che

$$x + \bar{x} = 2x_0 = t(x) \quad (\text{traccia di } x)$$

$$x\bar{x} = x_0^2 - q(\mathbf{x}) = n(x) \quad (\text{norma di } x)$$

sono in  $\mathbf{F}$  e che gli elementi  $x$  di  $\mathbf{M}_q$  soddisfanno all'equazione in  $\mathbf{F}$

$$(2) \quad z^2 - t(x)z + n(x) = 0.$$

Se  $x$  è un elemento di  $\mathbf{M}_q$  con la norma non nulla, possiamo considerare in  $\mathbf{M}_q$

$$(3) \quad \frac{\bar{x}}{n(x)}$$

e verificare che esso è una delle soluzioni della equazione in  $y$   $x \cdot y = 1$ ; poichè, inoltre (3) gode delle proprietà formali dell'inverso, possiamo chiamarlo inverso di  $x$  ed indicarlo con  $x^{-1}$ .

3. Poniamo ora

$$y^2 = \frac{1}{\varepsilon} q(\mathbf{x}) \quad \text{e quindi} \quad n(x) = x_0^2 - \varepsilon y^2$$

dove  $y$  ed  $\varepsilon$  sono in  $\mathbf{F}$  od in una sua estensione  $\mathbf{F}^\circ$ ; nel seguito, considereremo  $\mathbf{M}_q$  su  $\mathbf{F}^\circ$  ed escluderemo il caso in cui  $y$  sia identicamente nullo.

Diremo che una funzione  $w(x)$  in  $\mathbf{M}_q$  è *biolomorfa* se accade che

$$(4) \quad w(x) = u(x_0, y) + \frac{1}{y} v(x_0, y) \mathbf{x}$$

(1) A. A. ALBERT, *Quadratic forms permitting composition*, « Ann. of Math. », vol. 43, pp. 161-177, (1942).

(2) Cfr. C. C. CHEVALLEY, *The algebraic theory of spinors* (New York, 1954), Chapter II, § 1.



dove  $u(x_0, y)$  e  $v(x_0, y)$  sono funzioni di  $x_0$  ed  $y$  <sup>(3)</sup> soddisfacenti alle relazioni

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial x_0} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_0} \quad (4).$$

Tenendo conto del fatto che

$$(m - 2k) \binom{m}{2k} = (2k + 1) \binom{m}{2k + 1},$$

è facile verificare che le potenze di una funzione biolomorfa

$$w^m = \left[ \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} (\varepsilon)^k \binom{m}{2k} u^{m-2k} v^{2k} \right] + \frac{1}{y} \left[ \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} (\varepsilon)^k \binom{m}{2k+1} u^{m-2k-1} v^{2k+1} \right] x$$

( $[m/2]$  parte intera di  $m/2$ ) sono ancora funzioni biolomorfe. Poiché  $x$  e  $x^{-1}$  sono evidentemente biolomorfe, ne segue che sono biolomorfe tutte le combinazioni lineari a coefficienti costanti di potenze positive o negative di una variabile, la proprietà estendendosi alle serie se  $\mathbf{F}$  è finito o valutato.

4. Indichiamo con  $\partial$  l'operatore  $i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + i_n \frac{\partial}{\partial x_n}$  e sia  $q^{-1}(\mathbf{x}) = \sum_{j,k=1}^n \alpha_{jk} x_j x_k$  la forma quadratica inversa di  $q(\mathbf{x})$ . Posto

$$(6) \quad \square w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} - q^{-1}(\partial) w,$$

mostriamo che, se  $w_0 = u_0 + \frac{1}{y} v_0 x$  è biolomorfa ed  $n$  è dispari, allora:

$$(7) \quad \square^{(n+1)/2} w_0 = 0.$$

Per semplificare i calcoli poniamo

$$u_s = \frac{\partial^{s-1}}{\partial y^{s-1}} \frac{1}{y}, \quad v_s = \frac{\partial^{s-1}}{\partial y^{s-1}} \frac{1}{y} - \frac{v_{s-1}}{y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{v_{s-1}}{y}$$

$$w_s = u_s + \frac{1}{y} v_s x \quad (s = 1, 2, \dots),$$

e mostriamo che le  $u_s$  e le  $v_s$  soddisfanno alle relazioni

$$(8) \quad \frac{\partial u_s}{\partial x_0} = \frac{\partial v_s}{\partial y} + 2s \frac{v_s}{y}, \quad \frac{\partial u_s}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial v_s}{\partial x_0}.$$

Per  $s = 0$  le (8) sono verificate dato che si riducono alle (5). Supponiamo

(3) Si noti che  $x_0 + y$  ed  $x_0 - y$  sono le soluzioni della (2). Ne viene la presunzione che per una eventuale estensione a moduli cubici, ..., convenga considerare le espressioni che compaiono quando si risolvono le equazioni algebriche col metodo di Lagrange.

(4) Naturalmente, le derivazioni vanno intese come rappresentazioni che godono delle solite proprietà formali.

dunque che le (8) sussistano per  $s-1$ ; allora

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_s}{\partial x_0} &= \frac{1}{y} \frac{\partial^2 u_{s-1}}{\partial x_0 \partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial v_{s-1}}{\partial y} + 2(s-1) \frac{v_{s-1}}{y} \right] = \\ &= \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y v_s + (2s-1) \frac{v_{s-1}}{y} \right] = \frac{\partial v_s}{\partial y} + 2s \frac{v_s}{y}, \\ \frac{\partial u_s}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y} \frac{\partial u_{s-1}}{\partial y} \right) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y} \frac{\partial v_{s-1}}{\partial x_0} \right) = \varepsilon \frac{\partial v_s}{\partial x_0},\end{aligned}$$

che è proprio quel che volevamo dimostrare.

Con semplici calcoli si trova poi che

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x_0^2} &= \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_0^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 v_s}{\partial x_0^2} \mathbf{x} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ y \frac{\partial u_{s+1}}{\partial y} + (2s+1) u_{s+1} \right] + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial v_{s+1}}{\partial y} + 2s \frac{v_{s+1}}{y} \right] \mathbf{x}, \\ \frac{\partial w_s}{\partial x_j} &= \frac{1}{\varepsilon} u_{s+1} \frac{\partial q}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{v_{s+1}}{y} \frac{\partial q}{\partial x_j} \mathbf{x} + \frac{v_s}{y} i_j \\ \frac{\partial^2 w_s}{\partial x_j \partial x_k} &= \frac{1}{\varepsilon^2 y} \frac{\partial u_{s+1}}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial q}{\partial x_k} + \frac{1}{\varepsilon} u_{s+1} a_{jk} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{v_{s+1}}{y^3} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial q}{\partial x_k} \mathbf{x} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2 y^2} \frac{\partial v_{s+1}}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial q}{\partial x_k} \mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{v_{s+1}}{y} \left[ a_{jk} \mathbf{x} + \frac{\partial q}{\partial x_j} i_k + \frac{\partial q}{\partial x_k} i_j \right].\end{aligned}$$

Infine

$$\sum_{j,k}^{1 \dots n} \alpha_{jk} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial u_{s+1}}{\partial y} y + n u_{s+1} + \frac{\partial v_{s+1}}{\partial y} \mathbf{x} + (n+1) \frac{v_{s+1}}{y} \mathbf{x} \right]$$

e quindi, tenendo conto della (6),

$$(9) \quad \varepsilon \square w_s = (n-2s-1) w_{s+1}.$$

Perciò, se  $n$  è dispari, per  $s = n-1/2$  si avrà

$$(10) \quad \varepsilon \square w_{n-1/2} = 0,$$

cioè la (7).

5. Una funzione  $w$  in  $\mathbf{M}_q$  si dirà JB-monogena (Jordan B-monogena) se, con  $B = \|b_{jk}\|$ ,  $b_{jk} = b_{kj}$ ,  $|B| = 0$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ), si ha

$$\frac{\partial w}{\partial x_0} - \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{j,k}^{1 \dots n} b_{jk} \left[ \frac{\partial w}{\partial x_j} i_k + i_k \frac{\partial w}{\partial x_j} \right] = 0.$$

$w_0$  essendo biolomorfa, poniamo  $S = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j,k}^{1 \dots n} b_{jk} \frac{\partial q}{\partial x_j} i_k$  e teniamo conto che

$$2 - \frac{1}{\varepsilon y^2} (S\mathbf{x} + \mathbf{x}S) = \frac{1}{\varepsilon y^2} [\mathbf{x}(\mathbf{x}-S) + (\mathbf{x}-S)\mathbf{x}].$$

La condizione di JB-monogeneità per  $w_s$  allora si scrive

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\varepsilon} u_{s+1}(\mathbf{x} - S) + \frac{\partial v_s}{\partial y} \left[ 1 - \frac{1}{2\varepsilon^2 y^2} (\mathbf{x}S + S\mathbf{x}) \right] + \\ &+ \frac{v_s}{y} \left[ 2s + \frac{1}{2\varepsilon^2 y^2} (\mathbf{x}S + S\mathbf{x}) \right] - \frac{v_s}{y} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j,k}^{1 \dots n} b_{jk} i_j i_k = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} [w_{s+1}(\mathbf{x} - S) + (\mathbf{x} - S) w_{s+1}] + \frac{v_s}{y} (2s + 1) - \frac{v_s}{y} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j,k}^{1 \dots n} b_{jk} a_{jk}; \end{aligned}$$

questa è soddisfatta se  $s = n - 1/2$  e se

$$(11) \quad \mathbf{x} = S.$$

Dunque: se in  $\mathbf{M}_q$  vale la (11), la potenza  $(n - 1/2)$ -esima del  $\square$  di tutte le funzioni biolomorfe è JB-monogena.

6. Se  $\mathbf{M}_q$  è un'algebra, oppure se B è scalare e  $w$  è tale che la matrice jacobiana  $\partial w / \partial \mathbf{x}$  risulti simmetrica, possiamo considerare in  $\mathbf{M}_q$  l'equazione

$$(12) \quad \frac{\partial w}{\partial x_0} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j,k}^{1 \dots n} b_{jk} i_j \frac{\partial w}{\partial x_k} = D_B w = 0^{(5)}.$$

Le funzioni che soddisfanno alla (12) si diranno B-monogene a sinistra (in modo analogo si definiscono le funzioni B-monogene a destra).

Con un calcolo del tutto simile a quello svolto nel n. 5 si vede che, se vale la (11), la potenza  $n-1/2$ -esima del  $\square$  delle funzioni biolomorfe è B-monogena a destra ed a sinistra.

Se inoltre  $\mathbf{M}_q$  è alternativo, moltiplicando la (12) a sinistra per l'operatore  $\bar{D}_B$  coniugato di  $D_B$ , si trova che

$$(13) \quad \bar{D}_B D_B w = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} g(\partial) \right] w = 0,$$

dove  $g(\mathbf{x})$  è la forma quadratica che ha come matrice  $BAB_{-1}$ . Perciò se B soddisfa alla relazione

$$(14) \quad BAB_{-1} = \varepsilon^2 A^{-1} \quad (6),$$

la (13) coincide con la (6) e possiamo dire che: le funzioni B-monogene sono soluzioni dell'equazione  $\square w = 0$ .

(5) Se  $\mathbf{M}_q$  non è un'algebra, affinché  $D_B w$  sia in  $\mathbf{M}_q$ , occorre e basta che  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} B$  sia simmetrica; se  $x$  varia in modo che il determinante jacobiano non sia sempre nullo, ciò porta che B debba essere scalare e  $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}}$  simmetrica.

(6) È facile determinare le matrici B, purché si tenga conto che - essendo B simmetrica - la (14) si può scrivere  $(BA)^2 = \varepsilon^2 I$ .

Tutte queste relazioni diventano poi particolarmente semplici nel caso dei moduli quadratici classici, cioè quelli per i quali  $f(x) = -(x_1^2 + \dots + x_n^2)$ .

Da qui e dall'enunciato del precedente capoverso si può poi riottenere il risultato del n. 4 (nell'attuale caso particolare).

7. Supponiamo ora  $\mathbf{F}$  valutato, e che la norma  $n(x)$  sia una forma quadratica definita; allora in  $\mathbf{M}_q$  non ci sono divisori dello zero. In un prossimo lavoro, basandoci sulle proprietà dimostrate nei nn. precedenti, mostremo come la teoria delle funzioni di quaternioni possa venire estesa alle funzioni nell'algebra (alternativa) dei numeri di Cayley; qui ci limiteremo a fare soltanto qualche considerazione sui moduli quadratici nelle algebre associative.

Con ragionamenti ormai classici, si dimostra anzitutto che per le funzioni B-monogene sussiste un teorema integrale bilatero. Allora nello spazio rappresentativo del modulo  $\mathbf{M}_q$  è possibile costruire una formula integrale del tipo di Cauchy, con il nucleo  $\square^n - \frac{1}{2} x^{-1}$ . Da qui discende poi la possibilità di sviluppare in serie, ... etc. In base al penultimo capoverso del n. 6, si ottengono in questo modo anche proprietà delle funzioni che soddisfanno alla equazione (ellittica)  $\square W = 0$  <sup>(7)</sup>.

Sia infine  $\mathbf{M}_q$  un modulo quadratico sul campo reale, ed  $\mathbf{A}$  la più piccola algebra associativa che lo contenga. Il problema di estendere agli elementi di  $\mathbf{A}$  una formula integrale (del tipo di Cauchy), trovata che sia per gli elementi di  $\mathbf{M}_q$ , è banale se  $\mathbf{M}_q$  è d'ordine 2. D'altra parte, tale problema non è risolubile appena l'ordine di  $\mathbf{M}_q$  superi 4, come risulta dalla classificazione delle algebre di Clifford <sup>(8)</sup> e da alcune semplici considerazioni sulla varietà dei divisori dello zero delle algebre <sup>(9)</sup>. Rimarrebbe perciò soltanto da esaminare il caso in cui  $\mathbf{M}_q$  è d'ordine 4 (e non è un'algebra); ma allora  $\mathbf{A}$  è un'algebra di Clifford d'ordine 8 e si ritroverebbero risultati già noti, almeno nel caso classico <sup>(10)</sup>.

(7) Tutte le ricerche su questi argomenti poggiano su R. FUETER, *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen  $\Delta u = 0$ , und  $\Delta \Delta u = 0$  mit vier reellen Variablen*, «Comm. Math. Helv.», vol. 7 pp. 307-330 (1934-35). Tra i lavori della scuola del FUETER, quelli che trattano argomenti più vicini ai nostri sono: W. NEF, *Funktionentheorie einer Klasse von hyperbolischen und ultrahyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, ibid., vol. 17, pp. 83-107 (1944-45); H. G. HAEFELI, *Hyperkomplexe Differentiale*, ibid., vol. 20, pp. 382-420 (1947); A. KRISZTEN, *Elliptische systeme von partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten*, ibid., vol. 23, pp. 243-271 (1949).

(8) Si veda CHEVALLEY, cit. in <sup>(2)</sup>, Chap. II. La classificazione per le algebre classiche di Clifford si trova già nell'articolo E. STUDY, E. CARTAN, *Nombres complexes*, «Encycl. Franc.», I, 5, n. 36, pp. 463...

(9) M. SCE, *Sulla varietà dei divisori dello zero nelle algebre*, «Rend. Lincei», agosto 1957.

(10) G. B. RIZZA, *Funzioni regolari nelle algebre di Clifford*, «Rend.», Roma, vol. 15 pp. 53-79 (1956). Le formule integrali stabilite in questo lavoro sussistono in generale per le algebre somme dirette di quaternioni (ma non per le algebre di Clifford di ordine superiore ad 8).



**Analisi matematica.** — *Equazioni differenziali negli spazi di Banach, teoremi di esistenza e di prolungabilità.* Nota di CONSTANTIN CORDUNEANU, presentata (\*) dal Socio M. PICONE.

I. Consideriamo l'equazione differenziale

$$(1) \quad y' = f(x, y),$$

con la condizione iniziale

$$(2) \quad y(x_0) = y_0.$$

È ben noto il classico teorema del Peano sull'esistenza di almeno una soluzione, quando  $f(x, y)$  è una funzione continua nell'intorno del punto  $(x_0, y_0)$ . Questo teorema vale anche nel caso dei sistemi differenziali ordinari con un numero finito di funzioni incognite.

Bourbaki (1) ha dimostrato, per mezzo di un esempio, che la continuità della funzione  $f(x, y)$  non basta per la validità di tale risultato, quando  $y(x)$  e  $f(x, y)$  sono funzioni con valori appartenenti ad uno spazio di Banach.

Nacque naturalmente la questione di trovare un teorema simile a quello del Peano, per il caso in cui  $y(x)$  e  $f(x, y)$  appartengano ad uno spazio di Banach.

Un tale teorema è il seguente:

**TEOREMA I.** — *Sia  $E$  uno spazio di Banach e sia  $f(x, y)$  una funzione definita per  $(x, y) \in I \times \Sigma \subset \mathbb{R} \times E$ , dove  $I = \{x; |x - x_0| \leq a\}$ ,  $\Sigma = \{y, \|y - y_0\| \leq b\}$ ,  $f(x, y) \in E$ .*

*Se la funzione  $f(x, y)$  è uniformemente continua su  $I \times \Sigma$  e rappresenta questo insieme in un insieme compatto, allora esiste almeno una soluzione della equazione (1), soddisfacente la condizione (2). Essa è definita nell'intervallo  $I' = \{x; |x - x_0| \leq \delta\}$ , essendo*

$$(3) \quad \delta = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\},$$

mentre

$$(4) \quad M = \sup \|f(x, y)\|, \quad (x, y) \in I \times \Sigma.$$

Per far uso del teorema dei punti uniti di Schauder-Tychonoff, consideriamo lo spazio di Banach  $\mathcal{C}(I', E)$  delle funzioni continue su  $I'$ , con valori in  $E$ . La norma vi sarà definita per

$$(5) \quad \|u - v\| = \sup \|u(x) - v(x)\|, \quad x \in I'.$$

(\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) N. BOURBAKI, *Fonctions d'une variable réelle*, Chap. IV, Paris p. 25 (1951).

Sia  $K$  l'insieme delle funzioni continuamente derivabili, appartenenti allo spazio  $\mathcal{C}(I', E)$ , per le quali

$$(6) \quad \|u(x) - y_0\| \leq b, \quad \|u'(x)\| \leq M, \quad x \in I'.$$

$K$  è un insieme convesso di funzioni ugualmente continue.

Per ogni  $u \in K$ , sia  $y = \mathcal{A}u$  la funzione definita per mezzo della

$$(7) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt.$$

La continuità dell'operatore  $\mathcal{A}$  è evidentissima. Può anche constatarsi, senza difficoltà, che  $y \in K$  se  $u \in K$ . Per la dimostrazione del teorema, basta dimostrare che l'insieme  $\{y\}$  è compatto. Questo risulterà dalla compattezza dell'insieme  $\{y'\}$  in  $\mathcal{C}(I', E)$ . Essendo le funzioni  $y'(x)$  definite sull'insieme compatto  $I'$  ed appartenendo i loro valori ad un altro insieme compatto, basterà mostrare che le funzioni della famiglia  $\{y'\}$  sono ugualmente continue. Ma questo risulta facilmente dalla continuità uniforme della funzione  $f(x, y)$  e dall'uguale continuità delle funzioni di  $K$ .

OSSERVAZIONE 1<sup>a</sup>. — Se  $E = \mathbb{R}^n$ , dalla continuità di  $f(x, y)$  seguirà la continuità uniforme su  $I \times \Sigma$  e la compattezza dell'immagine  $f(I \times E)$ . Dunque, il teorema di Peano risulta dal teorema I.

OSSERVAZIONE 2<sup>a</sup>. — La dimostrazione del teorema di Peano, dovuta al Tonelli <sup>(2)</sup>, conduce anche allo stesso risultato.

2. Naturalmente si pone adesso la questione di generalizzare i teoremi di prolungabilità conosciuti nel caso  $E = \mathbb{R}^n$ .

Sia  $\Delta \subset \mathbb{R} \times E$  un insieme aperto e sia  $f(x, y)$  una funzione definita su  $\Delta$ , con valori nello spazio  $E$ .

Lo spazio  $\mathbb{R} \times E$  è anche uno spazio di Banach con la norma

$$(8) \quad \|(x, y)\| = |x| + \|y\|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in E.$$

Si dirà che l'insieme  $D \subset \Delta$  è un  $\alpha$ -insieme quando: 1)  $D$  è limitato nello spazio  $\mathbb{R} \times E$ ; 2) la distanza fra  $D$  e la frontiera di  $\Delta$  è positiva.

La funzione  $f(x, y)$  sarà supposta uniformemente continua su ogni  $\alpha$ -insieme e di più, supponiamo che l'immagine di tale insieme per mezzo di  $f(x, y)$  sia relativamente compatto.

Il teorema I ci assicura che per ogni punto di  $\Delta$  passa almeno una soluzione dell'equazione (1).

La soluzione  $y(x)$ , dell'equazione (1), definita nell'intervallo  $x_0 \leq x < x_1$ , si dirà prolungabile a destra se si può trovare un'altra soluzione  $Y(x)$ , della stessa equazione, definita per  $x_0 \leq x < x_2$ , tale che sia  $x_1 < x_2$  e  $y(x) = Y(x)$  per  $x_0 \leq x < x_1$ .

Una soluzione non prolungabile a destra si dirà saturata a destra.

(2) L. TONELLI, « Bulletin of the Calcutta Math. Society », 20, p. 31 (1928).

Possiamo definire nello stesso modo le nozioni di soluzione prolungabile o saturata a sinistra. In tutto ciò che seguirà, si tratta delle soluzioni prolungabili o saturate a destra.

LEMMA. - *Una condizione necessaria e sufficiente per la prolungabilità della soluzione  $y(x)$ , definita nell'intervallo  $x_0 \leq x < x_1$ , è che il suo grafico sia un  $\alpha$ -insieme.*

Se la soluzione  $y(x)$  è prolungabile, essa può essere considerata definita sull'intervallo  $x_0 \leq x \leq x_1$ . L'insieme  $\{(x, y(x))\}$ , è compatto ed appartiene a  $\Delta$ . Dunque, il grafico è un  $\alpha$ -insieme.

La sufficienza si dimostra facilmente osservando che esiste  $\lim y(x)$  per  $x \rightarrow x_1$  e che  $(x_1, y(x_1)) \in \Delta$ .

COROLLARIO. - *Una condizione necessaria e sufficiente perché la soluzione  $y(x)$ , definita per  $x_0 \leq x < X$ , sia saturata, è che il suo grafico sia un insieme non limitato oppure che esso contenga punti a distanza arbitrariamente piccola dalla frontiera di  $\Delta$ .*

Sarà utile osservare che ogni insieme aperto  $\Delta \subset \mathbb{R} \times E$  è il limite di una successione di  $\alpha$ -insiemi. Si potrà prendere, ad esempio,

$$(9) \quad \Delta_m = \left\{ (x, y); (x, y) \in \Delta, \quad \|(x, y)\| \leq m, d[(x, y), \text{fr } \Delta] \geq \frac{1}{m} \right\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

TEOREMA II. - *Ogni soluzione prolungabile dell'equazione (1) appartiene almeno ad una soluzione saturata della stessa equazione.*

Dimostreremo che ogni soluzione prolungabile appartiene ad una soluzione tale che il suo grafico abbia punti comuni con gli insiemi  $\Delta_{m+1} - \Delta_m$ , essendo  $m$  arbitrariamente grande. Il grafico di una tale soluzione sarà non limitato, oppure avrà punti a distanza arbitrariamente piccola dalla frontiera di  $\Delta$ . Quindi, la soluzione sarà saturata.

Sia  $y(x)$  una soluzione prolungabile, definita sull'intervallo  $x_0 \leq x \leq x_1$  (abbiamo visto che l'intervallo può essere considerato chiuso). Il suo grafico appartiene ad un certo  $\Delta_m$ , per esempio, a  $\Delta_{m_1}$ . Sia  $\Delta_{m_1}(\varepsilon)$  l'intorno chiuso di  $\Delta_{m_1}$  contenente tutti i punti situati a distanza  $\leq \varepsilon$  da  $\Delta_{m_1}$ . Supponiamo  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo per essere  $\Delta_{m_1}(\varepsilon) \subset \Delta$ . Sia  $M_1 = \sup \|f(x, y)\|$   $(x, y) \in \Delta_{m_1}(\varepsilon)$ . Per ogni punto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta_{m_1}$  passa almeno una soluzione dell'equazione (1) definita nell'intervallo

$$(10) \quad \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \bar{\varepsilon}, \quad \bar{\varepsilon} = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2M_1} \right\}.$$

Dunque è possibile prolungare la soluzione  $y(x)$  sull'intervallo  $x_0 \leq x \leq x_1 + \bar{\varepsilon}$ . Se il grafico della soluzione prolungata appartiene anche a  $\Delta_{m_1}$ , può farsi un nuovo prolungamento. Dopo un numero finito di tali prolungamenti, il grafico della soluzione prolungata uscirà da  $\Delta_{m_1}$  (poiché in  $\Delta_{m_1}$   $x$  rimane finito mentre  $x_1 + n\bar{\varepsilon} \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ ). La soluzione prolungata  $y(x)$  sarà definita nell'intervallo  $x_0 \leq x \leq x_1 + n_1\bar{\varepsilon}$  ed il suo grafico sarà contenuto in un certo  $\Delta_{m_2}$ ,  $m_2 > m_1$ . Così continuando, si ottiene una soluzione

definita per  $x_0 \leq x < X$  ( $X \leq +\infty$ ), tale che il suo grafico abbia punti comuni con gli insiemi  $\Delta_{m+1} - \Delta_m$ , essendo  $m$  arbitrariamente grande.

OSSERVAZIONE. — Nel caso  $E = \mathbb{R}^n$  siamo condotti al classico teorema di prolungabilità <sup>(3)</sup>.

3. Un'altra questione interessante è quella del comportamento delle soluzioni saturate al « punto terminale ». Una risposta è data nel seguente.

TEOREMA III. — *Sia  $y(x)$  una soluzione saturata dell'equazione (I) definita per  $x_0 \leq x < X$ . I punti limiti di punti  $(x, y(x))$ , per  $x \rightarrow X$ , sono situati sulla frontiera di  $\Delta$ , oppure sono all'infinito (in  $\mathbb{R} \times E$ ).*

Ammettiamo per assurdo che esista un punto  $(X, Y) \in \Delta$ , tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y(x_n)) = (X, Y)$  (risulta  $X < +\infty$ ). Si avrà anche  $(X, Y) \in \text{int } \Delta_m$ , essendo  $m$  sufficientemente grande. Può ammettersi che  $(x_n, y(x_n)) \in \Delta_m$ ,  $n = 1, 2, \dots$  e di più, che la successione  $\{x_n\}$  sia crescente. Infine, osserviamo che si può anche ammettere l'esistenza di alcuni valori  $t_n$ , tali che  $x_n < t_n < x_{n+1}$ ,  $(t_n, y(t_n)) \in \text{fr } \Delta_m$ ,  $(x, y(x)) \in \Delta_m$  per  $x_n \leq x \leq t_n$ . Nel caso contrario, avremmo  $(x, y(x)) \in \Delta_m$  per  $X - \delta \leq x < X$  e la soluzione  $y(x)$  sarebbe prolungabile. Essendo  $\|f(x, y)\| \leq M_2$  per  $(x, y) \in \Delta_m$ , risulta  $\|y(t_n) - y(x_n)\| \leq M_2(t_n - x_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Dunque

$$\|(t_n, y(t_n)) - (x_n, y(x_n))\| \leq (M_2 + 1)(t_n - x_n),$$

e quindi

$$(II) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, y(t_n)) = (X, Y).$$

L'uguaglianza (II) è impossibile perché  $(X, Y) \in \text{int } \Delta_m$  mentre  $(t_n, y(t_n)) \in \text{fr } \Delta_m$ ,  $n = 1, 2, \dots$

COROLLARIO. — *Sia  $E = \mathbb{R}^n$  e sia  $y(x)$  una soluzione saturata definita per  $x_0 \leq x < X$ . Per ogni  $\Delta_m$  si può trovare un numero  $\varepsilon_m > 0$ , tale che  $(x, y(x)) \in \Delta - \Delta_m$  per  $X - \varepsilon_m < x < X$ . Se l'affermazione non fosse esatta, esisterebbe in  $\Delta_m$  (il quale è un insieme compatto) un punto limite di punti  $(x, y(x))$ , per  $x \rightarrow X$ . Questa proprietà fu rilevata dal Mayrhofer <sup>(4)</sup>.*

Vale questa proprietà anche nel caso di un qualunque spazio di Banach?

I teoremi che vengono stabiliti, permettono la generalizzazione di molti altri risultati conosciuti nel caso  $E = \mathbb{R}^n$ .

Ecco, ad esempio, la generalizzazione di un recente risultato dovuto a R. Conti <sup>(5)</sup>:

TEOREMA IV. — *Sia  $\Delta = \{(x, y) ; x \in \mathbb{R}, y \in E, a < x < b\}$  ( $a$  e  $b$  essendo finiti o infiniti).*

(3) E. KAMKE, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig, p. 75 1930.

(4) K. MAYRHOFFER, *Über die Enden der Integralkurven*, « Monatsh. f. Math. u. Phys. », 47, p. 183 (1934).

(5) R. CONTI, *Sulla prolungabilità delle soluzioni ecc.*, « Boll. dell'U.M.I. », XI, p. 510 (1956).



Sia  $\omega(x, u)$  una funzione reale continua definita per  $a < x < b$ ,  $0 < u < +\infty$ .

Ammettiamo l'esistenza di una funzione  $V(x, y)$ , definita per  $(x, y) \in \Delta$ , con valori non negativi e tale che  $V \in \mathcal{C}_1$  <sup>(6)</sup>. Di più, valga la disuguaglianza

$$(12) \quad \delta V[(x, y); (1, f)] \leq \omega(x, V), (x, y) \in \Delta, \quad V > 0,$$

essendo  $\delta$  il differenziale nel senso di Fréchet, e sia

$$(13) \quad \lim_{\|y\| \rightarrow \infty} V(x, y) = +\infty,$$

uniformemente rispetto a  $x$  in ogni  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ .

Allora, ogni soluzione dell'equazione (1), soddisfacente la condizione (2), è definita nell'intervallo  $x_0 \leq x < X$  nel quale è definito l'integrale massimale dell'equazione  $u' = \omega(x, u)$ , uscente dal punto  $(x_0, u_0)$ ,  $u_0 = V(x_0, y_0) > 0$ .

Nel caso particolare che  $E$  sia lo spazio hilbertiano, si ottiene il noto criterio di Wintner, essendo  $\omega(x, u) = h(u)$ ,  $V(x, y) = \|y\|$ , con

$$\int \frac{du}{h(u)} = +\infty.$$

**Statistica matematica.** — *Su una proprietà di un sistema di due variabili casuali seguenti la legge di Poisson, degli eventi rari.*  
Nota di GIUSEPPE OTTAVIANI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio F. P. CANTELLI.

1. In questa Nota mi occupo della ricerca di quei sistemi di due variabili casuali  $X, Y$  tali che: *a)* la prima segua la legge di Poisson, caratterizzata da un dato valore medio  $m$ ; *b)* la seconda dipenda dalla prima in modo tale che, se in una prova la  $X$  assume il valore  $x$  ( $= 0, 1, 2, \dots$ ), la  $Y$  segua la legge di Poisson con valore medio  $m_x$ ; *c)* la somma delle due variabili segua la legge di Poisson.

Il problema considerato è analogo a quello introdotto dal Cantelli, relativo al caso di variabili casuali seguenti la legge di Gauss, che dà luogo a una equazione integrale studiata in diversi lavori <sup>(1)</sup> e non ancora risolta.

Ritengo che il caso della legge di Poisson non sia stato ancora esaminato; dimostro, in modo assai semplice, che un tale sistema di due variabili ca-

(6) J. L. MASSERA, « Annals of Math. », 64, f. I, p. 182 (1956).

(\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) Cfr. F. P. CANTELLI, *Sullo schema lexiano della dispersione ipernormale*, « Memorie dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Roma 1918; *Su di una equazione integrale della statistica matematica*, « Atti della XIII Riunione della Società di Economia, Demografia e Statistica », Roma 1952; G. SANSONE, *Su di una equazione integrale di F. P. Cantelli suggerita da un problema di statistica matematica*, « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari », Roma 1952; e i lavori ivi citati.

suali seguenti la legge di Poisson esiste solamente se queste sono indipendenti tra loro, cioè solo se  $m_0 = m_x$  con  $x$  intero positivo qualsiasi.

2. Per dimostrare il teorema si consideri una variabile casuale  $X$ , seguente la legge di Poisson, con valore medio  $m$ ; pertanto la probabilità che  $X$  assuma il valore  $x$  è

$$(1) \quad \text{Prob } (X = x) = e^{-m} \frac{m^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

e lo scarto quadratico medio di  $X$  è dato da  $\sqrt{m}$ .

Si consideri un'altra variabile casuale  $Y$ , dipendente dalla  $X$  in modo tale che, se  $X$  assume il valore  $x$  ( $x = 0, 1, 2, \dots$ ) la  $Y$  segua la legge di Poisson con valore medio  $m_x$ ; perciò la probabilità che  $Y$  assuma il valore  $Y$ , nell'ipotesi che  $X$  assuma il valore  $x$ , è

$$(2) \quad \text{Prob } (Y = y | X = x) = e^{-m_x} \frac{m_x^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

e lo scarto quadratico medio di  $Y$  nell'ipotesi  $X = x$  è  $\sqrt{m_x}$ .

Si consideri la variabile casuale somma

$$Z = X + Y$$

e si supponga che essa segua la legge di Poisson, con valore medio  $M$ ; perciò la probabilità che  $Z$  assuma il valore  $z$  è

$$(3) \quad \text{Prob } (Z = z) = e^{-M} \frac{M^z}{z!}, \quad z = 0, 1, 2, \dots$$

Per dimostrare che le condizioni poste conducono necessariamente a

$$(4) \quad m_x = m_0 \quad \text{per } x = 1, 2, 3, \dots,$$

si consideri in primo luogo la relazione (evidente)

$$\text{Prob } (Z = 0) = \text{Prob } (X = 0) \cdot \text{Prob } (Y = 0 | X = 0).$$

Per le (1), (2), (3) essa diventa

$$e^{-M} = e^{-m} e^{-m_0}$$

da cui segue

$$(5) \quad M = m + m_0.$$

Si consideri in secondo luogo la relazione (evidente)

$$(6) \quad \begin{aligned} \text{Prob } (Z = 1) = & \text{Prob } (X = 0) \cdot \text{Prob } (Y = 1 | X = 0) + \\ & + \text{Prob } (X = 1) \cdot \text{Prob } (Y = 0 | X = 1). \end{aligned}$$

Per le (1), (2), (3) essa diventa

$$(7) \quad e^{-M} M = e^{-m} \cdot e^{-m_0} m_0 + e^{-m} m \cdot e^{-m_1}.$$

Considerando ora nel 2° membro della (7) l'esponente  $m_r$  come una variabile positiva, esso 2° membro risulta una funzione decrescente di  $m_r$ ; inoltre, a causa della (5) esso assume il medesimo valore del 1° membro se  $m_r = m_0$ . Pertanto la (7) è soddisfatta solo nel caso

$$(8) \quad m_r = m_0,$$

ciò che dimostra la (4) per il caso  $x = 1$ .

Dimostriamo ora che, se la (4) è vera per i casi  $x = 1, 2, \dots, r-1$ , essa è vera anche per  $x = r$ .

Si consideri allo scopo la relazione (evidente)

$$\text{Prob}(Z = r) = \sum_{s=0}^r \text{Prob}(X = s) \cdot \text{Prob}(Y = r - s \mid X = s);$$

essa, a causa delle (1), (2), (3), nonché della (4) supposta vera per i casi  $x = 1, 2, \dots, r-1$ , diventa

$$(9) \quad e^{-M} \frac{M^r}{r!} = \sum_{s=0}^{r-1} e^{-m} \frac{m^s}{s!} \cdot e^{-m_0} \frac{m_0^{r-s}}{(r-s)!} + e^{-m} \frac{m^r}{r!} \cdot e^{-m_r};$$

si tratta di dimostrare che  $m_r = m_0$ . A tale scopo, si consideri, nel 2° membro della (9),  $m_r$  come una variabile positiva; allora, esso 2° membro risulta una funzione decrescente di  $m_r$  la quale, a causa della (5) e per note proprietà assume il medesimo valore del 1° membro quando  $m_r = m_0$ . Ne segue che la (9) è soddisfatta solo nel caso che sia

$$m_r = m_0,$$

da cui risulta che, se la (4) è vera per  $x = 1, 2, \dots, r-1$ , essa è vera anche per  $x = r$ . Pertanto, il teorema enunciato, che consiste nella validità della (4) per  $x = 1, 2, \dots$ , risulta dimostrato per via ricorrente.

**Geometria.** — *Osservazioni sulle strutture fibrato analitiche sopra una varietà kähleriana compatta.* Nota di EDOARDO VESENTINI, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

In un recente lavoro [6] <sup>(1)</sup> K. Kodaira, sviluppando un metodo di geometria differenziale di S. Bochner, ha stabilito alcune proprietà delle strutture fibrato analitiche di rette complesse,  $F$ , sopra una varietà kähleriana compatta,  $V$ , di dimensione (complessa)  $n > 0$ . Tali proprietà — successivamente generalizzate da Y. Akizuki e S. Nakano in [1] — concernono l'annul-

(\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) I numeri in parentesi quadra rinviano alla Bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

larsi di alcuni gruppi di coomologia di  $V$  a coefficienti nel *mucchio* <sup>(2)</sup>  $\Omega^b(F)$  dei germi delle  $p$ -forme olomorfe a coefficienti in  $F$ , in relazione all'esistenza nella classe caratteristica  $c(F) \in H^2(V, Z)$  di  $F$  di una forma hermitiana definita (positiva o negativa).

In questa Nota svilupperemo alcune osservazioni sulle strutture  $F$ , le classi caratteristiche delle quali contengono delle forme hermitiane *semidefinite* (positive o negative). Appartengono a tale tipo le strutture  $F$  che si ottengono sopra una varietà kähleriana compatta  $V$  dotata di una rappresentazione olomorfa  $\pi: V \rightarrow B$  sopra una varietà kähleriana compatta  $B$  di dimensione (complessa)  $b < n$ , qualora si consideri l'immagine inversa  $F = \pi^* \tilde{F}$  di una struttura fibrata analitica di rette complesse  $\tilde{F}$  di  $B$ , la cui classe caratteristica  $c(\tilde{F}) \in H^2(B, Z)$  contenga una forma hermitiana definita (positiva o negativa).

In un lavoro successivo mostreremo come, dalle osservazioni generali della presente Nota, discendano alcune *estensioni* – alle varietà kähleriane compatte  $V$  dotate di una proiezione olomorfa  $\pi: V \rightarrow B$  sopra una curva algebrica  $B$  di genere positivo – di classici risultati di Enriques e Castelnuovo sulle superficie algebriche contenenti un fascio irrazionale di curve.

1. Sia data sopra la varietà kähleriana compatta  $V$ , di dimensione complessa  $n > 0$ , una struttura fibrata analitica di rette complesse,  $F$ , avente come fibra la retta complessa  $C$  e come gruppo di struttura il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi. Sia  $F \rightarrow V$  la proiezione di  $F$  su  $V$ ; come è noto, fissato un ricoprimento finito  $\{U_j\}$  di  $V$  mediante insiemi aperti, ciascuno,  $U_j$ , dei quali sia uniformizzato da un sistema  $z_j^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) di coordinate locali complesse compatibili con la struttura complessa fissata in  $V$ , e tale inoltre che la restrizione  $F|U_j$  di  $F$  a  $U_j$  sia topologicamente equivalente al prodotto diretto  $C \times U_j$ , la struttura  $F$  può essere definita mediante un sistema  $\{f_{jk}\}$  di *funzioni di transizione*  $f_{jk} = f_{jk}(z)$  olomorfe e non nulle in  $U_j \cap U_k$ , di guisa che il punto  $\xi_j \times z \in C \times U_j$  ( $\xi_j \in C, z \in U_j$ ) coincida con il punto  $\xi_k \times z \in C \times U_k$  se, e soltanto se,

$$\xi_j = \xi_k f_{jk}.$$

Sia  $c(F) \in H^2(V, Z)$  la classe caratteristica di  $F$  ([4], pp. 60–65), e sia  $c_R(F) \in H^2(V, R)$  l'immagine reale di  $c(F)$  nell'omomorfismo  $H^2(V, Z) \rightarrow H^2(V, R)$  associato all'immersione  $Z \rightarrow R$  dell'anello  $Z$  degli interi relativi nel campo  $R$  dei numeri reali.

Consideriamo la struttura analitica reale – avente per fibra la semi-retta reale positiva e per gruppo di struttura il gruppo moltiplicativo dei numeri reali – definita, in relazione al ricoprimento  $\{U_j\}$ , dalle funzioni di transizione

$$|f_{jk}|^2 = f_{jk} \overline{f_{jk}}$$

(2) Con il termine *mucchio* abbiamo tradotto la locuzione *faisceau* o *stack*. Per la nomenclatura e le proposizioni relative ai mucchi rinviando alla Monografia [4]; per le nozioni sulle varietà complesse, ecc., cfr. ad esempio [7].



(ove  $\overline{f_{jk}}$  denota il complesso coniugato di  $f_{jk}$ ). Com'è noto, è possibile costruire per tale struttura una sezione non banale, rappresentata in ogni  $U_j$  da una funzione  $a_j$  di classe  $C^\infty$  e positiva in ogni punto di  $U_j$ , tale che in  $U_j \cap U_k$  risulti

$$a_j = a_k \cdot f_{jk} \overline{f_{jk}}.$$

K. Kodaira ha dimostrato ([6], p. 1271) che a  $c_R(F)$  appartiene (nel senso del teorema di De Rham) la forma differenziale reale chiusa, di classe  $C^\infty$  e di tipo  $(1, 1)$ ,  $\gamma = \{\gamma_j\}$ , rappresentata localmente in ogni  $U_j$  dalla

$$(1) \quad \gamma_j = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log a_j = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} X_{j\alpha\beta^*} dz_j^\alpha \wedge \overline{dz_j^\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n),$$

ove

$$X_{j\alpha\beta^*} = \frac{\partial^2 \log a_j}{\partial z_j^\alpha \partial \overline{z_j^\beta}}.$$

Essendo

$$ds^2 = 2g_{\alpha\beta^*} dz^\alpha \overline{dz^\beta}$$

la metrica kähleriana fissata in  $V$ , non è restrittivo supporre che *nel punto*  $z \in U_j$  - che assumeremo come origine delle coordinate locali  $z_j^\alpha$  - la forma (1) sia ridotta al tipo

$$(2) \quad \gamma_j = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{\alpha} X_{j\alpha} dz_j^\alpha \wedge \overline{dz_j^\alpha}$$

(con gli  $X_{j\alpha}$  reali), e che in  $z$  sia

$$(3) \quad g_{\alpha\beta^*} = \delta_{\alpha\beta^*} \quad , \quad (4) \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta^*}}{\partial z_j^\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta^*}}{\partial \overline{z_j^\gamma}} = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n) \quad (3).$$

Posto

$$\omega = \sqrt{-1} g_{\alpha\beta^*} dz^\alpha \wedge \overline{dz^\beta},$$

e fissata una qualsiasi forma esterna  $\varphi = \{\varphi_j\}$  di tipo  $(p, q)$  e classe  $C^\infty$ ,

(3) Infatti, essendo  $z_j''^\alpha$  un qualsiasi sistema di coordinate locali in  $U_j$ , è possibile eseguire una trasformazione lineare invertibile a coefficienti costanti

$$z_j''^\alpha = a_{\beta}^{\alpha} z_j'^{\beta}$$

in guisa tale che nel punto  $z$  le matrici hermitiane costituite dai coefficienti  $g_{\alpha\beta^*}$  e dagli  $X_{j\alpha\beta^*}$  si riducano rispettivamente alla matrice unità e ad una matrice diagonale reale (cfr. ad esempio [8], p. 134). Denotando con  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  i simboli di Christoffel relativi alle coordinate  $z_j'^{\beta}$  calcolati nel punto  $z$ , basta eseguire la trasformazione di coordinate

$$z_j'^{\alpha} = z_j^{\alpha} - \sum_{\beta, \gamma} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} z_j'^{\beta} z_j'^{\gamma}$$

perché anche le (3) siano soddisfatte (cfr. ad esempio [5], pp. 508-509).

rappresentata localmente in  $U_j$  dalla

$$\varphi_j = \frac{1}{p!q!} \varphi_{j\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1^* \dots \beta_q^*} dz_j^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge \overline{dz_j^{\beta_1}} \wedge \dots \wedge \overline{dz_j^{\beta_q}}$$

$$(1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \leq n),$$

in virtù della (3) e (4) le espressioni locali degli operatori

$$\Lambda \varphi = (-1)^{p+q-1} * (\omega \wedge * \varphi) \quad \text{e} \quad i(\gamma) \varphi = (-1)^{p+q} * (\gamma \wedge * \varphi)$$

sono offerte nel punto  $z$  rispettivamente dalle

$$\Lambda \varphi = \sqrt{-1} (-1)^{p-1} \sum_{\substack{\alpha_1 < \dots < \alpha_{p-1} \\ \beta_1 < \dots < \beta_{q-1}}}^{1 \dots n} \sum_{\alpha}^n \varphi_{j\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \alpha^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^*} dz_j^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz_j^{\alpha_{p-1}} \wedge$$

$$\wedge \overline{dz_j^{\beta_1}} \wedge \dots \wedge \overline{dz_j^{\beta_{q-1}}} \quad (4),$$

$$i(\gamma) \varphi = \sqrt{-1} (-1)^p \sum_{\substack{\alpha_1 < \dots < \alpha_{p-1} \\ \beta_1 < \dots < \beta_{q-1}}}^{1 \dots n} \sum_{\alpha}^n X_{j\alpha} \varphi_{j\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \alpha^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^*} dz_j^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz_j^{\alpha_{p-1}} \wedge$$

$$\wedge \overline{dz_j^{\beta_1}} \wedge \dots \wedge \overline{dz_j^{\beta_{q-1}}},$$

sicché nel punto  $z$  risulta

$$(5) \quad \Lambda \varphi \wedge * i(\gamma) \varphi =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1 < \dots < \alpha_{p-1} \\ \beta_1 < \dots < \beta_{q-1}}}^{1 \dots n} \left( \sum_{\alpha}^n \varphi_{j\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \alpha^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^*} \right) \left( \sum_{\beta}^n X_{j\beta} \varphi_{j\beta\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \beta^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^*} \right) dV,$$

ove  $dV$  rappresenta l'elemento di volume associato alla metrica fissata in  $V$ .

2. Y. Akizuki e S. Nakano hanno provato ([1], disuguaglianza (8), p. 268) che, se  $\varphi$  è una forma armonica a coefficienti in  $F^{(5)}$ , risulta

$$(6) \quad \int \frac{1}{a_j} \Lambda \varphi \wedge * i(\gamma) \varphi \leq 0.$$

Da questa disuguaglianza discende il

TEOREMA 2.1. — Se la forma hermitiana  $[\gamma] = \{[\gamma_j]\}$  rappresentata localmente dalla

$$(7) \quad [\gamma_j] = X_{j\alpha\beta^*} dz_j^{\alpha} \overline{dz_j^{\beta}}$$

(che diremo associata alla forma esterna reale  $\gamma$ ) è semidefinita positiva

(4) Cfr. ad esempio [3], p. 95.

(5) Per le definizioni relative alle forme armoniche a coefficienti in  $F$ , cfr. [6], p. 1269, [4], p. 118. Tutte le forme differenziali considerate nel presente lavoro saranno tacitamente supposte di classe  $C^\infty$ .

in ogni punto di  $V$ , per ogni forma armonica  $\varphi$  di tipo  $(p, n)$  (con  $p > 0$ ) o  $(n, q)$  (con  $q > 0$ ), a coefficienti in  $F$ , risulta

$$(8) \quad \gamma \wedge * \varphi \equiv 0.$$

Infatti, qualora il rango della (7) nel punto  $z \in U_j$  sia  $r \geq 1$ , fissando le coordinate in  $U_j$  nel modo indicato nel n. 1, la (2) può scriversi nel punto  $z$  nella forma

$$(9) \quad \gamma_j = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{\alpha}^r X_{j\alpha} dz_{\alpha}^{\alpha} \wedge \overline{dz_j^{\alpha}},$$

con

$$(10) \quad X_{j\alpha} = X_{j\alpha}(z) > 0 \quad \text{per } \alpha = 1, \dots, r,$$

mentre la (5) diviene, nel punto  $z$ ,

$$(11) \quad \Lambda \varphi \wedge * \overline{i(\gamma)} \varphi = \\ = \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_{p-1}}^{1 \dots n} \sum_{\alpha}^r X_{j\alpha} \varphi_{j\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} 1^* \dots n^*} \overline{\varphi_{j\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} 1^* \dots n^*}} dV,$$

oppure

$$(12) \quad \Lambda \varphi \wedge * i(\overline{\gamma}) \varphi = \\ = \sum_{\beta_1 < \dots < \beta_{q-1}}^{1 \dots n} \sum_{\alpha}^r X_{j\alpha} \varphi_{j1 \dots n \alpha^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^*} \overline{\varphi_{j1 \dots n \alpha^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^*}} dV,$$

secondoché,  $\varphi$  abbia tipo, rispettivamente,  $(p, n)$ , oppure  $(n, q)$ . In virtù delle (10) i primi membri delle (11) e (12) sono non negativi, e si annullano in  $z$  se, e soltanto se, risulta, rispettivamente

$$(13) \quad \varphi_{j\alpha\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} 1^* \dots n^*} = 0 \quad \text{per } \alpha = 1, \dots, r \quad \text{e } 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_{p-1} \leq n,$$

oppure

$$(14) \quad \varphi_{j1 \dots n \alpha^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^*} = 0 \quad \text{per } \alpha = 1, \dots, r \quad \text{e } 1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_{q-1} \leq n.$$

Poiché le (13) e (14) costituiscono, a meno di fattori non nulli, i coefficienti degli sviluppi di (8) nel punto  $z$ , si ha senz'altro l'asserto.

OSSERVAZIONE. - Alla conclusione espressa dal Teor. 2.1 nel caso  $(n, q)$  ( $q > 0$ ) si giunge anche poggiando, anziché sulla (6), sopra una diseuguaglianza integrale di K. Kodaira ([6], formula (10), pp. 1271 e 1272) espressa, per ogni forma armonica  $\varphi$  di tipo  $(n, q)$ , a coefficienti in  $F$ , dalla

$$(15) \quad \int_V \frac{g}{a_j} X_{j\alpha^*}^{\beta^*} \varphi_{j1 \dots n \beta^* \alpha_1^* \dots \alpha_{q-1}^*} \overline{\varphi_j^{1 \dots n \alpha^* \alpha_1^* \dots \alpha_{q-1}^*}} dV \leq 0$$

ove  $g = \det(g_{\alpha\beta^*})$  e

$$X_{j\alpha^*}^{\beta^*} = g^{\lambda\beta^*} X_{j\lambda\alpha^*} \quad (\lambda = 1, \dots, n),$$

$$\overline{\varphi_j^{1 \dots n \alpha^* \alpha_1^* \dots \alpha_{q-1}^*}} = \frac{1}{g} g^{\beta\alpha^*} g^{\beta_1 \alpha_1^*} \dots g^{\beta_{q-1} \alpha_{q-1}^*} \overline{\varphi_{j1 \dots n \beta^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^*}}.$$

Infatti, scegliendo le coordinate in  $U_j$  nel modo indicato nel n. 1, si ha nel punto  $z$

$$\begin{aligned} & \frac{g}{a_j} X_{j\alpha}^{\beta^*} \varphi_{j_1 \dots j_n} \alpha_1^* \dots \alpha_{q-1}^* \overline{\varphi_{j_1 \dots j_n}^{\alpha_1^* \dots \alpha_{q-1}^*}} = \\ & = \frac{1}{a_j} \sum_{\beta_1 \dots \beta_{q-1}}^{1 \dots n} \sum_{\alpha}^r X_{j\alpha} \varphi_{j_1 \dots j_n} \alpha^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^* \overline{\varphi_{j_1 \dots j_n}^{\alpha^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^*}}, \end{aligned}$$

onde, nell'ipotesi del Teor. 2.1, avuto riguardo alle (10) e (15), conseguono le (14).

3. L'estensione del risultato espresso dal Teor. 2.1 ad altre classi di forme  $\varphi$  di tipo  $(p, q)$  con  $p < n$  e  $q < n$ , sulla linea delle considerazioni precedenti, non si presenta molto agevole. Qui ci limiteremo a considerare, a titolo d'esempio, un caso particolare.

Qualora il rango di (7) nel punto  $z \in U_j$  sia eguale ad uno, fissando le coordinate in  $U_j$  nel modo indicato nel n. 1, potremo scrivere nel punto  $z$

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} X_{j_1} dz_j^1 \wedge \overline{dz_j^1} \quad (X_{j_1}(z) \neq 0).$$

La condizione

$$\gamma \wedge \varphi = 0 \quad \text{in } z$$

implica che in  $z$  sia

$$\varphi_{j_1 \alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} \alpha_1^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^* = 0 \quad (p > 0, q > 0)$$

per:  $\alpha = 2, \dots, n$ ;  $1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{p-1} \leq n$ ;  $1 < \beta_1 < \dots < \beta_{q-1} \leq n$ .

Pertanto la (5) diviene in  $z$

$$\Lambda \varphi \wedge * \overline{i(\gamma)} \varphi = \sum_{\substack{\alpha_1 < \dots < \alpha_{p-1} \\ \beta_1 < \dots < \beta_{q-1}}} X_{j_1} \varphi_{j_1 \alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} \alpha_1^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^* \overline{\varphi_{j_1 \alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} \alpha_1^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^*} dV.$$

Se  $X_{j_1}(z) > 0$ , il secondo membro di quest'ultima relazione è non negativo, e si annulla se, e soltanto se, in  $z$  risulta

$$\begin{aligned} \varphi_{j_1 \alpha_1 \dots \alpha_{p-1}} \alpha_1^* \beta_1^* \dots \beta_{q-1}^* &= 0 \quad \text{per} \quad 1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{p-1} \leq n, \\ 1 < \beta_1 < \dots < \beta_{q-1} &\leq n. \end{aligned}$$

Dalla (6) di Akizuki e Nakano consegue pertanto il

TEOREMA 3.1. — Se la struttura analitica di rette complesse  $F$  contiene una forma reale chiusa  $\gamma$  la cui forma hermitiana associata sia semidefinita positiva e di rango uno in ogni punto di  $V$ , ogni forma armonica  $\varphi$  (non identicamente nulla) di tipo  $(p, q)$ , a coefficienti in  $F$ , per la quale risulti identicamente

$$\gamma \wedge \varphi \equiv 0,$$

soddisfa identicamente anche alla

$$\gamma \wedge * \varphi \equiv 0.$$



4. Data la forma armonica  $\varphi = \{\varphi_j\}$  di tipo  $(p, q)$  a coefficienti in  $F$ , le forme

$$\psi_j = \frac{1}{a_j} * \overline{\varphi_j}$$

costituiscono le rappresentazioni locali di una forma armonica  $\psi = \{\psi_j\}$  di tipo  $(n-p, n-q)$  a coefficienti nella struttura analitica di rette complesse  $F^{-1}$ , definita dal sistema di funzioni di transizione  $\{f_{jk}^{-1}\}$  ([6], p. 1269). Tenuto conto che, se  $\gamma \in c_R(F)$ ,

$$-\gamma \in -c_R(F) = c_R(F^{-1}),$$

dal Teor. 2.1 discende il

TEOREMA 4.1. - *Se la classe caratteristica  $c_R(F)$  della struttura analitica di rette complesse  $F$  contiene una forma reale chiusa  $\gamma$  la cui forma hermitiana associata sia semidefinita negativa in ogni punto di  $V$ , per ogni forma armonica  $\varphi$  di tipo  $(p, 0)$  o  $(0, p)$  ( $0 \leq p < n$ ) a coefficienti in  $F$  risulta identicamente*

$$\gamma \wedge \varphi \equiv 0.$$

Dal teor. 3.1. si ha il

TEOREMA 4.2. - *Se la classe caratteristica  $c_R(F)$  contiene una forma reale chiusa  $\gamma$  la cui forma hermitiana associata sia semidefinita negativa e di rango uno in ogni punto di  $V$ , per ogni forma armonica  $\varphi$  di tipo  $(p, q)$  a coefficienti in  $F$ , per la quale risulti identicamente*

$$\gamma \wedge * \varphi \equiv 0$$

si ha anche, identicamente,

$$\gamma \wedge \varphi \equiv 0.$$

5. In questo numero supporremo sempre che  $c_R(F)$  contenga una forma reale chiusa  $\gamma$ , la cui forma hermitiana associata sia semidefinita negativa e di rango  $r > 0$  in ogni punto di  $V$ , con l'eccezione al più di una sottovarietà complessa,  $P$  (eventualmente singolare), di  $V$ , di dimensione complessa  $< n$  (ove tale forma hermitiana semidefinita negativa abbia rango  $< r$ ).

Scegliendo le coordinate in  $U_j$  nel modo indicato nel n. 1, dalla (9) si ha che, nelle ipotesi del Teor. 4.1, qualora il rango di  $[\gamma_j]$  nel punto  $z \in U_j$  sia  $r > 0$ , ogni forma armonica a coefficienti in  $F$ , di tipo  $(p, 0)$  o  $(0, p)$  ha una espressione locale, in  $z$ , del tipo

$$(I6) \quad \varphi_j = \frac{1}{p!} \varphi_{j_1 \dots j_r a_{r+1} \dots a_p} dz_j^{i_1} \wedge \dots \wedge dz_j^{i_r} \wedge dz_j^{a_{r+1}} \wedge \dots \wedge dz_j^{a_p},$$

oppure

$$(I7) \quad \varphi_j = \frac{1}{p!} \varphi_{j_1 \dots j_r a_{r+1} \dots a_p} \overline{dz_j^{i_1}} \wedge \dots \wedge \overline{dz_j^{i_r}} \wedge \overline{dz_j^{a_{r+1}}} \wedge \dots \wedge \overline{dz_j^{a_p}}.$$

Ne consegue il

TEOREMA 5.1. - *Ogni forma armonica non identicamente nulla a coefficienti in  $F$ , di tipo  $(p, 0)$  o  $(0, p)$  ha grado  $p \geq r$ .*

In altre parole, denotando con  $H^{p,q}(V, F)$  lo spazio vettoriale complesso delle forme armoniche di tipo  $(p, q)$  a coefficienti in  $F$ , nelle ipotesi del Teor. 5.1 risulta

$$H^{p,0}(V, F) = H^{0,p}(V, F) = 0 \quad \text{per } 0 < p \leq n.$$

Qualora sia  $r = n$  dal Teor. 5.1 discende il noto risultato <sup>(6)</sup> secondo il quale *le uniche forme armoniche non identicamente nulle a coefficienti in  $F$  di tipo  $(p, 0)$  o  $(0, p)$  si hanno soltanto per  $p = n$ .*

Sia  $M \subset V$  una varietà complessa compatta regolarmente immersa in  $V$ , tale che  $P \subset M$  avente una dimensione complessa  $m$  soddisfacente alle limitazioni  $r \leq m < n$ , e tale inoltre che la restrizione,  $\gamma|_M$ , di  $\gamma \in c_R(F)$  a  $M$ , abbia (una forma hermitiana associata semidefinita negativa di) rango  $< r$  in ogni punto di  $M$ . Rappresentata localmente  $M$  in  $U_j$  mediante  $n - m$  equazioni

$$f_j^s(z_j^\alpha) = 0 \quad (s = 1, \dots, n - m),$$

i primi membri delle quali siano funzioni delle  $z_j^\alpha$  olomorfe in  $U_j$ , tali che la matrice funzionale  $\left\| \frac{\partial f_j^s}{\partial z_j^\alpha} \right\|$  abbia rango massimo,  $n - m$ , in ogni punto di

$M \cap U_j$ , supponiamo che le coordinate locali  $z_j^\alpha$  in  $U_j$  siano fissate nel modo indicato nel n. 1, in guisa cioè che nel punto  $z \in (M - P \cap M) \cap U_j$  siano soddisfatte le (3), (4) e (9), con  $X_{j\beta} = X_{j\beta}(z) < 0$  ( $\beta = 1, \dots, r$ ).

Poiché per ipotesi la restrizione  $[\gamma_j]|_{M \cap U_j}$  ha rango  $< r$ ,  $z_j^1, \dots, z_j^r$  non possono essere assunte a far parte di un sistema di  $m$  coordinate complesse su  $M \cap U_j$  (rispetto alla struttura complessa indotta in  $M$  da quella di  $V$ ). Per conseguenza, nel punto  $z \in (M - P \cap M) \cap U_j$  il rango della matrice

$$\left\| \frac{\partial f_j^s}{\partial z_j^\alpha} \right\| \quad (s = 1, \dots, n - m; \alpha = r + 1, \dots, n),$$

è minore di  $n - m$ , sicché è possibile determinare  $r$  costanti complesse,  $b_1, b_2, \dots, b_r$ , non tutte nulle, tali che nel punto  $z$  risulti

$$b_1 dz_j^1 + b_2 dz_j^2 + \dots + b_r dz_j^r = 0,$$

per ogni sistema di  $dz_j^1, dz_j^2, \dots, dz_j^r$  soddisfacenti alle

$$\frac{\partial f_j^s}{\partial z_j^\alpha} dz_j^\alpha = 0 \quad (s = 1, \dots, n - m; \alpha = 1, \dots, n).$$

Dalle (16) e (17) si ha pertanto che le restrizioni a  $M$  delle forme  $\varphi$  armoniche a coefficienti in  $F$ , di tipo  $(p, 0)$  o  $(0, p)$ , si annullano in  $z$ . Tenuto conto che, a norma delle (16) o (17), ciò accade anche qualora sia  $r > m$ , risulta provato il

TEOREMA 5.2. — *Se la restrizione  $\gamma|_M$  di  $\gamma \in c_R(F)$  a  $M$  ha (una forma hermitiana associata semidefinita negativa di) rango  $< r$  in ogni punto di  $M$ ,*

(6) Esso rientra nel Teor. 1' di [1], p. 269; nel caso  $(0, p)$  tale risultato è espresso dal Teor. 2, p. 1272 di [6].

la restrizione a  $M$  di ogni forma armonica su  $V$  di tipo  $(p, 0)$  o  $(0, p)$ , a coefficienti in  $F$ , è identicamente nulla.

Supponiamo in particolare che  $M$  sia un'ipersuperficie complessa (non singolare) regolarmente immersa in  $V$ , e - denotando con  $\{M\}$  la struttura analitica di rette complesse determinata da  $M$  in  $V$  ([4], pp. 111-112) e con  $F_M$  la restrizione di  $F$  a  $M$  - consideriamo le successioni esatte di coomologia

$$(18) \quad \cdots \rightarrow H^{q-1}(M, \Omega^0(F_M)) \rightarrow H^q(V, \Omega^0(F \otimes [M]^{-1})) \rightarrow H^q(V, \Omega^0(F)) \rightarrow H^q(M, \Omega^0(F_M)) \rightarrow \cdots$$

$$(19) \quad \cdots \rightarrow H^{q-1}(M, \Omega^p(F_M)) \rightarrow H^q(V, \Omega'^{p'}(F)) \rightarrow H^q(V, \Omega^p(F)) \rightarrow H^q(M, \Omega^p(F_M)) \rightarrow \cdots$$

associate <sup>(7)</sup>, rispettivamente, per  $p = 0$  e per  $p > 0$ , alla successione esatta di mucchi:

$$0 \rightarrow \Omega'^{p'}(F) \rightarrow \Omega^p(F) \rightarrow \Omega^p(F_M) \rightarrow 0.$$

Qualora  $M$  ed  $F$  soddisfino alle ipotesi precedenti, a norma del Teor. 5.2, dalle (18) e (19), si traggono, rispettivamente le successioni esatte

$$0 \rightarrow H^{q-1}(M, \Omega^0(F_M)) \rightarrow H^q(V, \Omega^0(F \otimes \{M\}^{-1})) \rightarrow H^q(V, \Omega^0(F)) \rightarrow 0, \quad (q = 1, \dots, n)$$

e l'isomorfismo

$$H^0(V, \Omega'^{p'}(F)) \simeq H^0(V, \Omega^p(F)).$$

6. Una situazione del tipo indicato nel n. 5 si presenta ad esempio qualora la varietà  $V$  possieda una rappresentazione  $\pi: V \rightarrow B$  sopra una varietà kähleriana compatta  $B$ , di dimensione complessa  $b < n$ , la quale sia olomorfa, ossia tale che per ogni punto  $\xi_0 \in B$  e per ogni punto  $z_0 \in \pi^{-1}(\xi_0)$  sia possibile determinare due intorni  $\mathfrak{M}_0$  e  $U_0$ , di  $\xi_0$  in  $B$  e di  $z_0$  in  $V$ , con  $U_0 \subseteq \pi^{-1}(\mathfrak{M}_0)$ , uniformizzati da due sistemi di coordinate complesse  $\xi^1, \dots, \xi^b$ , e  $z^1, \dots, z^n$  (compatibili con le strutture complesse di  $B$  e di  $V$ ), in guisa che le coordinate  $\xi^1, \dots, \xi^b$  del punto  $\xi = \pi(z) \in \mathfrak{M}_0$ , immagine di un qualsiasi punto  $z \in U_0$  siano espresse da funzioni

$$\xi^\mu = g^\mu(z^\alpha) \quad (\mu = 1, \dots, b; \alpha = 1, \dots, n)$$

olomorfe in  $U_0$ . L'immagine inversa  $M_\xi = \pi^{-1}(\xi)$  di un qualsiasi punto  $\xi$  di  $B$ , è una sottovarietà complessa compatta di  $V$ , di dimensione  $\geq n - b$ . Noi supporremo che  $M_\xi$  sia una varietà complessa (non singolare), regolarmente immersa in  $V$ , di dimensione complessa  $m = n - b$ , ad eccezione al più delle immagini inverse dei punti di una sottovarietà complessa compatta  $LC B$  (eventualmente vuota) di dimensione  $< b$ . In altre parole supporremo che, per ogni  $\xi \in (B - L) \cap \mathfrak{M}_0$ , il rango della matrice

$$\left\| \frac{\partial g_j^\mu}{\partial z_j^\alpha} \right\|$$

sia massimo  $(= n - b)$  <sup>(8)</sup>.

(7) Cfr. ad esempio [1], p. 269; [4], pp. 127-129.

(8) La varietà  $V$  costituisce un sistema fibrato (*fibre system*) nel senso di S. T. Hu; cfr. [2], pp. 727-731.

Sia  $\tilde{F}$  una qualsiasi struttura analitica di rette complesse di  $B$ , e sia  $F = \pi^*(\tilde{F})$  la struttura analitica di rette complesse di  $V$ , immagine inversa di  $\tilde{F}$  <sup>(9)</sup>.

L'immagine inversa mediante  $\pi$  di una qualsiasi forma reale chiusa  $\tilde{\gamma} \in c_R(\tilde{F}) \in H^2(B, R)$  di tipo  $(1, 1)$ , è una forma  $\gamma = \pi^*\tilde{\gamma}$ , di tipo  $(1, 1)$ , la quale appartiene alla classe caratteristica reale di  $F$ , ossia

$$\gamma = \pi^*\tilde{\gamma} \in c_R(F).$$

Poiché ovviamente la restrizione  $\gamma|_{M_\xi}$  di  $\gamma$  a  $M_\xi = \pi^{-1}(\xi)$  ( $\xi \in B - L$ ) è identicamente nulla, mentre, se  $[\tilde{\gamma}]$  è definita negativa,  $[\gamma]$  è semidefinita negativa e soddisfa alle ipotesi poste nel primo capoverso del n. 5, dal Teor. 5.2 segue che

*Se  $c_R(\tilde{F}) \in H^2(B, R)$  contiene una forma esterna reale chiusa  $\tilde{\gamma}$  avente una forma hermitiana associata definita negativa in ogni punto di  $B$ , la restrizione ad ogni sottovarietà  $M_\xi = \pi^{-1}(\xi)$  ( $\xi \in B - L$ ) di una qualsiasi forma armonica su  $V$  di tipo  $(p, 0)$  o  $(0, p)$  a coefficienti in  $F = \pi^*F$  è identicamente nulla.*

Dal Teor. 5.1 si ha che

*Se  $c_R(\tilde{F}) \in H^2(B, R)$  contiene una forma esterna reale chiusa di tipo  $(1, 1)$ , la cui forma hermitiana associata sia definita negativa in ogni punto di  $B$ , ogni forma armonica di tipo  $(p, 0)$  o  $(0, p)$  a coefficienti in  $F = \pi^*(F)$  e non identicamente nulla su  $V$ , ha grado  $p \geq b$ ; in altre parole*

$$H^{p,0}(V, F) = H^{0,p}(V, F) = 0 \quad \text{per } 0 \leq p < b.$$

In una Nota successiva approfondiremo le considerazioni precedenti nel caso in cui  $B$  sia una curva algebrica di genere positivo, cioè nel caso in cui  $B$  contenga un fascio irrazionale di ipersuperficie.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] Y. AKIZUKI-S. NAKANO, *Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems*, «Proc. Japan Acad.», 30, 266-272 (1954).
- [2] W. L. CHOW, *On the fundamental group of an algebraic variety*, «Amer. Journal of Math.», 74, 726-736 (1952).
- [3] G. DE RHAM, -K. KODAIRA, *Harmonic integrals*, Mimeographed notes, Princeton, 1950.
- [4] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, «Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete», Neue Folge, Heft 9, Springer, Berlin, 1956.
- [5] W. V. D. HODGE, *Differential forms on a Kähler manifold*, «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 47, 504-517 (1951).
- [6] K. KODAIRA, *On a differential geometric method in the theory of analytic stacks*, «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 39, 1268-1273 (1953).
- [7] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, Vol. II, Roma D.O.C.E.T., 1956.
- [8] B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, II Teil, Zweite Aufl., Berlin, Springer, 1940.

(9) Qualora  $\tilde{F}$  sia definita - rispetto ad un ricoprimento aperto finito, sufficientemente sottile  $\{\mathcal{U}_j\}$  di  $B$ , ciascun elemento  $\mathcal{U}_j$  del quale sia uniformizzato dalle coordinate locali complesse  $\xi_j^\mu$  ( $\mu = 1, \dots, b$ ) - mediante un sistema di funzioni di transizione  $f_{jk} = \tilde{f}_{jk}(\xi_j^\mu)$ , olomorfe e non nulle in  $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$ ,  $F$  può essere definito, rispetto ad un conveniente ricoprimento aperto  $\{U_j\}$  di  $V$ , il quale sia un opportuno raffinamento del ricoprimento  $\{\pi^{-1}(\mathcal{U}_j)\}$ , dalle funzioni di transizione  $f_{jk} = \tilde{f}_{jk}(g_k^\mu(z_k^\alpha))$  olomorfe e non nulle in  $U_j \cap U_k$ .



**Geometria.** — *Sui  $q$ -archi di un piano lineare finito di caratteristica  $p = 2$ .* Nota di GIUSEPPE TALLINI, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

Sia  $S_{2,q}$  un piano lineare finito di caratteristica  $p = 2$ , e quindi di ordine  $q = 2^h$  (1). È noto che il massimo numero di punti a tre a tre non allineati di tale piano è  $q + 2$  ed un esempio di tale insieme è dato dai punti di una conica e dal suo nucleo (o punto di concorso delle tangenti) (2). Si dimostra poi, abbastanza facilmente, che ogni  $(q + 1)$ -arco (3) di  $S_{2,q}$  è incompleto, ossia che ad esso si può aggregare un punto in modo che l'insieme risultante sia un  $(q + 2)$ -arco (4).

Nella presente Nota ci proponiamo di dimostrare che anche ogni  $q$ -arco di  $S_{2,q}$  ( $q > 2$ ) è incompleto, nel senso che ai suoi punti se ne possono aggregare altri due in modo che l'insieme che ne risulta sia un  $(q + 2)$ -arco. Questo risultato è già stato ottenuto per tutt'altra via da B. Segre [4, n. 11] nel più semplice caso non banale  $q = 8$ ; esso viene qui stabilito con procedimenti analoghi a quelli impiegati da B. Segre [3] nello studio dei  $q$ -archi nei piani di caratteristica  $p \neq 2$ .

La Nota è divisa in due parti, la prima contenente alcune premesse di carattere proiettivo, mentre la seconda espone la dimostrazione della suindicata proposizione.

1. Consideriamo in un  $S_{2,q}$  ( $q = 2^h$ ,  $h > 1$ ) un triangolo  $P_1 P_2 P_3$  sui cui lati  $P_2 P_3$ ,  $P_3 P_1$ ,  $P_1 P_2$  rispettivamente scegliamo tre coppie non ordinate di punti  $A_1$  e  $B_1$ ,  $A_2$  e  $B_2$ ,  $A_3$  e  $B_3$ , distinti tra loro e dai vertici del triangolo. Introdotte in  $S_{2,q}$  coordinate omogenee  $(x_1, x_2, x_3)$  aventi quel triangolo come fondamentale, i sei punti  $A$  e  $B$  suddetti avranno coordinate del tipo:

$$(I) \quad A_1(0, a_1, 1), B_1(0, b_1, 1); A_2(1, 0, a_2), B_2(1, 0, b_2);$$

$$A_3(a_3, 1, 0), B_3(b_3, 1, 0); \quad \text{con } a_i \neq b_i, a_i b_i \neq 0.$$

(\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) Per le nozioni di piano lineare finito, e di ordine e caratteristica a questo relativi, cfr. per esempio B. SEGRE [2], § 17 (I numeri entro parentisi quadre si riferiscono alla bibliografia posta alla fine della presente Nota).

(2) B. SEGRE [5] ha poi dimostrato che questi non costituiscono i soli esempi di  $(q + 2)$ -archi piani (cfr. nota seguente), almeno se  $q$  è abbastanza elevato ( $q > 2^6$ , ed anche  $q = 2^5$ ).

(3) Definiscisi  $k$ -arco di un  $S_{2,q}$  un insieme di  $k$  punti di  $S_{2,q}$  di cui mai tre allineati. Un  $k$ -arco dicesi completo se ai suoi punti non si può aggiungere nessun altro punto in modo che l'insieme che ne risulti sia un  $(k + 1)$ -arco. Incompleto in caso contrario.

(4) Cfr. B. QVIST [1] e B. SEGRE [5].

Ci proponiamo di dimostrare che *condizione necessaria e sufficiente affinché i sei punti (1) stiano su una stessa conica (eventualmente riducibile) è che:*

$$(2) \quad a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 = 1.$$

*Dim.* — La conica per i punti  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3$  ha l'equazione:

$$(3) \quad (b_1 b_2 a_3 + 1)(a_1 a_2 a_3 + 1)x_1 x_2 + \\ + a_3(x_1 b_1 b_2 + x_2 + b_1 x_3)(x_1 a_1 a_2 + x_2 + a_1 x_3) = 0.$$

La condizione perché i sei punti (1) stiano su una stessa conica è dunque:

$$(b_1 b_2 a_3 + 1)(a_1 a_2 a_3 + 1)b_3 + a_3(b_1 b_2 b_3 + 1)(b_3 a_1 a_2 + 1) = 0,$$

ossia, eseguendo i calcoli:

$$(a_3 + b_3)(a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 + 1) = 0,$$

da cui la (2), in quanto  $a_3 \neq b_3$  e  $1 = -1$ .

Diremo brevemente che le tre coppie di punti (1) soddisfacenti alla (2) sono in *relazione*  $\theta$  <sup>(5)</sup> od anche che una di esse è in *relazione*  $\theta$  con le altre, e dualmente.

Dimostriamo ora la seguente proposizione:

*Con le notazioni precedenti, sia  $u$  una retta di  $S_{2,q}$  non passante né per  $P_1, P_2, P_3$  né per  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Se su  $u$  esiste una coppia di punti  $A, B$  in relazione  $\theta$  con le  $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3)$  prese a due a due, allora queste tre coppie di punti soddisfano esse stesse alla relazione  $\theta$  e la  $u$  risulta secante la conica passante per  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  nei due punti  $A, B$ .*

Assunta, come è lecito, l'equazione di  $u$  nella forma  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , dovrà intanto essere:

$$a_i \neq 1 \quad , \quad b_i \neq 1 \quad (i = 1, 2, 3);$$

denotiamo poi con  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  e  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  le coordinate dei punti  $A$  e  $B$ , supposti esistenti su  $u$ : queste dovranno essere tutte diverse da zero ed inoltre soddisfare le:

$$(4) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad , \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

Ragionando ora come in B. Segre [3], p. 367, terzo capoverso — in cui si opera in un corpo di caratteristica  $p \neq 2$ , ma le considerazioni ivi fatte sussistono anche nel caso  $p = 2$  — si ha che le condizioni perché  $(A, B)$  sia in relazione  $\theta$  con le coppie  $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3)$  prese a due a due, sono espresse da:

$$(5) \quad \begin{cases} a_1 b_1 (1 + a_2) (1 + b_2) \alpha_1 \beta_1 = (1 + a_1) (1 + b_1) \alpha_2 \beta_2 \\ a_2 b_2 (1 + a_3) (1 + b_3) \alpha_2 \beta_2 = (1 + a_2) (1 + b_2) \alpha_3 \beta_3 \\ a_3 b_3 (1 + a_1) (1 + b_1) \alpha_3 \beta_3 = (1 + a_3) (1 + b_3) \alpha_1 \beta_1. \end{cases}$$

(5) Questa nozione è stata introdotta, nel caso  $p \neq 2$ , da B. SEGRE in [3], p. 366.

Moltiplicando le tre precedenti relazioni tra loro, se ne deduce la (2); e ciò dimostra che le coppie  $(A_1, B_1)$ ,  $(A_2, B_2)$ ,  $(A_3, B_3)$  sono in relazione  $\theta$ .

Assunto poi, come è lecito,  $\alpha_3 = \beta_3 = 1$  e posto

$$k_1 = \frac{a_3 b_3 (1 + a_1) (1 + b_1)}{(1 + a_3) (1 + b_3)}, \quad k_2 = \frac{(1 + a_2) (1 + b_2)}{a_2 b_2 (1 + a_3) (1 + b_3)},$$

dalla terza e seconda delle (5) otteniamo:

$$(6) \quad \alpha_1 \beta_1 = k_1, \quad \alpha_2 \beta_2 = k_2.$$

D'altra parte dalle (4) si deducono le

$$\begin{aligned} \beta_2 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 &= \beta_2 \\ \alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 &= \alpha_1, \end{aligned}$$

che, sommate tra loro, danno:

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = \alpha_1 + \beta_2 = \alpha_1 + \beta_1 + 1 = \alpha_2 + \beta_2 + 1;$$

infine delle (6) si ricava:

$$(7) \quad \alpha_1 + \beta_1 = k_1 + k_2 + 1, \quad \alpha_2 + \beta_2 = k_1 + k_2 + 1, \quad \text{con } k_1 + k_2 + 1 \neq 0.$$

Dalle (6) e (7) si trae che  $\alpha_1, \beta_1$  e  $\alpha_2, \beta_2$  debbono verificare rispettivamente le due seguenti equazioni:

$$(8) \quad \begin{cases} x^2 + (k_1 + k_2 + 1)x + k_1 = 0 \\ y^2 + (k_1 + k_2 + 1)y + k_2 = 0. \end{cases}$$

Intersechiamo ora la conica (3) - che passa per i punti  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ , sussistendo, per quanto precedentemente detto, la (1) - con la retta  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ . Eliminando la  $x_2$  fra la  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  e la (3), e ponendo  $x = x_1/x_3$ , si ottiene proprio la prima delle (8); eliminando la  $x_1$  fra la  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  e la (3), e ponendo  $y = x_2/x_3$ , si ottiene proprio la seconda delle (8). Ciò dimostra che la retta  $u$  interseca la conica passante per  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  nei punti  $A, B$ .

2. Dato un  $q$ -arco di un  $S_{2,q}$  ( $q = 2^h, h > 1$ ), è noto <sup>(6)</sup> che da ogni suo punto escono esattamente due tangenti distinte ad esso. Siano allora  $P_1, P_2, P_3$  tre punti del  $q$ -arco; scelti come vertici di un riferimento proiettivo, le tre coppie di tangenti uscenti da essi avranno rispettivamente le equazioni:

$$(9) \quad x_2 = a_1 x_3, \quad x_2 = b_1 x_3; \quad x_3 = a_2 x_1, \quad x_3 = b_2 x_1; \quad x_1 = a_3 x_2, \quad x_1 = b_3 x_2;$$

(6) Cfr. B. SEGRE [3], p. 368, primi due capoversi.

dove  $a_i, b_i$  denotano elementi non nulli ed inoltre è  $a_i \neq b_i$ . Ragionando come in B. Segre [3], p. 369, primo e secondo capoverso – in cui si opera in un corpo di caratteristica  $p \neq 2$ , ma le considerazioni ivi fatte continuano a sussistere anche se  $p = 2$  – e osservando che attualmente è  $-1 = +1$ , si deduce che nelle (9) le  $a_i$  e  $b_i$  soddisfano alla relazione:

$$a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 = 1.$$

Ne segue, per la duale della prima proposizione del n. 1, che le tre coppie di tangenti per  $P_1, P_2, P_3$  sono in relazione  $\theta$  e quindi appartengono ad una stessa conica inviluppo (*eventualmente riducibile*). Data l'arbitrarietà di  $P_1, P_2, P_3$  nel  $q$ -arco, si ha che:

*Comunque si considerino tre punti di un  $q$ -arco di un  $S_{2,q}$  ( $q = 2^h, h > 1$ ), le tre coppie di tangenti uscenti da essi sono in relazione  $\theta$  e quindi appartengono ad una stessa conica inviluppo.*

Si consideri ora un qualunque punto  $P$  del  $q$ -arco, distinto da  $P_1, P_2, P_3$ ; la coppia di tangenti al  $q$ -arco uscenti da esso – in base alla precedente proposizione e alla duale della seconda proposizione del n. 1 – deve appartenere alla conica inviluppo determinata dalle tre coppie di tangenti al  $q$ -arco per  $P_1, P_2, P_3$ . Ne segue che tutte le  $2q$  tangenti al  $q$ -arco appartengono ad una stessa conica inviluppo, la quale allora deve necessariamente degenerare in due distinti fasci di rette, essendo il numero delle sue rette non inferiore a  $2q$  e quindi maggiore di  $q + 1$  (numero delle rette di una conica inviluppo non degenerare o doppiamente degenerare). I punti del  $q$ -arco, insieme ai due centri dei due fasci di rette che costituiscono la conica inviluppo di cui sopra, formano evidentemente un  $(q + 2)$ -arco. Si conclude dunque con il seguente:

**TEOREMA.** – *In un  $S_{2,q}$  ( $q = 2^h, h > 1$ ) ogni  $q$ -arco è incompleto, nel senso che ai suoi punti se ne possono aggregare altri due in modo che l'insieme risultante sia un  $(q + 2)$ -arco.*

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] B. QVIST, *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane*, «Ann. Ac. Sc. Fennicae», ser. A, I, n. 134 (1952).
- [2] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I (Zanichelli, Bologna, 1948).
- [3] B. SEGRE, *Curve razionali normali e  $k$ -archi negli spazi finiti*, «Ann. Mat.» (4), 39, pp. 357–379 (1955).
- [4] B. SEGRE, *Sulle geometrie proiettive finite*, Convegno su «Reticoli e geometrie finite» (Palermo, 1957).
- [5] B. SEGRE, *Sui  $k$ -archi nei piani finiti di caratteristica due*, «Revue de math. pures et appl.», t. 2 (1957).



**Geometria.** — *Réseaux et congruences d'ordre supérieur.* Nota di EMMANUEL ARGHIRIADE, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

1. La notion de réseau conjugué sur une surface  $S_2$  dans un espace projectif  $S_n$ , a été généralisée de bien de manières [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Une de ces généralisations est due à E. Bompiani [1], qui a créé la *théorie des doubles systèmes conjugués d'espèce  $\nu$* . B. Segre [2; p. 160] a établi ultérieurement deux propriétés importantes de ces systèmes, qui lui ont permis d'étendre à ceux-ci, la transformation de Laplace.

Un double système conjugué d'espèce  $p$ , est défini par une équation de la forme:

$$(1) \quad \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^1 a_{ij} x^{ij} = 0, \quad \left( x^{ij} = \frac{\partial^{i+j} x}{\partial u^i \partial v^j} \right).$$

Si les points  $x(u, v)$  d'une surface  $S_2$ , vérifient (1) nous dirons que les courbes  $u, v$  forment sur  $S_2$  un réseau Bompiani-Segre, on brièvement un *réseau BS*.

Nous nous proposons d'étudier une classe d'équations plus générale:

$$(2) \quad \boxed{L \equiv \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_{ij} x^{ij}} , \quad (a_{pq} \neq 0)$$

et dans cette note nous indiquerons seulement les résultats, sans démonstration; pour les démonstrations et les calculs nous renvoyons à notre article en cours de publication [7]. L'équation (2) est une *équation généralisée de Laplace d'ordre  $(p, q)$* ; elle définit un *réseau généralisé d'ordre  $(p, q)$* .

Avec les points  $x^{ij}$  qui figurent dans (2), on forme la matrice

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} x^{00} & x^{01} & \dots & x^{0q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{p-1,0} & x^{p-1,1} & \dots & x^{p-1,q} \\ x^{p,0} & x^{p,1} & \dots & x^{p,q} \end{pmatrix} :$$

ces points  $x^{ij}$  déterminent un espace linéaire  $\Sigma_0 = S_{pq+p+q-1}$ , qui est l'*espace laplacien fondamental*.

De  $\Sigma_0$  on déduit, en utilisant un procédé déjà employé par C. Segre [8, pag. 87-90], la suite  $(\Sigma^n)$  des *espaces laplaciens pris dans le sens  $u$* :

$$(3) \quad (\Sigma_0, \Sigma_1^u, \dots, \Sigma_{p+1}^u), \quad (\Sigma_{p+2}^u, \Sigma_{p+3}^u, \dots, \Sigma_r^u)$$

chaque espace étant l'espace singulier de l'espace précédent dans le sens  $u$ : ainsi  $\Sigma_{i+1}^u$  est la limite de l'intersection de deux  $\Sigma_i^u$  correspondant à deux points  $x$  et  $x'$  de la courbe  $u$ , quand  $x' \rightarrow x$ .

(\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

Les espaces de la première parenthèse sont les *espaces laplaciens principaux*; ces espaces existent toujours et leurs dimensions décroissent régulièrement de  $q$  unités. Le dernier espace principal  $\Sigma_{p+1}^u = S_{p-1}$  est donné par:

$$(4) \quad y = \omega_1 z_{p+1,1} + \omega_2 z_{p+1,2} + \dots + \omega_p z_{p+1,p}$$

$y$  étant un point quelconque de  $\Sigma_{p+1}^u$ . Les quantités  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) sont des fonctions arbitraires de  $(u, v)$  et  $z_{\alpha\beta}$  est donné par

$$z_{\alpha\beta} = x^{p-\beta,q} + \sum_{j=\beta}^{\alpha-1} \sum_{i=0}^{q-1} A_{ji}^{\beta} x^{p-j,i}, \quad (\alpha > \beta)$$

$A_{ji}^{\beta}$  étant des fonctions des coefficients  $a_{ij}$  de (1) et de leurs dérivées.

Les espaces qui se trouvent dans la seconde parenthèse (3), sont les *espaces laplaciens secondaires*; un point de  $\Sigma_{p+\sigma}^u$  est donné par (4), où les fonctions  $\omega_i$  vérifient les *équations de dimension de  $\Sigma_{p+\sigma}^u$* :

$$(5) \quad A_{p+\alpha,i}^1 \omega_1 + A_{p+\alpha,i}^2 \omega_2 + \dots + A_{p+\alpha,i}^p \omega_p = 0$$

$$(i = 0, 1, \dots, q-1; \quad \alpha = 1, 2, \dots, \sigma-1);$$

si le rang du système (5) est  $r$ , alors  $\Sigma_{p+\sigma}^u = S_{p-r-1}$ ; l'espace  $\Sigma_{p+\sigma}^u$  n'existe que si  $p \geq r+1$ .

Pour un réseau BS d'ordre  $(p, 1)$  la suite (3) se compose d'espaces dont les dimensions décroissent régulièrement d'une unité; le dernier espace laplacien est le transformé de Laplace  $x_1$ .

Par analogie nous appellerons *réseau S dans le sens u*, ou *réseau  $S_u$* , un réseau d'ordre  $(p, q)$  pour lequel les espaces secondaires ont des dimensions qui décroissent régulièrement d'une unité; on arrive ainsi à un *dernier espace laplacien* se réduisant à un point  $x_1 = \Sigma_{2p}^u$ . La condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau d'ordre  $(p, q)$  soit un réseau  $S_u$ , est que les équations de dimension de l'espace  $\Sigma_{2p}^u$ , aient le rang  $p-1$ .

Une classe particulière de réseaux.  $S_u$ , est formée par les *réseaux  $S_u^o$* , qui sont définis par

$$\sum_{i=0}^p a_{i0} x^{i0} + \sum_{i=0}^p a_{iq} x^{iq} = 0, \quad (a_{pq} \neq 0)$$

qui représentent une généralisation immédiate de (1). Les réseaux BS d'ordre  $(p, 1)$  ou  $(1, q)$  sont des réseaux S dans les deux sens.

Le dernier espace laplacien  $x_1 = \Sigma_{2p}^u$  d'un réseau  $S_u$ , vérifie les relations:

$$(6) \quad x_1^{sr} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^r b_{ijsr} z_{pi}^{oj} + \sum_{i=0}^{q+r} c_{isr} x^{oi}$$

$$(s = 0, 1, \dots, p; \quad r = 0, 1, \dots, q);$$

avec les coefficients des quantités  $z_{pi}^{oi}$  et  $x^{oi}$  qui figurent dans les seconds membres de (6), à l'exclusion de l'équation qui donne  $x_1^{pq}$ , on forme un déterminant  $\Delta$ ; si  $\Delta \neq 0$ , le réseau  $(x)$  est *non particularisé*.

Cela étant, un réseau  $S_u$ , d'ordre  $(p, q)$ , non particularisé et admettant l'équation de Laplace  $L = 0$ , jouit des propriétés suivantes:

le dernier espace laplacien  $x_i = \Sigma_{2p}^u$  du réseau  $(x)$  vérifie une équation de Laplace  $\bar{L} = 0$ , d'ordre  $(p, q)$ ;

le point  $x_i$  décrit un réseau  $S_v$ , non particularisé et le dernier espace laplacien du réseau  $(x_i)$  est précisément le point  $x$ ;

l'intégration des équations  $L = 0$  et  $\bar{L} = 0$  sont deux problèmes équivalents.

Donc  $x_i$  est un transformé de Laplace du réseau  $(x)$  dans le sens  $u$  et, réciproquement, le point  $x$  est un transformé de Laplace du réseau  $(x_i)$  dans le sens  $v$ . Pour un réseau  $S_u$  d'ordre  $(p, q)$  la suite de Laplace dans le sens  $u$ , se termine en général avec  $x_i$ . Un réseau  $S_u^o$  admet toujours un transformé de Laplace dans le sens  $u$ .

Si  $\Delta \neq 0$ , le réseau  $(x)$  est *particularisé* jusqu'à un certain ordre  $\mu < q$ , et jouit des propriétés suivantes:

le dernier espace laplacien  $x_i = \Sigma_{2p}^u$  du réseau  $(x)$  décrit un réseau  $S_v$  d'ordre  $(p, \mu)$ , non particularisé;

le point  $x_i$  vérifie une équation de Laplace d'ordre  $(p, \mu)$ ,  $L^* = 0$ , et l'intégration de l'équation  $L = 0$  se réduit à l'intégration successive de l'équation  $L^* = 0$ , et d'une équation linéaire, non homogène, à dérivées ordinaires d'ordre  $q - \mu$ .

2. Les points  $x$  et  $x_i$  d'un réseau  $S_u$ , non particularisé, vérifient le système:

$$(7) \quad \begin{cases} x^{oq} = \sum_{i=0}^{q-1} a_i x^{oi} + \sum_{i=0}^{p-1} b_i x_i^{io} \\ x_i^{po} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i x_i^{io} + \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i x^{oi} \end{cases}$$

qui est une généralisation du système:

$$(8) \quad x_v = ax + by, \quad y_u = \alpha x + \beta y$$

définissant une congruence habituelle.

Étant donnés deux points  $x(u, v)$  et  $x_i(u, v)$  vérifiant (7), nous dirons que la droite  $xx_i$  décrit une *congruence généralisée d'ordre  $(p, q)$* , dont les points  $x$  et  $x_i$  en sont les foyers.

En dérivant la première équation (7) par rapport à  $u$ , et en tenant compte de la seconde, nous obtenons:

$$(9) \quad \lambda_i = x^{iq} + \sum_{r=0}^i \sum_{s=0}^{q-1} A_{irs} x^{rs} = \sum_{j=0}^{p-1} d_{ji} x_i^{jo} \quad (i = 0, 1, \dots, p-1);$$

avec les coefficients des points  $x_i^{jo}$  figurant dans (9), on forme un déterminant  $\delta_i = |d_{ji}|$ . De (9) on déduit:

$$(10) \quad x_i^{rs} = \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{j=0}^r f_{ij, sr} \lambda_i^{\circ j} + \sum_{i=0}^{q+r} g_{isr} x^{\circ i}$$

$$(s = 0, 1, \dots, p; \quad r = 0, 1, \dots, q);$$

avec les coefficients des points  $\lambda_i^{\circ j}$  et  $x^{\circ i}$ , qui figurent dans les seconds membres de (10), à l'exclusion de l'équation qui donne  $x_i^{pq}$ , on forme un déterminant  $\delta_2$ . Pour une congruence habituelle (8), on a  $\delta_1 = b$ ,  $\delta_2 = h : b^3$ , ou  $h$  est l'invariant de Darboux du réseau  $(x)$ .

Une congruence  $xx_i$  vérifiant (7) est dite *non singulière* si les déterminants  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont  $\neq 0$ . Une congruence non singulière jouit des propriétés suivantes:

les foyers  $x$  et  $x_i$  décrivent respectivement des réseaux  $S_u$  et  $S_v$ , non particularisés;

le point  $x_i$  est le dernier espace laplacien  $\Sigma_{2,p}^u$  du réseau  $(x)$  et le point  $x$  est le dernier espace laplacien  $\Sigma_{2,q}^v$  du réseau  $(x_i)$ ; le point  $x_i$  est un transformé de Laplace dans le sens  $u$  du réseau  $(x)$  et réciproquement.

On voit que les foyers d'une congruence d'ordre  $(p, q)$  ne décrivent que des réseaux  $S$ .

3. Comme application considérons le réseau, qui est en même temps un réseau  $S_u^o$  et un réseau  $S_v^o$ :

$$(11) \quad x^{22} = Ux^{o2} + Vx^{2o} + ax^{oo},$$

$U, V$  étant des fonctions seulement de  $u$  et de  $v$  respectivement, et  $a = \varphi(u, v)$ ; ce réseau est non particularisé si  $\rho = UV + a \neq 0$ .

Le réseau admet deux transformés de Laplace:

$$x_i = x^{o2} - Vx^{oo}, \quad x_{-i} = x^{2o} - Ux^{oo}$$

le point  $x_i$  vérifie la transformée de Laplace dans le sens  $u$ , de l'équation (11):

$$x_i^{22} = 2\omega x_i^{21} + [\omega^{o1} - (\omega)^2 + V] x_i^{2o} + Ux_i^{o2} - 2U\omega x_i^{o1} - [U\omega^{o1} - U(\omega)^2 - a] x_i^{oo}$$

$$\omega = (\ln \rho)_v;$$

la transformée de Laplace dans le sens  $v$ , est donnée par une équation analogue à la précédente.

Si  $\rho$  vérifie l'équation:

$$\tau [\tau (\ln \tau)_{uv} - 2\tau^2 + \rho] = 0 \quad [\tau = (\ln \rho)_{uv}],$$

alors le réseau  $(x_i)$  admet le transformé  $x_2$  et le réseau  $(x_{-i})$  admet le transformé  $x_{-2}$ . Si  $\rho$  ne vérifie pas cette équation, alors la suite de Laplace dans le sens  $u$ , se termine avec  $x_i$ , et la suite dans le sens  $v$  se termine avec  $x_{-i}$ . Si  $\rho = \text{const.}$ , l'équation (11) admet une suite de Laplace infinie dans le sens  $u$ , et de même dans le sens  $v$ .

La congruence

$$x^{o2} = ax_i, \quad x_i^{2o} = bx$$



est non singulière si  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ; le foyer  $x$  décrit un réseau  $S_u$ , d'ordre  $(2, 2)$ .

$$x^{22} = \left[ \frac{a^{20}}{a} - 2 \left( \frac{a^{10}}{a} \right)^2 \right] x^{02} + \frac{2 a^{10}}{a} x^{12} + abx$$

et  $x_r$  décrit un réseau  $S_v$ ; le point  $x_r$  est le transformé de Laplace du réseau  $(x)$  dans le sens  $u$ , et réciproquement.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] E. BOMPIANI, *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi*, « Rendic. Circolo matem. Palermo », t. 46, pp. 91-104 (1922).
- [2] B. SEGRE, *Les systèmes conjugués et autoconjugués d'espèce  $\nu$* , « Annales scient. de l'Ecole Norm. Sup. Paris », t. 44, 3<sup>e</sup> série, pp. 153-212 (1927).
- [3] B. SEGRE, « Généralisation de la transformation de Laplace », « Comptes rendus de l'Acad. des Scien. Paris », t. 183, pp. 1248-1250 (1926).
- [4] T. KOZMINA, « Dokladi Akademii Nauk URSS », t. 55, p. 187 (1947).
- [5] S. S. CHERN, *Laplace transformations of a class of higher dimensional varieties*, « Proceedings of the National Academy of Scien. USA », vol. 30, pp. 95-97 (1944).
- [6] E. BOMPIANI, *Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni*, « Rendic. del R. Istituto Lombardo », vol. 52, fasc. 16-18, pp. 610-631 (1919).
- [7] E. ARGHIRIADE, *Rețele și congruențe de ordin superior* en cours de publication, dans « Studii și cercetări matematice Academia Republicii Populare Romîne », Bucarest 1957.
- [8] C. SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, et « Aggiunta », « Rend. Circolo matem. Palermo », t. 30, 2<sup>o</sup> sem., pp. 87-121 et 346-8.

**Meccanica.** — *Sopra un principio variazionale nella teoria degli spostamenti elastici non infinitesimi*. Nota di RICCARDO F. BALDACCI, presentata (\*) dal Socio G. BOAGA.

Qualora non siano trascurabili i prodotti nei gradienti di spostamento le equazioni fondamentali dell'equilibrio elastico perdono il loro aspetto lineare tipico della teoria classica dell'elasticità e valido nella situazione limite di spostamenti infinitesimi per assumere la forma generale in notazioni tensoriali consuete:

$$(I_1) \quad (s_{ik} + u_{k,r} s_{ir})_{,i} + \bar{f}_k = 0 \quad \text{in } \mathfrak{D}$$

$$(I_2) \quad (s_{ik} + u_{k,r} s_{ir}) n_i = \bar{F}_k \quad \text{su } \mathfrak{F}_1$$

$$(2_1) \quad 2 e_{ik} = u_{i,k} + u_{k,i} + u_{r,i} u_{r,k} \quad \text{in } \mathfrak{D}$$

$$(2_2) \quad u_k = \bar{u}_k \quad \text{su } \mathfrak{F}_2$$

(\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

dove le componenti di tensione  $s_{ik}$  e di deformazione  $e_{ik}$  sono definite con riguardo alla configurazione indeformata ( $x_r$ ).

Le (1) esprimono manifestamente le condizioni di equilibrio sia nei punti interni del dominio  $\mathfrak{D}$  occupato dal solido elastico, dove sono assegnate le forze di massa  $\bar{f}_k$ , sia nei punti della porzione  $\mathfrak{F}_1$  di frontiera  $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$  dove sono prescritte le forze superficiali  $\bar{F}_k$ , mentre le (2) denotano la congruenza della deformazione imponendo alle  $e_{ik}$  di essere derivabili in  $\mathfrak{D}$  da funzioni di spostamento  $u_k$  tali da rispettare certi vincoli geometrici, assegnati sulla porzione rimanente  $\mathfrak{F}_2$  di  $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$  attraverso i valori prescritti  $\bar{n}_k$ : i coseni direttori  $n_i$  individuano infine la normale alla frontiera  $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ , assunta positiva se rivolta verso l'esterno.

Nella Nota presente verrà dimostrata la completa equivalenza delle (1) e (2) ad un problema variazionale nella sua duplice forma diretta e reciproca, presupponendo però che il solido possa ancora intendersi elastico secondo Green e le forze applicate derivino da un potenziale: precisamente ci limiteremo a considerare una classe  $C$  di funzioni  $s_{ik}$ ,  $e_{ik}$  collegate proprio da relazioni del tipo di quelle di Hooke-Cauchy per gli spostamenti infinitesimi dei solidi omogenei ed isotropi:

$$(3) \quad s_{ik} = 2G(e_{ik} + \delta_{ik} \mu e_{rr})$$

dove  $G$  e  $\mu$  indicano due costanti elastiche, mentre  $\delta_{ik}$  denota la cosiddetta funzione di Kronecker, uguale a 1 per  $i = k$  ed eguale a 0 per  $i \neq k$ .

In una sottoclasse  $C'$  di  $C$ , formata con tutte le funzioni  $s_{ik}$ ,  $e_{ik}$  che verificano le equazioni di congruenza (2) e definita perciò *semplicemente congruente*, ha significato il problema di rendere estremo il funzionale:

$$(4) \quad J[e_{ik}, u_k] = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{D}} s_{ik} e_{ik} dv - \int_{\mathfrak{D}} \bar{f}_k u_k dv - \int_{\mathfrak{F}_1} \bar{F}_k u_k da$$

soggetto alle relazioni (2) riguardate come *condizioni ausiliarie* per le funzioni ammissibili  $e_{ik}$ ,  $u_k$ .

L'equazione variazionale necessaria perché  $J$  assuma un valore stazionario, in virtù della reciprocità tra le  $s_{ik}$  e le  $e_{ik}$  implicita nel legame lineare (3), risulta allora:

$$(5) \quad \delta J \equiv \int_{\mathfrak{D}} s_{ik} \delta e_{ik} dv - \int_{\mathfrak{D}} \bar{f}_k \delta u_k dv - \int_{\mathfrak{F}_1} \bar{F}_k \delta u_k da = 0$$

o anche, per l'ammessa derivabilità delle  $e_{ik}$  dalle  $u_k$  secondo la (2<sub>1</sub>) e dopo una conveniente permutazione degli indici  $i, k, r$  ricorrenti nelle somme:

$$(6) \quad \delta J \equiv \int_{\mathfrak{D}} [(s_{ik} + u_{k,r} s_{ir}) \delta u_{k,i} - \bar{f}_k \delta u_k] dv - \int_{\mathfrak{F}_1} \bar{F}_k \delta u_k da = 0.$$

Dalla trasformazione di Gauss-Green applicata all'integrale di volume si ha infine con riguardo alla (2<sub>2</sub>):

$$(7) \quad \delta J \equiv - \int_{\mathfrak{D}} [(s_{ik} + u_{k,r} s_{ir})_{,i} + \bar{f}_k] \delta u_k dv + \int_{\mathfrak{F}_1} [(s_{ik} + u_{k,r} s_{ir}) n_i - \bar{F}_k] \delta u_k da = 0$$

e l'arbitrarietà delle variazioni  $\delta u_k$  conduce alle equazioni di equilibrio (1) come *condizioni naturali* in  $\mathfrak{D}$  e su  $\mathfrak{F}_1$  del problema variazionale  $J = \text{extr}$ : cioè, in altri termini, *il funzionale  $J$  ammette un valore estremo nella sotto-classe  $C'$  delle configurazioni congruenti in corrispondenza di una configurazione equilibrata.*

Si nota così la perfetta analogia con il risultato ben noto nella teoria ordinaria degli spostamenti elastici infinitesimi: essa rappresenta l'annunciata *forma diretta del principio di estremo per l'energia potenziale totale*, ma la dimostrazione precedente nulla può dire sull'esistenza di un problema variazionale reciproco che abbia come condizioni ausiliarie le condizioni naturali corrispondenti all'estremo di  $J$ . La costruzione di questo nuovo problema verrà realizzata attraverso un principio generale di Calcolo delle variazioni per cui *il carattere estremo di un funzionale non viene alterato dalla aggiunta esplicita di una o più condizioni naturali al gruppo delle condizioni ausiliarie.*

In virtù di tale principio quindi l'estremo di  $J$  rimarrà immutato aggiungendo a  $J$  le relazioni (1) in modo da ottenere il nuovo funzionale:

$$(8) \quad K[s_{ik}, u_k] = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{D}} s_{ik} e_{ik} dv - \int_{\mathfrak{D}} \bar{f}_k u_k dv - \int_{\mathfrak{F}_1} \bar{F}_k u_k da + \\ + \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{D}} s_{ik} (u_{i,k} + u_{k,i} + u_{r,i} u_{r,k} - 2 e_{ik}) dv + \int_{\mathfrak{F}_2} F_k (\bar{u}_k - u_k) da$$

o anche, sostituendo per le forze di massa  $\bar{f}_k$  le espressioni ricavate dalla (1<sub>r</sub>):

$$(9) \quad K[s_{ik}, u_k] = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{D}} [s_{ik} (u_{i,k} + u_{k,i} + u_{r,i} u_{r,k} - e_{ik}) + (s_{ik} + u_{k,r} s_{ir})_{,i} u_k] dv - \\ - \int_{\mathfrak{F}_1} \bar{F}_k u_k da - \int_{\mathfrak{F}_2} F_k (u_k - \bar{u}_k) da$$

e raggiungendo così dalla formula di Gauss-Green, applicata al secondo termine sotto segno di integrale di volume, la cercata trasformazione di  $J$  nella forma variazionale reciproca:

$$(10) \quad K[s_{ik}, u_k] = -\frac{1}{2} \int_{\mathfrak{D}} s_{ik} (e_{ik} + u_{r,i} u_{r,k}) dv + \int_{\mathfrak{F}_2} (s_{ik} + u_{k,r} s_{ir}) n_i \bar{u}_k da.$$

L'esame della (10) mette in evidenza come il funzionale  $K$  differisca in modo sostanziale dal funzionale  $J$  per la presenza dei prodotti nei gradienti di spostamento  $u_{r,i} u_{r,k}$ ; tale proprietà spiega gli insuccessi di istituire un problema variazionale reciproco sulla unica scorta dell'analogo procedimento usato nella teoria classica dell'elasticità, partendo cioè da un funzionale  $K$  non contenente al pari di  $J$  i suddetti termini del secondo ordine, che rappresentano invece l'elemento caratteristico rispetto al caso di spostamenti infinitesimi.

Il nuovo problema  $K = \text{extr.}$  ha evidentemente significato in una sotto-classe  $C''$  di  $C$  formata con tutte le funzioni  $s_{ik}$ ,  $e_{ik}$  che verificano le equazioni di equilibrio (1) e definita perciò *semplicemente equilibrata*: naturalmente lo stesso procedimento variazionale applicato al problema reciproco, di aggiungere cioè al funzionale  $K$  le (2) come condizioni ausiliarie, ricondurrebbe al problema di partenza  $J = \text{extr.}$ , dimostrando così il carattere *involutorio* della trasformazione con ovvi sviluppi formali sui quali non è il caso di insistere.

La risoluzione, ormai effettuabile, del problema reciproco  $K = \text{extr.}$  comporta al solito l'annullarsi della variazione prima di  $K$ :

$$(11) \quad \delta K \equiv - \int_{\mathfrak{D}} [e_{ik} \delta s_{ik} + \frac{1}{2} \delta (s_{ik} u_{r,i} u_{r,k})] dv + \int_{\mathfrak{F}_2} \bar{n}_k \delta (s_{ik} + u_{k,r} s_{ir}) n_i da = 0$$

intesa nella sottoclasse  $C''$  rispetto alle funzioni ammissibili  $s_{ik}$ , e di conseguenza alle  $e_{ik}$  ad esse legate dalla (3) ma non necessariamente derivabili da spostamenti  $u_k$  secondo la (2<sub>1</sub>).

La variazione del secondo termine sotto segno dell'integrale di volume della (11) può essere scritta:

$$(12) \quad \frac{1}{2} \delta (s_{ik} u_{r,i} u_{r,k}) = [u_k \delta (u_{k,r} s_{ir})]_{,i} - u_k \delta (u_{k,r} s_{ir})_{,i} - \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,r} \delta s_{ir}$$

e sostituendo in conseguenza della (1<sub>1</sub>) la variazione  $\delta (u_{k,r} s_{ir})_{,i}$  con  $-\delta s_{ik,i}$ , per essere manifestamente  $\delta \bar{f}_k = 0$ , anche:

$$(13) \quad \frac{1}{2} \delta (s_{ik} u_{r,i} u_{r,k}) = [u_k \delta (s_{ik} + u_{k,r} s_{ir})]_{,i} - (u_{k,i} + \frac{1}{2} u_{r,i} u_{r,k}) \delta s_{ik}.$$

L'equazione variazionale (11) assume allora la forma:

$$(14) \quad \delta K \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{D}} (u_{i,k} + u_{k,i} + u_{r,i} u_{r,k} - 2 e_{ik}) \delta s_{ik} dv - \int_{\mathfrak{F}_1} u_k \delta (s_{ik} + u_{k,r} s_{ir}) n_i da - \\ - \int_{\mathfrak{F}_2} \bar{n}_k \delta (s_{ik} + u_{k,r} s_{ir}) n_i da = 0$$

ed essendo prescritte le forze superficiali  $\bar{F}_k$  sulla porzione  $\mathfrak{F}_1$  della frontiera  $\mathfrak{F}_D$  dalla condizione ausiliaria ai limiti (1<sub>2</sub>) e quindi nulle su  $\mathfrak{F}_1$  le variazioni  $\delta F_k = \delta (s_{ik} + u_{k,r} s_{ir}) n_i$ , si avrà in definitiva:

$$(15) \quad \delta K \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{D}} (u_{i,k} + u_{k,i} + u_{r,i} u_{r,k} - 2 e_{ik}) \delta s_{ik} dv + \int_{\mathfrak{F}_2} (\bar{n}_k - u_k) \delta F_k da = 0$$

che per l'arbitrarietà delle variazioni  $\delta s_{ik}$  e  $\delta F_k$  implica necessariamente come condizioni naturali del problema  $K = \text{extr.}$  le equazioni di congruenza (2<sub>1</sub>) e (2<sub>2</sub>) rispettivamente valide in  $\mathfrak{D}$  e su  $\mathfrak{F}_2$ .



È stato così dimostrato che *il funzionale K ammette un valore estremo nella sottoclasse C' delle configurazioni equilibrate in corrispondenza di una configurazione congruente*: tale forma reciproca del principio di estremo ne rappresenta un nuovo aspetto variazionale e costituisce - subordinatamente all'ipotesi (3) - la generalizzazione al caso di spostamenti finiti di un analogo principio conosciuto nella teoria classica dell'elasticità sotto il nome di *teorema di Menabrea* o della *minima energia complementare*, di cui è ben nota l'importanza sia teorica che applicativa.

**Astronomia geodetica.** — *La stazione Astronomica dell'Osservatorio di Capodimonte (Napoli) ad Uccle (Belgio) per l'Anno Geofisico Internazionale.* Nota di MASSIMO CIMINO, TITO NICOLINI e ELIO FICHERA, presentata (\*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Uno dei problemi più interessanti, al quale gli astronomi sono stati chiamati a fornire il loro contributo durante l'Anno Geofisico Internazionale, è quello delle variazioni delle longitudini; problema oltremodo complesso, al quale sono collegati molti altri problemi, sia astronomici che tecnici, e la cui soluzione costituisce, a sua volta, la base per lo studio dei movimenti di deriva delle grandi masse continentali. Notoriamente, per le osservazioni di longitudine occorrono strumenti di altissima precisione, tra i quali gli strumenti dei passaggi, modernamente corredati di orologi a quarzo, cronografi imprimenti ed attrezzature radio-riceventi e trasmettenti particolarmente complesse, il tutto accompagnato da numeroso personale specializzato e provvisto di lunga esperienza.

Tutte condizioni, come si vede, non facili a realizzarsi in un solo Osservatorio, senza cospicui mezzi finanziari e congruo tempo di preparazione. Per questa ragione, allorché il prof. Bourgeois prospettò allo scrivente (M. Cimino) la possibilità di una stretta collaborazione tra l'Osservatorio di Uccle da lui diretto e quello di Capodimonte, con entusiasmo fu accettata la proposta di dirigere verso un unico scopo comune le forze unite dei due Osservatori. Si costituiva in tal modo un centro di studio per le longitudini che può, senza dubbio, essere classificato il più importante d'Europa <sup>(1)</sup>.

(\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) Ricordiamo che nell'ultimo Congresso U.G.G.I. di Toronto - Sezione III, Astronomia, IV seduta, 12 settembre, a 14 h. -, il dott. STOVKO, direttore del B.I.H. ha ribadito le condizioni della nuova operazione mondiale delle longitudini, che è iniziata il 1° luglio 1957. Essa fa seguito alle due operazioni precedenti del 1926 e 1933, ma se ne differenzia per un programma più vasto e più preciso. I risultati delle precedenti campagne sono soggetti a talune critiche, per evitare le quali il B.I.H. ha deciso di prendere in considerazione solamente i dati forniti da quelle Stazioni che posseggono:

A) strumenti meridiani a micrometro impersonale o fotoelettrico, ovvero telescopi zenitali fotografici, ovvero astrolabi;

Per quanto riguarda la sede, fu convenuto che gli strumenti riuniti degli Osservatori italiano e belga operassero, ciascuno, col personale di concetto della rispettiva nazione, presso l'Osservatorio belga di Uccle, che era il meglio attrezzato e che disponeva anche di numeroso personale ausiliario. Per Capodimonte lo scrivente diede l'incarico di guidare la missione al dott. E. Fichera, mentre per la parte finanziaria venivano generosamente in aiuto la Direzione Generale del Banco di Napoli, lo stesso Osservatorio di Uccle attraverso varie provvidenze e l'Associazione Culturale Italo-belga con una borsa di studio. A tutti vadano i sensi della mia più viva riconoscenza.

2. Non ha bisogno di dimostrazione l'enorme vantaggio che si trae, in questo genere di ricerche, dalla possibilità che strumenti ed osservatori diversi, seguenti metodi differenti, possano operare per lo stesso scopo in uno stesso luogo. Le stazioni astronomiche costituite ad Uccle per lo studio delle longitudini sono tre, così composte:

STAZIONE I<sup>a</sup>, ITALO-BELGA (*Capodimonte-Uccle*).

Due strumenti gemelli dei passaggi di « Bamberg », con obbiettivi da 90 mm. di proprietà, rispettivamente, dei due Osservatori; cronografi imprimenti « Secrétan » (belga) e « Gauthier » (italiano), con motori fonici « Muirhead ».

STAZIONE II<sup>a</sup>, BELGA (*Uccle*).

Strumento dei passaggi « Askania 70 »; cronografo imprimente « Gauthier » con motore fonico come sopra.

STAZIONE III<sup>a</sup>, BELGA (*Uccle*).

Astrolabio di Danjon con cronografo imprimente « Secrétan », motore come sopra.

*Orologi:* Quarzo fondamentale  $Q_1$  (Laboratoires Radioélectriques de Paris), già sottoposto nel 1950, assieme ad altri due quarzi di confronto  $Q_2$  e  $Q_3$ , a prove varie presso il Laboratoire National de Radioélectricité a Bagneux e, in previsione dell'attuale campagna, già regolato durante un triennio di osservazioni astronomiche (1951-53).

*Ricezione dei segnali orari:* a) Sezione belga; orologio elettronico Cintel, collegato al  $Q_1$  (con dispositivo per inserire anche gli altri due quarzi), e registrazione su cronografo lento « Belin »; b) Sezione italiana (organizzata e realizzata da E. Fichera): ricezione su oscillografo, con camera cinematografica accoppiata.

Sono state inoltre impiantate due emittenti locali per la misura dei ritardi di ricezione. A questa realizzazione tecnica ha partecipato attivamente

B) orologi a quarzo *in numero minimo di tre* (i pendoli a pressione e temperatura costanti, come anche gli accoppiamenti di pendoli ad un *unico* orologio a quarzo, sono ritenuti insufficienti);

C) la registrazione automatica dei segnali orari preferibilmente su oscillografo catodico, in modo da assicurare una precisione *superiore* al millesimo di secondo.

Il dott. STOYKO concludeva che in queste condizioni si trovano pochissime Stazioni mondiali e tra queste quella di Capodimonte-Uccle.

anche E. Fichera, che ha poi eseguito il montaggio completo, su schema del prof. Verbaandert e Sanders, del relais elettronico applicato al cronografo imprimente italiano.

3. Nella Stazione I<sup>a</sup> italo-belga i due « Bamberg » gemelli operano contemporaneamente, affiancati in due sale contigue. Il personale scientifico italiano è rappresentato dal dott. E. Fichera, al quale si deve, con l'aiuto del personale tecnico dell'Osservatorio di Uccle, la completa installazione e messa a punto dello strumento italiano, e da due calcolatori assunti sul posto.

Il lavoro per l'installazione è stato piuttosto complesso, poiché si doveva adattare il « Bamberg » italiano a tutta l'attrezzatura elettronica in possesso dell'Osservatorio di Uccle. Una prova della livella di inclinazione ha consigliato la sua sostituzione con una nuova di altissima precisione. Si è proceduto inoltre alla incorporazione di una lente addizionale per l'osservazione delle due mire meridiane (a Nord e a Sud), e alla costruzione di un bagno di mercurio scorrevole su carrello per le osservazioni a riflessione. Tutti questi lavori sono stati eseguiti a tempo di « record » (12 giorni), talché lo strumento poteva entrare regolarmente in funzione, accanto al gemello belga, puntualmente col 1° luglio 1957.

Le osservazioni dei passaggi stellari ai due « Bamberg » vengono eseguite, come si è detto, simultaneamente sulle stesse stelle dall'astronomo italiano e da uno belga. Ogni sera si osservano 4 serie di 16 stelle ciascuna, di cui 4 osservate per riflessione sul bagno di mercurio. I due osservatori si scambiano ad ogni serie, al fine di comparare utilmente le equazioni strumentali e personali.

4. Rimandando ad una più completa pubblicazione futura ogni particolare sulla installazione e le attrezzature, vogliamo ora, in questa Nota di carattere generale, accennare al metodo di osservazione. Dopo lunga discussione, alla quale presero parte tutti gli astronomi presenti ad Uccle, la scelta cadde sul metodo di Bessel, accogliendo la proposta di E. Fichera di adottare stelle di declinazione compresa tra i  $70^\circ$  e i  $-5^\circ$ , e scegliendo il programma in modo che la media delle  $\tan \delta_i$  coincidesse con il valore di  $\tan \varphi$ . In tal modo si viene ad eliminare il grande inconveniente del metodo grafico di Bessel, cioè l'incertezza della determinazione dell'azimut strumentale. Al Fichera fu affidato l'incarico di preparare tutto il programma di osservazione per l'intero A.G.I.

Complessivamente le tre stazioni osservano, ogni sera, 140 stelle. Di queste la Stazione I<sup>a</sup> italo-belga osserva, come si è già accennato, 4 serie di 16 stelle ciascuna, coi due strumenti contemporaneamente; cioè, complessivamente, 128 passaggi stellari. Si comprende da ciò quale enorme lavoro di calcolo occorra per le riduzioni. Queste sono effettuate da 4 astronomi, coadiuvati da 6 calcolatori, ed il lavoro è organizzato in modo che, alle ore 18 di ogni giorno, si possano discutere collegialmente - prima di iniziare la nuova notte di osservazione - i risultati della notte precedente. In particolare, per quanto

riguarda il personale italiano, oltre al lavoro notturno di osservazione come detto dianzi, è stato affidato ad esso la riduzione definitiva dei dati di osservazione (con la collaborazione del dott. Melchior), di stabilire i pesi di ogni osservazione (con la collaborazione del prof. Verbaandert) ed il controllo delle ricezioni dei segnali radio. Inoltre esso collabora alla sorveglianza tecnica dei quarzi e a quella dell'ufficio calcoli. Infine, esso è stato ufficialmente incaricato dalla Commissione Centrale dell'A.G.I. della rassegna generale di tutti i lavori di Astronomia geodetica e di posizione che appariranno durante l'A.G.I.

**Fisica matematica.** — *Su un particolare problema di distribuzione della temperatura interessante la teoria dei transistori di giunzione.* Nota di ANTONIO PIGNEDOLI, presentata (\*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. Scopo del presente lavoro è lo studio della distribuzione della temperatura  $U(P, t)$  funzione del posto e del tempo, in un cilindro retto a sezione circolare od ellittica, di basi  $\Sigma_{-l}$  e  $\Sigma_{+l}$  il cui asse venga assunto come asse delle  $z$ , e nel quale si verifichi una variazione della temperatura in corrispondenza della sezione mediana  $\Sigma_0$ ; questa potrà essere pensata come « giunzione » di due cilindri uniti per la base in  $\Sigma_0$  e costituenti insieme il cilindro allo studio. Si supporrà che la variazione di temperatura alla giunzione sia tale da determinare un flusso termico costante attraverso la sezione in parola.

Un problema del genere, in particolare semplificato nella sua schematizzazione unidimensionale, può recare un utile contributo allo studio teorico del funzionamento dei transistori « di giunzione » i quali sono, come si sa, di alta importanza per la Radiotecnica attuale. È noto, invero, che quando un transistor di giunzione funziona a certe frequenze (sufficientemente basse) si verificano alla giunzione stessa delle variazioni di temperatura sensibili ed influenzanti, quindi, il funzionamento del sistema.

Risulta, dunque, di indubbio interesse lo studio della distribuzione della temperatura in un transistor, in dipendenza del riscaldamento verificantesi alla giunzione.

Ed il transistor stesso può pensarsi schematizzato nei due « pezzi » uniti per la base di cui si sta parlando.

Per questo siano:  $2l$  la lunghezza del cilindro,  $\chi$  la sua conduttività termica,  $\rho$  la densità,  $c$  il calore specifico,  $D = \chi/c\rho$  il coefficiente di diffusibilità termica,  $F$  il flusso termico (supposto costante) per unità di area attraverso  $\Sigma_0$ . La temperatura  $U(P, t)$  soddisferà, nel cilindro in parola, alla equazione del calore con  $0 \leq z \leq l, t > 0$ , in quanto considereremo il problema di distribuzione nel cilindro di basi  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_{+l}$  soltanto: ciò, tenuto ovviamente conto della simmetria del fenomeno di propagazione del calore nella

(\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.



regione considerata. Supporremo assegnata la distribuzione iniziale della temperatura  $U(P, 0) = \Phi(P)$ ; supporremo, inoltre, che la superficie laterale esterna  $\Sigma$  del cilindro confini con un ambiente a temperatura costante  $\bar{U}$ , che, senza pregiudizio di generalità, potremo supporre nulla. Esclusi, dunque, gli scambi di calore per irraggiamento, considerata sufficientemente piccola la differenza  $U - \bar{U}$ , essendo, inoltre,  $n$  il versore della normale esterna a  $\Sigma$  e nell'ipotesi di conducibilità superficiale praticamente prossima a zero, varrà sulla superficie laterale  $\Sigma$  una condizione di annullamento della derivata normale di  $U(P, t)$ . Supponiamo, poi, che la temperatura sulla superficie  $\Sigma_{+l}$  venga mantenuta sensibilmente costante ed uguale ad  $U_0$ . E veniamo, infine, a considerare la superficie di giunzione dei due semicilindri costituenti il cilindro allo studio e sulla quale si verifica il riscaldamento. Su di essa il flusso termico per unità di superficie (di valore costante per ogni  $t \geq 0$ ) sarà  $F = -\chi \left[ \frac{\partial U}{\partial z} \right]_{z=0}$ .

Osserviamo che la funzione  $\Phi$  sarà, generalmente, per la simmetria rispetto a  $\Sigma_0$ , una funzione pari di  $z$ . Per la risoluzione del nostro problema, opereremo intanto la trasformazione:

$$(1) \quad U(P, t) = T(P, t) + F(l - z)/\chi + U_0.$$

In virtù della (1), il problema si ridurrà all'equazione

$$(2) \quad \Delta_2 T(P, t) = \frac{1}{D} \frac{\partial T(P, t)}{\partial t}$$

con le condizioni supplementari:

$$(a) \quad \begin{cases} T(P, 0) = F(z - l)/\chi + \Phi(P) - U_0 = \Psi(P), & \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ (su } \Sigma \text{ per ogni } t); \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ (per } z = 0) & , \quad T(P, t) = 0 \text{ (per } z = l \text{ e per ogni } t). \end{cases}$$

Dell'equazione differenziale (2), relativamente al caso del cilindro a sezione circolare, cerchiamo, per separazione di variabili, soluzioni (in coordinate cilindriche) della forma:

$$(3) \quad T(\rho, \varphi, z, t) = u(\rho, \varphi) Z(z) \cdot \exp(-m^2 D t),$$

con  $m^2 = \lambda^2 + q^2$ , dove  $q^2 > 0$  e  $\lambda^2 > 0$  sono due costanti. Sostituendo la (3) nella (2), si ottiene il sistema differenziale:

$$(2') \quad \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + q^2 Z(z) = 0, \quad \Delta_2 u(\rho, \varphi) + \lambda^2 u(\rho, \varphi) = 0,$$

il quale fornisce:

$$(4) \quad Z(z) = c_1 \cos qz + c_2 \sin qz, \quad u(\rho, \varphi) = J_n(\lambda \rho) [A \cos n\varphi + B \sin n\varphi],$$

con  $c_1, c_2, A$  e  $B$  costanti arbitrarie e dove  $J_n(\lambda \rho)$  è la funzione di Bessel di ordine  $n$  (intero) di prima specie di argomento  $\lambda \rho$ . In virtù della terza delle (a) abbiamo  $c_2 = 0$ , per cui, applicando la quarta, risulta  $c_1 \cos ql = 0$ , da cui  $q_k = (2k + 1)\pi/2l$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ); e la seconda

delle  $(\alpha)$  fornisce, poi, per la determinazione degli autovalori del parametro  $\lambda$ , l'equazione trascendente  $J'_n(\lambda\rho) = 0$ , con  $a$  raggio di base del cilindro. L'equazione in parola fornisce, notoriamente, per ogni intero  $n$ , infiniti autovalori  $\lambda_n^{(j)}$  del parametro  $\lambda$  in questione. La soluzione generale dell'equazione differenziale (2) è, perciò:

$$(5) \quad T(P, t) = \sum_k^{\infty} \sum_n^{\infty} \sum_j \cos \frac{(2k+1)\pi z}{2l} \cdot J_n(\lambda_n^{(j)}\rho) [A_{nj} \cos n\varphi + \\ + B_{nj} \sin n\varphi] \cdot \exp [-(\lambda_n^{(j)})^2 + q_k^2] Dt],$$

ove la sommatoria con l'indice  $k$  è estesa a tutti gli autovalori del parametro  $q$ , la sommatoria con l'indice  $n$  è estesa a tutti i valori interi di  $n$  fra 0 e  $+\infty$ , e la sommatoria con l'indice  $j$  è estesa a tutti gli autovalori del parametro  $\lambda$  che, per ogni  $n$ , sono definiti dall'equazione trascendente  $J'_n(\lambda\rho) = 0$ . In virtù del fatto che è nota la temperatura iniziale in tutto il cilindro,  $T(P, 0) = \Psi(P)$ , dalla (5) consegue:

$$(6) \quad \Psi(P) = \sum_k \sum_n \sum_j \cos \frac{(2k+1)\pi z}{2l} \cdot J_n(\lambda_n^{(j)}\rho) [A_{nj} \cos n\varphi + B_{nj} \sin n\varphi].$$

Moltiplicando ambo i membri della (6) per  $\cos q_k z$  ed integrando fra 0 ed  $l$ , si ha:

$$(7) \quad \int_0^l \Psi(\rho, \varphi, z) \cos q_k z dz = \frac{l}{2} \sum_n \sum_j J_n(\lambda_n^{(j)}\rho) [A_{nj} \cos n\varphi + B_{nj} \sin n\varphi], (k=0, 1, 2, \dots).$$

Si determinano, dunque, al solito, i coefficienti  $A_{nj}$  e  $B_{nj}$  («alla Fourier»); dalla conoscenza della  $T$  si risale, poi, a quella della  $U$ , ed il problema può considerarsi risolto.

2. La questione in esame suggerisce, ora, dal punto di vista analitico, l'opportunità dello studio del problema nel caso in cui il cilindro sia a sezione ellittica. Ciò faremo, occupandoci, per tale forma e senza fare uso delle trascendenti di Mathieu, della equazione differenziale  $\Delta_2 u + \lambda^2 u = 0$ , con le volute condizioni ai limiti. Riferiamo, per questo, i punti del campo piano ad un sistema di coordinate ellittiche  $(\xi, \eta)$  e indichiamo con  $c$  la semidistanza focale delle ellissi ed iperboli omofocali  $\xi = \cosh \xi$ ,  $\eta = \cosh \eta$  (la  $\xi$  cresce da zero ad un certo valore  $\xi_0$  assunto sul contorno, e la  $\eta$  varia da zero a  $2\pi$ ). La trasformata della equazione differenziale allo studio, in coordinate ellittiche è l'equazione differenziale:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \lambda^2 c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) u = 0,$$

la quale, ponendo  $\rho = \exp \xi$ , si trasforma, a sua volta, nell'equazione che si ottiene dalla

$$(9) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \lambda^2 n^2 a_0^2 [1 + \alpha^2 \rho^{-(n+1)} - \\ - 2 \alpha \rho^{-(n+1)} \cos (n+1)\eta] u = 0,$$

con  $n$  intero diverso da zero, facendovi  $n = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha_0 = c/2$ . Cambiando nella (9)  $\alpha$  in  $-\alpha$  ed  $n$  in  $-n$ , la (9) stessa diventa

$$(10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \lambda^2 n^2 \alpha_0^2 [1 + \alpha^2 \rho^{2(n-1)} + \\ + 2 \alpha \rho^{(n-1)} \cos (n-1) \eta] u = 0,$$

che è l'equazione differenziale delle funzioni trascendenti «epicicloidali» introdotte da Agostinelli <sup>(1)</sup>. Indicata, al solito, con  $J_r$  la funzione di Bessel di prima specie di ordine  $r$ , si hanno della (9) le soluzioni seguenti (dove  $k = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$(11) \quad u_k(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{k-p} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{\xi} \right) J_p \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi} \right) \cos (k - 2p) \eta,$$

$$(11') \quad u_k^*(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{k-p} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{\xi} \right) J_p \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi} \right) \sin (k - 2p) \eta,$$

le quali sono serie uniformemente convergenti per ogni valore di  $\xi$  e per ogni valore di  $\eta$ . Poniamo ora:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{2m,0}(\xi, \lambda) = J_m \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{\xi} \right) J_m \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi} \right), \\ F_{2m,s}(\xi, \lambda) = J_{m+s} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{\xi} \right) J_{m-s} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi} \right) + J_{m-s} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{\xi} \right) J_{m+s} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi} \right), \\ G_{2m,s}(\xi, \lambda) = J_{m+s} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{\xi} \right) J_{m-s} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi} \right) - J_{m-s} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{\xi} \right) J_{m+s} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi} \right), \\ F_{2m+1,s}(\xi, \lambda) = J_{m+s+1} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{\xi} \right) J_{m-s} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi} \right) + J_{m-s} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{\xi} \right) J_{m+s+1} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi} \right), \\ G_{2m+1,s}(\xi, \lambda) = J_{m+s+1} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{\xi} \right) J_{m-s} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi} \right) - J_{m-s} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{\xi} \right) J_{m+s+1} \left( \frac{1}{2} \lambda c e^{-\xi} \right). \end{array} \right.$$

Le  $F_{2m,s}$  ed  $F_{2m+1,s}$  sono funzioni pari di  $\xi$ ; le  $G_{2m,s}$  e  $G_{2m+1,s}$  sono funzioni dispari di  $\xi$ . In virtù delle posizioni fatte, potremo scrivere:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{2m}(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} F_{2m,s}(\xi, \lambda) \cos(2s\eta), \\ u_{2m+1}(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} F_{2m+1,s}(\xi, \lambda) \cos(2s+1)\eta, \\ u_{2m}^*(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} G_{2m,s}(\xi, \lambda) \sin(2s\eta), \\ u_{2m+1}^*(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} G_{2m+1,s}(\xi, \lambda) \sin(2s+1)\eta, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (m = 0, 1, 2, \dots) \\ (m = 0, 1, 2, \dots) \\ (m = 1, 2, \dots) \\ (m = 0, 1, 2, \dots). \end{array}$$

(1) C. AGOSTINELLI, «Atti della Accademia delle Scienze di Torino», vol. 86, 1951-52 e lav. prec. ivi citati; vedi anche: A. PIGNEDOLI, «Actes du IX Congrès intern. de Mécanique appliquée», Bruxelles 1956 (in corso di stampa).

Dunque, evidentemente, la (9) ammetterà soluzioni dei quattro tipi seguenti  $V$ ,  $\bar{V}$ ,  $V^*$  e  $\bar{V}^*$ :

$$(14) \quad V = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} u_{2m}(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \cos(2s\eta) \sum_{m=0}^{\infty} F_{2m,s}(\xi, \lambda),$$

$$(15) \quad \bar{\nabla} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} u_{2m+1}(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} \cos(2s+1)\eta \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m+1} F_{2m+1,s}(\xi, \lambda),$$

$$(I6) \quad V^* = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* u_m^*(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} \text{sen}(2s\eta) \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* G_{2m,s}(\xi, \lambda),$$

$$(17) \quad \bar{V}^* = \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}^* u_{2m+1}^*(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \text{sen}(2s+1) \eta \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}^* G_{2m+1,s}(\xi, \lambda);$$

dove le  $c_{2m}$ ,  $c_{2m+1}$ ,  $c_{2m}^*$ ,  $c_{2m+1}^*$  sono costanti arbitrarie. Sul contorno ellittico deve essere:

$$(18) \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial \xi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V^*}{\partial \xi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{V}^*}{\partial \xi} = 0, \quad \text{per } \xi = \xi_0.$$

Le condizioni soprascritte, esplicitate, diventano:

$$(18_1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2s\eta) \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{C}_{2m} F'_{2m,s}(\xi_0, \lambda) = 0,$$

$$(I8_2) \quad \sum_{s=0}^{\infty} \cos(2s+1)\eta \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} F_{2m+1,s}(\xi_0, \lambda) = 0,$$

$$(I8_3) \quad \sum_{s=1}^{\infty} \operatorname{sen}(2s\eta) \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m}^* G'_{2m,s}(\xi_0, \lambda) = 0,$$

$$(18_4) \quad \sum_{s=0}^{\infty} \operatorname{sen}(2s+1)\eta \sum_{m=0}^{\infty} \zeta_{2m+1}^* G'_{2m+1,s}(\xi_0, \lambda) = 0,$$

dove gli apici indicano derivazione rispetto a  $\xi$ . Poiché i coefficienti rispettivi di  $\cos(2s\eta)$ ,  $\cos(2s+1)\eta$ ,  $\sin(2s\eta)$ ,  $\sin(2s+1)\eta$  debbono essere uguali a zero per ogni valore dell'indice  $s$ , avremo, per la determinazione degli autovalori del parametro  $\lambda$ , i quattro seguenti sistemi di infinite equazioni lineari in infinite incognite:

[illegible]

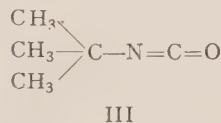
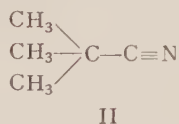
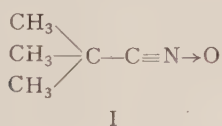
[illegible]





**Chimica fisica.** — *Ricerche spettroscopiche sui nitrilossidi.* — II. *Spettri I. R. del trimetilacetonnitrilossido e del terz. butilisocianato* <sup>(\*)</sup>. Nota di S. CALIFANO, R. SCARPATI e G. SPERONI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio F. GIORDANI.

Negli spettri I. R. di alcuni nitrilossidi aromatici (2, 4, 6-trimetilbenzonnitrilossido, 2, 3, 5, 6-tetrametilbenzonnitrilossido, 4-clorobenzonnitrilossido), oggetto di una precedente Nota <sup>(1)</sup>, è stata identificata una banda di elevata intensità a circa  $1300\text{ cm}^{-1}$ , assente negli spettri dei corrispondenti nitrili e da noi associata alla presenza del legame  $\text{N} \rightarrow \text{O}$ . La comparsa di questa banda è collegata con lo spostamento verso le alte frequenze (ca.  $70\text{ cm}^{-1}$ ) e con l'aumento dell'intensità e dell'ampiezza a mezz'altezza, della banda della oscillazione di valenza del legame  $\text{C} \equiv \text{N}$ , presente negli spettri dei nitrili a circa  $1200\text{ cm}^{-1}$  <sup>(2)</sup>. Il confronto degli spettri dei nitrilossidi con quelli dei corrispondenti nitrili, lascia intravedere un notevole accoppiamento delle oscillazioni del gruppo  $\text{C} - \text{C} \equiv \text{N} \rightarrow \text{O}$  con quelle dell'anello benzenico; per conseguenza, data anche la complessità degli spettri, non è facile individuare tutte le bande dovute ad oscillazioni nelle quali è impegnato il gruppo  $\text{C} - \text{C} \equiv \text{N} \rightarrow \text{O}$ . D'altra parte, per poter interpretare la struttura del sistema  $-\text{C} \equiv \text{N} \rightarrow \text{O}$  sulla base dei risultati spettroscopici, è indispensabile spiegare come, anche per il sistema  $-\text{N} = \text{C} = \text{O}$  degli isocianati, isomeri dei nitrilossidi, si osservano, se pur con diversa intensità, due bande negli stessi intervalli di frequenza (ca.  $2300$  e  $1350\text{ cm}^{-1}$ ). Abbiamo pertanto rivolto la nostra attenzione all'unico nitrilossido alifatico finora noto, il trimetilacetonnitrilossido I, recentemente sintetizzato <sup>(3)</sup>, la cui formula lascia prevedere una relativa semplicità dello spettro e quindi la possibilità di un assegnamento completo delle bande alle corrispondenti oscillazioni normali; in questa Nota viene riferito sullo studio condotto sugli spettri, nella zona tra  $3600$  e  $650\text{ cm}^{-1}$ , del trimetilacetonnitrilossido I e dei corrispondenti nitrile II e isocianato III.



(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e nell'Istituto di Chimica Organica della Università di Napoli.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) S. CALIFANO, R. MOCCIA, R. SCARPATI e G. SPERONI, « J. Chem. Phys. », **26**, 1777 (1957).

(2) Risultati analoghi sono stati rilevati da E. BORELLO e M. COLOMBO, « Annali di Chim. », **46**, 1158 (1956).

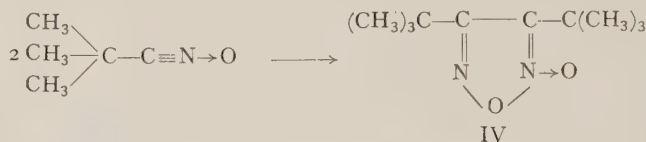
(3) G. SPERONI e R. SCARPATI, « Tetrahedron », in corso di pubblicazione.

## PARTE SPERIMENTALE

Gli spettri sono stati eseguiti con uno spettrografo Perkin-Elmer, mod. 13 C a doppio raggio, equipaggiato con un prisma di LiF nella zona 3600-2000  $\text{cm}^{-1}$  e con un prisma di NaCl nella zona 2000-650  $\text{cm}^{-1}$ .

Le sostanze sono state esaminate sia allo stato liquido sotto forma di film tra finestre di NaCl, sia in soluzione di  $\text{CCl}_4$ .

Il trimetilacetonnitrilossido, pur presentando notevole stabilità rispetto ad altri nitrilossidi <sup>(3)</sup>, dimerizza abbastanza velocemente a furossano IV:



Poiché la formazione di tracce di furossano è inevitabile nell'intervallo di tempo che intercorre fra la preparazione del composto e l'esecuzione dello

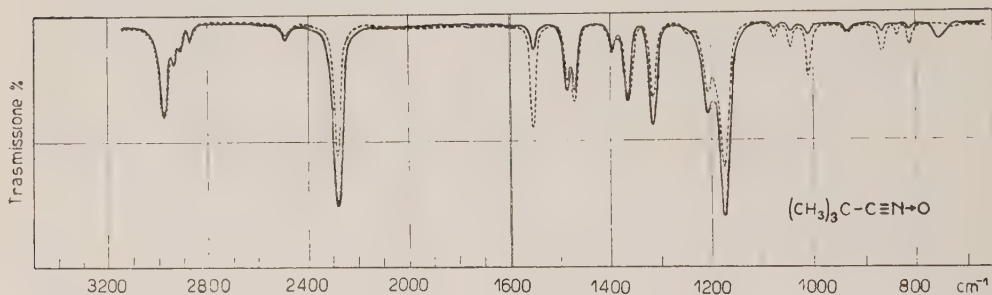


Fig. 1.

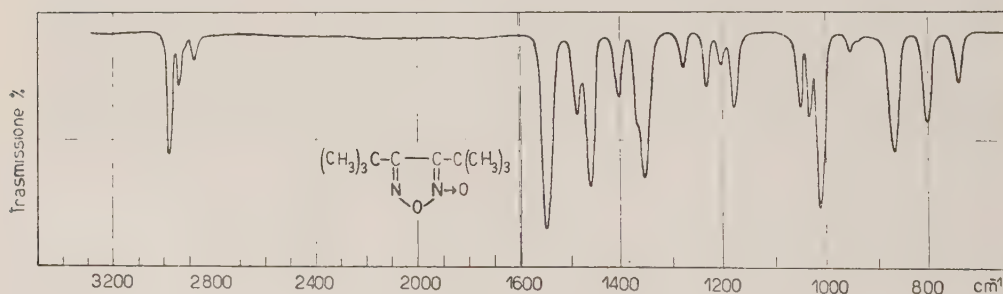


Fig. 2.

spettro, la dimerizzazione è stata seguita spettroscopicamente in funzione del tempo. A tale scopo il nitrilossido, accuratamente purificato per distillazione sotto vuoto, è stato esaminato allo stato liquido, ad intervalli regolari di tempo; nella fig. 1 è riportato lo spettro registrato pochi minuti dopo la distillazione (linea intera) e dopo due ore (linea tratteggiata); nella fig. 2 è riportato per confronto lo spettro del furossano. È possibile così localizzare

le bande del gruppo  $C \equiv N \rightarrow O$ , che sono quelle che diminuiscono di intensità al progredire della dimerizzazione, e quelle dovute al furossano che si forma, le quali invece aumentano di intensità col passare del tempo.

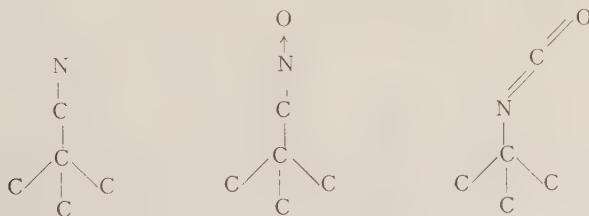
Le misure d'intensità sono state eseguite in soluzione di  $CCl_4$ , usando celle dello spessore di 0,0978, 0,0498 e 0,0202 cm. (spessori misurati interferometricamente), mentre una cella a spessore variabile, posta nel raggio di riferimento, serviva a compensare l'assorbimento del solvente. I valori delle intensità integrali di assorbimento sono stati calcolati con il metodo di integrazione diretta, proposto da Ramsay <sup>(4)</sup> nella ipotesi che la banda in esame sia rappresentabile da una funzione di Lorentz. I valori così determinati concordano in genere entro il 5–10 % con quelli ottenuti per integrazione grafica, specie per bande come quella del  $C \equiv N$  <sup>(5)</sup> per le quali la forma non si discosta molto da quella teorica; abbiamo seguito questo metodo per la sua estrema semplicità, ritenendo la maggiore precisione, assicurata dall'integrazione grafica, superflua ai nostri scopi, date le notevolissime differenze di intensità delle bande studiate nei composti in esame ed in considerazione anche dell'incertezza della concentrazione del trimetil-acetonitrilossido derivante dalla presenza del furossano (ca. 1 %).

Per la preparazione delle soluzioni di isocianato, allo scopo di evitare gli inconvenienti dovuti alla sua alta tensione di vapore ed alla sua estrema sensibilità all'umidità, il prodotto è stato introdotto in fiale di vetro sottile direttamente dal recipiente di raccolta della ultima distillazione sotto vuoto, effettuata per la sua purificazione; le fiale, immediatamente saldate e pesate, venivano rotte dentro il solvente contenuto nei palloncini tarati. Le misure con soluzioni e differenti concentrazioni, realizzate con questi accorgimenti, erano perfettamente concordanti tra loro.

## DISCUSSIONE DEI RISULTATI

Nella tabella I sono riportate le frequenze di assorbimento per i tre composti studiati, sia allo stato liquido che, nelle zone di sufficiente trasmissione del solvente, in soluzione di  $CCl_4$ .

Dato che in tutti i composti è contenuto il raggruppamento  $C(CH_3)_3$ , discuteremo in primo luogo l'assegnazione delle bande dovute alle oscillazioni dei gruppi  $CH_3$ , contemporaneamente per i tre composti; esamineremo poi separatamente le oscillazioni degli scheletri molecolari:



(4) D. A. RAMSAY, « J. Am. Chem. Soc. », 74, 72 (1952).

(5) P. SENSI e G. GALLO, « Gazz. Chim. It. », 85, 224, 235 (1955).



TABELLA I.

*Spettri I. R. del trimetilacetonnitrile, del trimetilacetonnitrilossido e del  
terz. butilisocianato.*

$(\text{CH}_3)_3\text{C}-\text{C}\equiv\text{N}$				$(\text{CH}_3)_3\text{C}-\text{C}\equiv\text{N}\rightarrow\text{O}$				$(\text{CH}_3)_3\text{C}-\text{N}=\text{C}=\text{O}$			
Liquido		In $\text{CCl}_4$		Liquido		In $\text{CCl}_4$		Liquido		In $\text{CCl}_4$	
$\nu$	I	$\nu$	I	$\nu$	I	$\nu$	I	$\nu$	I	$\nu$	I
2979	<i>f</i>	2980	<i>f</i>	2974	<i>f</i>	2979	<i>f</i>	2978	<i>m</i>	2979	<i>m</i>
2936	<i>m</i>	2933	<i>m</i>	2936	<i>d</i>	2934	<i>d</i>	2934	<i>d</i>	2932	<i>d</i>
2909	<i>d</i>	2906	<i>d</i>	2909	<i>d</i>	2906	<i>d</i>	2909	<i>d</i>	2906	<i>d</i>
2877	<i>d</i>	2876	<i>d</i>	2874	<i>d</i>	2874	<i>d</i>	2876	<i>d</i>	2876	<i>d</i>
						2645	<i>dd</i>				
				2490	<i>d</i>	2503	<i>d</i>				
2232	<i>m</i>	2234	<i>m</i>	2281	<i>ff</i>	2278	<i>ff</i>	2256	<i>ff</i>	2251	<i>ff</i>
1621	<i>dd</i>										
1480	<i>f</i>	1477	<i>f</i>	1482	<i>m</i>	1480	<i>m</i>	1482	<i>dd</i>	1474	<i>dd</i>
1461	<i>f</i>	1461	<i>f</i>	1461	<i>m</i>	1458	<i>m</i>	1459	<i>d</i>	1459	<i>d</i>
1398	<i>d</i>	1398	<i>m</i>	1396	<i>d</i>	1398	<i>d</i>	1392	<i>d</i>	1394	<i>d</i>
1368	<i>f</i>	1368	<i>f</i>	1366	<i>m</i>	1366	<i>m</i>	1366	<i>m</i>	1366	<i>m</i>
1245	<i>f</i>	1245	<i>f</i>	1316	<i>f</i>	1326	<i>f</i>	1233	<i>m</i>	1234	<i>m</i>
1210	<i>f</i>	1210	<i>f</i>	1206	<i>m</i>	1207	<i>m</i>				
				1176	<i>ff</i>	1179	<i>ff</i>	1186	<i>m</i>	1188	<i>m</i>
1151	<i>dd</i>										
1037	<i>dd</i>							1037	<i>d</i>		
937	<i>m</i>	937	<i>d</i>								
872	<i>d</i>										
								847	<i>m</i>	848	<i>m</i>
				837	<i>d</i>						
				758	<i>d</i>						
687	<i>m</i>										

I. - OSCILLAZIONI DEI GRUPPI  $\text{CH}_3$ .

Nella tabella II sono riunite le frequenze da noi assegnate, sulla base dell'assegnamento proposto da Sheppard e Simpson<sup>(6)</sup> per il gruppo butilico terziario, alle oscillazioni dei gruppi  $\text{CH}_3$  nei composti I, II e III; queste

(6) N. SHEPPARD e D. SIMPSON, « Quart. Reviews », 7, 19 (1953).

bande sono altamente caratteristiche e la loro individuazione non presenta incertezze.

TABELLA II.  
*Frequenze delle bande dei gruppi CH<sub>3</sub>.*

$(\text{CH}_3)_3\text{C}-\text{C}\equiv\text{N}$	$(\text{CH}_3)_3\text{C}-\text{C}\equiv\text{N}\rightarrow\text{O}$	$(\text{CH}_3)_3\text{C}-\text{N}=\text{C}=\text{O}$	Assegna- mento
2978	2974	2978	$\nu_{as}(\text{CH}_3)$
2936	2936	2934	
2909	2909	2909	$\nu_s(\text{CH}_3)$
2877	2874	2876	
1480	1482	1482	$\delta_{as}(\text{CH}_3)$
1461	1461	1459	
1398	1396	1392	$\delta_s(\text{CH}_3)$
1369	1366	1366	
937	936	(1037)	$\rho(\text{CH}_3)$

Per il gruppo  $\text{C}(\text{CH}_3)_3$  si devono prevedere 27 oscillazioni dovute ai gruppi  $\text{CH}_3$ : 9 di valenza e 18 di deformazione. Le nove oscillazioni di valenza si suddividono in 3 asimmetriche doppiamente degeneri e 3 simmetriche<sup>(7)</sup>; ciascun gruppo di oscillazioni dà origine a due bande, dovute rispettivamente all'oscillazione in fase e all'oscillazione in contrasto di fase dei 3 gruppi  $\text{CH}_3$ . Le quattro bande capitano per i tre composti esaminati a 2974-2978, 2934-2936, 2909, 2874-2877  $\text{cm}^{-1}$ .

Le diciotto oscillazioni di deformazione possono essere suddivise in nove oscillazioni di deformazione interna dei  $\text{CH}_3$  e nove di deformazione esterna rispetto ai legami  $\text{C}-\text{C}$ . Le prime corrispondono a tre oscillazioni asimmetriche doppiamente degeneri e a tre oscillazioni simmetriche; anche in questo caso si avranno quattro bande dovute, due a due, all'oscillazione in fase e in contrasto di fase dei tre gruppi, che si presentano, con scarti non maggiori di 4  $\text{cm}^{-1}$ , a 1480, 1461, 1396 e 1366  $\text{cm}^{-1}$ . Le nove oscillazioni di deformazione esterna possono essere raggruppate in tre oscillazioni asimmetriche doppiamente degeneri (ed a queste è stata assegnata la banda a 937  $\text{cm}^{-1}$ , unica identificata, indicata nella tabella con la lettera  $\rho$ ) e tre

(7) H. KEIL, *Dissertations*, Freiburg i. Br. (1955).

oscillazioni di torsione dei  $\text{CH}_3$  intorno ai legami  $\text{C} - \text{C}$  che capitano sempre a frequenze molto basse (ca.  $250 \text{ cm}^{-1}$ ).

A proposito del doppietto a  $1480\text{--}1461 \text{ cm}^{-1}$ , assegnato alle  $\delta_{as}(\text{CH}_3)$ , è interessante osservare che, nel caso del nitrile e del nitrilossido, appartenenti al gruppo di simmetria  $\text{C}_{3v}$ , le due componenti si presentano con eguale intensità, mentre nel caso dell'isocianato e del furossano, che hanno simmetria più bassa <sup>(8)</sup>, l'intensità relativa delle due bande varia bruscamente, diventando la banda a  $1461 \text{ cm}^{-1}$  molto più intensa dell'altra. Se esista effettivamente una dipendenza di carattere generale tra la simmetria della molecola e l'intensità relativa delle due componenti del doppietto, non è possibile decidere dall'esame di un numero così limitato di composti e pertanto ci ripromettiamo di estendere la ricerca ad una serie più ampia di composti contenenti il gruppo butilico terziario.

## II. - OSCILLAZIONI DELLO SCHELETRO MOLECOLARE.

*Trimetilacetonnitrile.* - Lo spettro del nitrile I è riportato nella fig. 3; nella tabella III sono riassunte le frequenze assegnate alle oscillazioni dello scheletro molecolare.

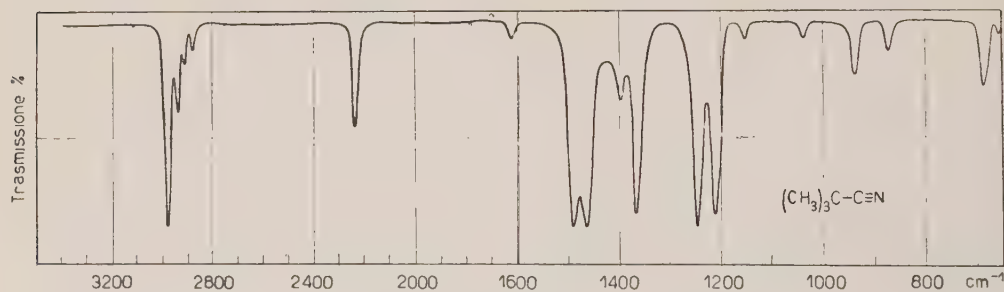


Fig. 3.

Poiché lo scheletro della molecola è costituito da 6 atomi, si dovranno avere 12 oscillazioni normali che si suddividono, per il gruppo di punti  $\text{C}_{3v}$ , in 4 oscillazioni di classe  $A_1$  e 4 di classe  $E$  doppiamente degeneri.

Le quattro oscillazioni di classe  $A_1$  possono essere considerate come essenzialmente localizzate in una  $\nu(\text{C} \equiv \text{N})$ , in una  $\nu_s(\text{C} - \text{C})$  in cui sono impegnati essenzialmente i tre legami  $\text{C} - \text{C}$  equivalenti, in una  $\nu_s(\text{C} - \text{C})$  in cui è fondamentalmente impegnato il legame  $\text{C} - \text{C} (\equiv \text{N})$  ed in una oscillazione di deformazione simmetrica degli angoli  $\text{C} - \text{C} - \text{C}$ . Le quattro oscil-

(8) Nell'indicare la reazione di dimerizzazione del nitrilossido abbiamo adottato per il furossano la formula classica; il problema della struttura dei furossani è tuttavia ampiamente in discussione e l'assegnamento dello spettro di questi composti risulta molto complesso; qualunque sia l'effettiva struttura, è indubbio però che al massimo si può raggiungere la simmetria  $\text{C}_{2v}$ .

lazioni di classe E possono a loro volta essere considerate come una  $\nu_{as}(C-C)$ , due  $\delta_{as}(C-C)$  ed una  $\delta(N \equiv C-C)$ .

TABELLA III.

*Frequenze delle bande di oscillazione dello scheletro molecolare del trimetil-acetonitrile e del trimetilacetoniitrilossido.*

Classe di simmetria	$(CH_3)_3C-C \equiv N$			$(CH_3)_3C-C \equiv N \rightarrow O$			Assegnamento
	N°	$\nu$	intensità	N°	$\nu$	intensità	
$A_1$	$\nu_1$	2232	<i>m</i>	$\nu_1$	2281	<i>ff</i>	$\nu(C \equiv N)$
"	$\nu_2$	1244	<i>f</i>	$\nu_2$	1316	<i>m</i>	$\nu_s(C-C)$
"	—	—	—	$\nu_3$	1176	<i>ff</i>	$\nu(N \rightarrow O)$
"	$\nu_3$	688	<i>d</i>	$\nu_4$	758	<i>d</i>	$\nu_s(C-C)$
"	$\nu_4$	—	—	$\nu_5$	—	—	$\delta_s(C-C)$
E	$\nu_5$	1210	<i>f</i>	$\nu_6$	1206	<i>m</i>	$\nu_{as}(C-C)$
"	$\nu_6-\nu_8$	—	—	$\nu_7-\nu_{10}$	—	—	—

Sottratte le bande assegnate alle oscillazioni dei gruppi  $CH_3$ , restano nello spettro del nitrile, nella zona esaminata, quattro bande, una di media intensità a  $2232\text{ cm}^{-1}$ , due, molto intense, a  $1245$  e a  $1210\text{ cm}^{-1}$  ed una debole a  $688\text{ cm}^{-1}$ . La banda a  $2232\text{ cm}^{-1}$ , corrisponde alla ben nota banda dei nitrili alifatici ed il basso valore del coefficiente integrale di assorbimento (vedi tabella V) è in ottimo accordo con i valori trovati da Sensi e Gallo<sup>(5)</sup> per una serie di nitrili alifatici. Sulla base dell'assegnamento proposto da Sheppard e Simpson<sup>(6)</sup> per il gruppo butilico terziario, la banda a  $1245\text{ cm}^{-1}$  deve essere attribuita alla  $\nu_2$  e la banda a  $1210\text{ cm}^{-1}$  alla  $\nu_5$  (corrispondente alla  $\nu_3$  dell'assegnamento di Sheppard e Simpson), le quali, negli idrocarburi contenenti un gruppo  $-C(CH_3)_3$ , capitano rispettivamente nell'intervallo  $1252-1236\text{ cm}^{-1}$  e  $1220-1200\text{ cm}^{-1}$ ; analogamente la banda a  $688\text{ cm}^{-1}$  va assegnata all'altra  $\nu(C-C)$  di classe  $A_1$ , che, per gli idrocarburi, varia tra  $680$  e  $750\text{ cm}^{-1}$  e, sempre molto debole, è assai sensibile, come posizione, alle variazioni di massa del resto della molecola.

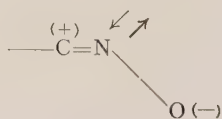
*Trimetilacetoniitrilossido.* — Lo spettro del trimetilacetoniitrilossido I è riportato nella fig. 1 e le frequenze assegnate alle oscillazioni dello scheletro molecolare sono indicate nella tabella III, insieme a quelle del nitrile. Nel caso del nitrilossido, lo scheletro molecolare è costituito da sette atomi e quindi si avranno 15 oscillazioni normali che, per il gruppo di punti  $C_{3v}$ ,



si suddividono in cinque oscillazioni di classe  $A_1$  e cinque di classe  $E$  doppiamente degeneri. Pertanto, in più delle quattro oscillazioni di classe  $A_1$  già descritte per il nitrile, comparirà una oscillazione essenzialmente localizzata in una  $\nu(N \rightarrow O)$ , mentre, in luogo della oscillazione di deformazione  $\delta(N \equiv C - C)$  si avranno due oscillazioni di deformazione  $\delta(O \leftarrow N \equiv C - C)$ .

Paragonando gli spettri del nitrile e del nitrilossido, si nota che la  $\nu(C \equiv N)$ , in accordo con quanto già osservato per i nitrilossidi aromatici<sup>(9)</sup>, si sposta verso le alte frequenze, da 2232 a 2281  $\text{cm}^{-1}$  e, contemporaneamente aumentano l'intensità e l'ampiezza a mezz'altezza. Calcoli quantomeccanici<sup>(9)</sup> mostrano che l'indice di legame  $C \equiv N$  aumenta nei nitrilossidi rispetto ai nitrili in conseguenza del fatto che anche le coppie elettroniche dell'ossigeno sono ora parzialmente impegnate nel legame  $C \equiv N$  e ciò può spiegare lo spostamento delle  $\nu(C \equiv N)$  verso le alte frequenze; d'altra parte, poiché anche l'accoppiamento della  $\nu(N \rightarrow O)$  con la  $\nu(C \equiv N)$  sposta quest'ultima verso le alte frequenze, non è improbabile che i due effetti contribuiscano a determinare il notevole spostamento difficilmente interpretabile in base al solo accoppiamento meccanico.

Dai valori dei coefficienti integrali di assorbimento, riportati nella tabella V, risulta che l'intensità della  $\nu(C \equiv N)$  del trimetilacetonnitrilossido, è 40 volte più elevata di quella della  $\nu(C \equiv N)$  del corrispondente nitrile; questa variazione deve essere attribuita alla presenza del legame  $N \rightarrow O$ , nel senso che, nella oscillazione del  $C \equiv N$ , tende a stabilirsi la configurazione limite



in cui compare il doppietto libero sull'azoto, con conseguente forte variazione del momento e quindi dell'intensità, mentre nel caso del nitrile, nello stabilirsi della struttura limite, la variazione del momento risulta più bassa, data la presenza di un doppietto libero già nella forma fondamentale.

La differenza d'intensità della  $\nu(C \equiv N)$  dei nitrili e dei nitrilossidi sembra un comportamento del tutto generale: già nella precedente nota<sup>(1)</sup> avevamo infatti rilevato qualitativamente il fenomeno per i benzonitrilossidi esaminati; a conferma di ciò abbiamo misurato le intensità del 2, 4, 6-trimetilbenzonitrilossido e del corrispondente nitrile che sono riportate nella tabella V; si può osservare che l'intensità del nitrilossido aromatico è maggiore di quella dell'analogo alifatico, con un comportamento parallelo a quello dei nitrili, già messo in evidenza da altri Autori<sup>(10)</sup>.

(9) G. DEL RE, «Atti Acc. Naz. Lincei», [VIII] 22, 491 (1957).

(10) Vedi nota (5) e M. W. SKINNER, H. W. THOMPSON, «J. Chem. Soc.», 487 (1955).

Accanto allo spostamento della  $\nu(\text{C} \equiv \text{N})$  verso le alte frequenze, la caratteristica principale dello spettro del trimetilacetoniitrilossido, rispetto a quello del nitrile, consiste nella comparsa di una nuova banda intensissima a  $1176 \text{ cm}^{-1}$ ; questa banda è chiaramente legata alla oscillazione di valenza del legame  $\text{N} \rightarrow \text{O}$ , tuttavia il suo assegnamento deve tener conto del fatto che la  $\nu_s(\text{C} - \text{C})$  di classe  $A_1$ , presente nel nitrile a  $1244 \text{ cm}^{-1}$ , si sposta nel nitrilossido a  $1316 \text{ cm}^{-1}$ , denunciando un forte accoppiamento delle due oscillazioni, in seguito al quale la  $\nu(\text{N} \rightarrow \text{O})$  compare spostata verso le basse e la  $\nu_s(\text{C} - \text{C})$  verso le alte frequenze. È noto che l'accoppiamento può avvenire solo se le oscillazioni, che vi prendono parte, sono della stessa classe di simmetria; per questa ragione l'oscillazione di classe E,  $\nu_{as}(\text{C} - \text{C})$ , presente nel nitrile a  $1210 \text{ cm}^{-1}$ , pur avendo una frequenza più vicina a quella della  $\nu(\text{N} \rightarrow \text{O})$ , non può partecipare all'accoppiamento e di conseguenza la sua frequenza resta praticamente immutata nel nitrilossido ( $1206 \text{ cm}^{-1}$ ). L'altra  $\nu(\text{C} - \text{C})$ , che compare nel nitrile a  $688 \text{ cm}^{-1}$ , è, secondo Sheppard e Simpson, come abbiamo già riferito, molto sensibile alle variazioni di massa, e la sua frequenza aumenta al crescere di questa; di conseguenza essa si trova, nello spettro del nitrilossido, spostata a  $758 \text{ cm}^{-1}$ , sempre con bassa intensità.

I vari Autori, che hanno studiato il comportamento spettroscopico di N-ossidi, hanno assegnato all'oscillazione di valenza del legame  $\text{N} \rightarrow \text{O}$ , frequenze comprese in un ampio intervallo: Goubeau e Fromme<sup>(11)</sup>, nell'assegnamento completo dell'N-ossido di trimetilammina, tenendo conto dell'accoppiamento con altre oscillazioni molecolari, assegnano alla  $\nu(\text{N} \rightarrow \text{O})$  la frequenza di  $947 \text{ cm}^{-1}$  e in accordo con questi Autori, Mathis-Noël, Wolf e Gallois<sup>(12)</sup> trovano per la  $\nu(\text{N} \rightarrow \text{O})$  in una serie di N-ossidi di trialkilammine, frequenze comprese tra  $970\text{--}950 \text{ cm}^{-1}$ ; d'altra parte Sartori, Costa e Blasina<sup>(13)</sup> per l'N-ossido di piridina e per alcuni derivati para sostituiti, e successivamente Wiley e Slaymaker<sup>(14)</sup>, per N-ossidi di omologhi della piridina e per N-ossidi della pirimidina e omologhi, assegnano alla  $\nu(\text{N} \rightarrow \text{O})$  una banda compresa tra  $1255$  e  $1304 \text{ cm}^{-1}$ .

Quando si voglia trarre conclusioni sul carattere del legame  $\text{N} \rightarrow \text{O}$ , in base alle frequenze di oscillazione, si deve tener presente che queste possono essere influenzate essenzialmente da due fattori; variazione della costante di forza del legame e accoppiamento con altre frequenze. È fuori dubbio che al passaggio da N-ossidi di ammine terziarie (azoto ibridato  $\text{sp}^3$ ) a N-ossidi con azoto ibridato  $\text{sp}^2$  (N-eteri delle ossime<sup>(15)</sup>, N-ossidi della piridina ecc.) o  $\text{sp}$  (nitrilossidi), il primo fattore si faccia sensibilmente sentire, in conseguenza del possibile carattere di doppio legame dell' $\text{N} \rightarrow \text{O}$ . Questo infatti

(11) J. GOUBEAU, I. FROMME, « Z. Anorg. Chem. », 258, 16 (1949).

(12) R. MATHIS-NOËL, M. M. R. WOLF e F. GALLOIS, « Compt. Rend. », 242, 1873 (1956).

(13) G. SARTORI, G. COSTA e P. BLASINA, « Gazz. Chim. It. », 85, 1085 (1955); G. COSTA e P. BLASINA, « Z. Phys. Chem. N. F. », 4, 24 (1955); 5, 123 (1956).

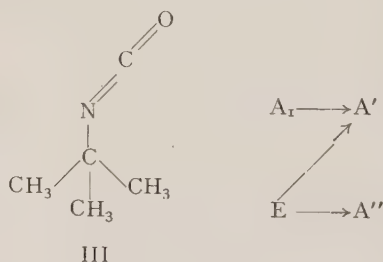
(14) R. H. WILEY and S. C. SLAYMAKER, « J. Am. Chem. Soc. », 79, 2233 (1957).

(15) W. LUTTKE e S. CALIFANO, in corso di pubblicazione.

spiega la notevole differenza fra le  $\nu(\text{N} \rightarrow \text{O})$  degli N-ossidi di ammine terziarie ( $950\text{--}970\text{ cm}^{-1}$ ) e la  $\nu(\text{N} \rightarrow \text{O})$  di tutti gli altri composti ( $1170\text{--}1300\text{ cm}^{-1}$ ). Se però si vuole paragonare la frequenza di oscillazione del legame  $\text{N} \rightarrow \text{O}$  degli N-ossidi degli eterociclici con quella dei nitrilossidi, bisogna considerare l'influenza del secondo fattore che può determinare spostamenti sia verso le alte, sia verso le basse frequenze a seconda della posizione relativa dell'altra componente dell'accoppiamento. È difficile però dire se il più alto valore della  $\nu(\text{N} \rightarrow \text{O})$  degli ossidi degli eterociclici rispetto a quello del trimetilacetonnitrilossido, corrisponde effettivamente ad un maggior carattere di doppio legame nei primi, quale ci si dovrebbe aspettare in base alle possibili forme mesomeriche correlate al rispettivo comportamento reattivo <sup>(16)</sup>, oppure in conseguenza di una favorevole combinazione di accoppiamenti, in relazione ai quali nulla è riferito nei lavori citati per N-ossidi degli eterociclici.

Resta d'altra parte il fatto che la  $\nu(\text{N} \rightarrow \text{O})$  dei nitrilossidi aromatici è notevolmente più alta (ca.  $1350\text{ cm}^{-1}$ ); per quanto, anche da un superficiale confronto degli spettri di questi con quelli dei corrispondenti nitrili, risulti che la  $\nu(\text{N} \rightarrow \text{O})$ , in seguito ad accoppiamento, è spostata verso le alte frequenze, ci ripromettiamo di ritornare sull'argomento, non appena sarà completato l'assegnamento degli spettri dei benzonitrilossidi.

*Terz. butilisocianato.* - Lo scheletro molecolare del *terz. butilisocianato* III è formato, come quello del trimetilacetonnitrilossido, da 7 atomi; in questo caso però, la molecola può appartenere al massimo al gruppo di punti  $C_s$ ; di conseguenza, le cinque oscillazioni di classe  $A_1$  che si avevano per il nitrilossido, diventano di classe  $A'$ , e le cinque oscillazioni di classe E si suddividono in cinque di classe  $A'$  e cinque di classe  $A''$ , come è indicato nel seguente schema:



Nella fig. 4 è riportato lo spettro dell'isocianato e nella tabella IV l'assegnamento delle frequenze dello scheletro. Data la presenza di due doppi legami accumulati con costanti di forza molto simili, le due oscilla-

(16) M. COLONNA, « Boll. Sci. Fac. Chim. Ind. (Bologna) », *I*, 134 (1940); « Gazz. Chim. It. », 82, 503 (1952); M. COLONNA e S. FATUTTA, « Gazz. Chim. It. », 83, 622 (1953).

zioni relative, in seguito al fortissimo accoppiamento <sup>(17)</sup>, perdono completamente il carattere di oscillazioni di gruppo, e danno origine ad una  $\nu_{as}$  (NCO)

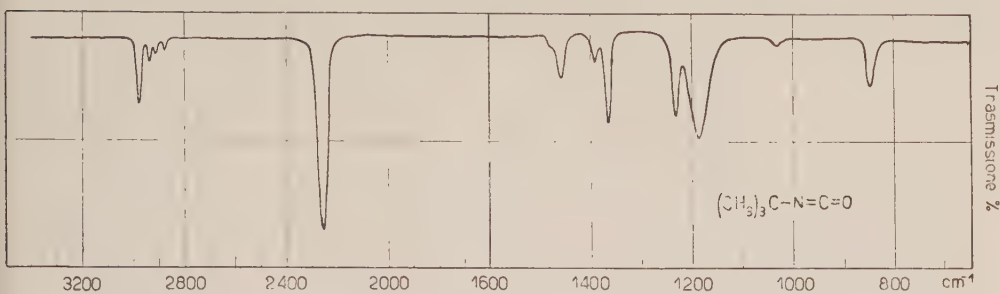


Fig. 4.

intensissima a  $2257\text{ cm}^{-1}$  e ad una  $\nu_s$  (NCO) che dovrebbe capitare, secondo quanto rilevato per altri isocianati <sup>(18)</sup>, nell'intervallo  $1400\text{--}1300\text{ cm}^{-1}$  e che, debolissima, è stata in genere localizzata solo con l'aiuto degli spettri Raman.

TABELLA IV.

*Frequenze delle bande di oscillazione dello scheletro molecolare del terz. butilisocianato.*

Classe di simmetria	N°	$\nu$	intensità	assegnamento
A'	$\nu_1$	2257	<i>ff</i>	$\nu_{as}(\text{N}=\text{C}=\text{O})$
»	$\nu_2$	1233	<i>m</i>	$\nu_s(\text{C}-\text{C})$
»	$\nu_3$	1186	<i>m</i>	$\nu_{as}(\text{C}-\text{C})$
»	$\nu_4$	?	—	$\nu_s(\text{O}=\text{C}=\text{O})$
»	$\nu_5$	847	<i>d</i>	$\nu(\text{C}-\text{N}^*)$
»	$\nu_6\text{--}\nu_{10}$	—	—	—
A''	$\nu_{11}$	1186	<i>m</i>	$\nu_{as}(\text{C}-\text{C})$
»	$\nu_{12}\text{--}\nu_{15}$	—	—	—

Nella tabella V è riportato il valore del coefficiente integrale di assorbimento della  $\nu_{as}$  (NCO); questo, come si vede dal paragone con i valori rela-

(17) N. B. COLTHUP, « J. Opt. Soc. America », 40, 397 (1950); G. HERZBERG and C. REID, « Discussions Farad. Soc. », 9, 92 (1950); E. H. EYSTER and R. H. GILLETTE, « J. Chem. Phys. », 8, 369 (1940); W. H. T. DAVISON, « J. Chem. Soc. », 3712 (1953); H. HOYER, « Ber. » 89, 2677 (1956).

(18) J. H. HIBBEN, *The Raman Effect and its Chemical Applications*, Reinhold, New York 1939, p. 283.



tivi alle  $\nu(\text{C} \equiv \text{N})$  del nitrile e del nitrilossido, è il più elevato in accordo con la fortissima variazione di momento elettrico prevedibile dallo stabilizzarsi, durante l'oscillazione antisimmetrica, della forma limite con separazione di carica e scomparsa del doppietto libero all'azoto:

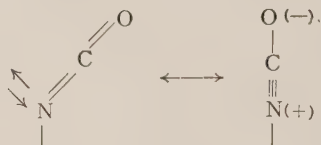


TABELLA V.

Sostanza	$\nu$	A (mol. <sup>-1</sup> 1 cm. <sup>-2</sup> )	$\Delta\nu_{1/2}^a$
$(\text{CH}_3)_3\text{C}-\text{C} \equiv \text{N}$	2232	$9,4 \times 10^2$	13
	1219	$3,6 \times 10^3$	11
$(\text{CH}_3)_3\text{C}-\text{C} \equiv \text{N} \rightarrow \text{O}$	2278	$4,4 \times 10^4$	34
	2286	$5,6 \times 10^4$	23
$(\text{CH}_3)_3\text{C}-\text{N}=\text{C}=\text{O}$	2257	$10,2 \times 10^4$	24

La più bassa simmetria molecolare dell'isocianato determina notevoli variazioni nella zona  $1000-1300 \text{ cm}^{-1}$ , rispetto allo spettro del nitrilossido; infatti scomparendo l'accoppiamento della  $\nu_s(\text{C}-\text{C})$  con la  $\nu(\text{N} \rightarrow \text{O})$ , la prima deve ritornare nella stessa posizione che aveva nel nitrile, mentre la  $\nu_{as}(\text{C}-\text{C})$  deve separarsi, anche se di poco, in due bande. In effetti la  $\nu_s'(\text{C}-\text{C})$  torna verso le basse frequenze, a  $1233 \text{ cm}^{-1}$ , e la  $\nu_{as}(\text{C}-\text{C})$  si presenta a  $1186 \text{ cm}^{-1}$ , come una banda molto larga che lascia presupporre una separazione delle due componenti.

La  $\nu(\text{C}-\text{C})$  presente nello spettro del nitrile a  $688 \text{ cm}^{-1}$  ed in quello del nitrilossido a  $758 \text{ cm}^{-1}$ , si trasforma, nel caso dell'isocianato, in una  $\nu(\text{C}-\text{N})$  e la sua frequenza aumenta ulteriormente a  $847 \text{ cm}^{-1}$ .

**Chimica biologica.** — *Sintesi del desammido-DPN dall'acido nicotinic negli eritrociti umani* (\*). Nota di A. BALLIO e G. SERLUPI-CRESCENZI, presentata (\*\*) dal Socio E. B. CHAIN.

Una recente Nota di Preiss e Handler sulla probabile natura dei prodotti intermedi che si formano nella sintesi del DPN <sup>(1)</sup> dall'acido nicotinic [1] ci induce a rendere noti alcuni nostri risultati ottenuti indipendentemente, risultati che si accordano perfettamente con quelli degli Autori americani e che chiariscono in modo inequivocabile la struttura di uno di tali intermedi.

Avevamo osservato tempo fa che tra i nucleotidi acido-solubili del *Penicillium chrysogenum* è presente un piridin-nucleotide diverso sia dal DPN che dal TPN [2]; in un recente lavoro [3] abbiamo dimostrato che questo nuovo nucleotide è l'analogo nicotinic del DPN, e cioè il desammido DPN, e abbiamo preannunciato esperienze tendenti a stabilire se esso potesse rappresentare un intermedio nella sintesi del DPN dall'acido nicotinic negli eritrociti umani. Questa nostra supposizione era giustificata dalla considerazione che, nella trasformazione dell'acido nicotinic in DPN, l'ammidazione del carbossile deve avvenire in uno stadio successivo a quello corrispondente al ribotide, stadio che potrebbe essere rappresentato appunto dal disammido DPN; infatti è noto che il ribotide della nicotinammide, che si accumula negli eritrociti umani incubati con nicotinammide [4], non può trasformarsi in DPN in quanto in queste cellule manca la DPN-pirofosforilasi che dovrebbe catalizzarne la condensazione con l'ATP [5]. Eravamo inoltre consapevoli che l'eventuale formazione del desammido DPN negli eritrociti non sarebbe stata rilevata dai metodi analitici impiegati nelle ricerche precedenti alla nostra, in quanto ci risultava che il composto isolato dal *P. chrysogenum* non forma un prodotto fluorescente di addizione con l'acetone (metodo usato per i piridin-nucleotidi «totali» [6], né viene ridotto dall'alcool etilico in presenza dell'alcool deidrogenasi (metodo usato comunemente per il DPN).

Le nostre esperienze sono state eseguite incubando sterilmente 22 ore a 37° cm<sup>3</sup> 6 di sangue umano defibrinato, 20  $\mu$  moli di acido nicotinic, 100  $\mu$  moli di tampone di fosfati a pH 7,4, 40  $\mu$  moli di solfato di magnesio e 45 mg di glucosio; tutte le soluzioni erano preparate sterilmente in cloruro sodico 0,9%; il volume finale della miscela incubata era di 9,5 cm<sup>3</sup>. Terminata l'incubazione gli eritrociti venivano sedimentati per centrifugazione ed estratti a 5° due volte con un totale di 6 cm<sup>3</sup> di acido tricloroacetico 7%.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità - Centro Internazionale di Chimica Microbiologica - Roma.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) Nel corso dell'esposizione si usano le seguenti abbreviazioni: DPN = difosfopiridin-nucleotide, TPN = trifosfopiridin-nucleotide, ATP = adenosin-5'-trifosfato.

Gli estratti tricloroacetici, limpidificati per centrifugazione, si estraevano ripetutamente con etere a 5° finché il pH saliva a 4, si portavano poi a pH 6,5 con idrato sodico e si percolavano su 2 cm<sup>3</sup> di resina Dowex-1 formiato contenuta in una colonna di 0,7 cm di diametro. Dopo avere lavato la colonna con 15 cm<sup>3</sup> di acqua, i vari prodotti si eluivano raccogliendo frazioni di 1,6 cm<sup>3</sup> ogni 10'; per l'eluizione si usava un gradiente di acido

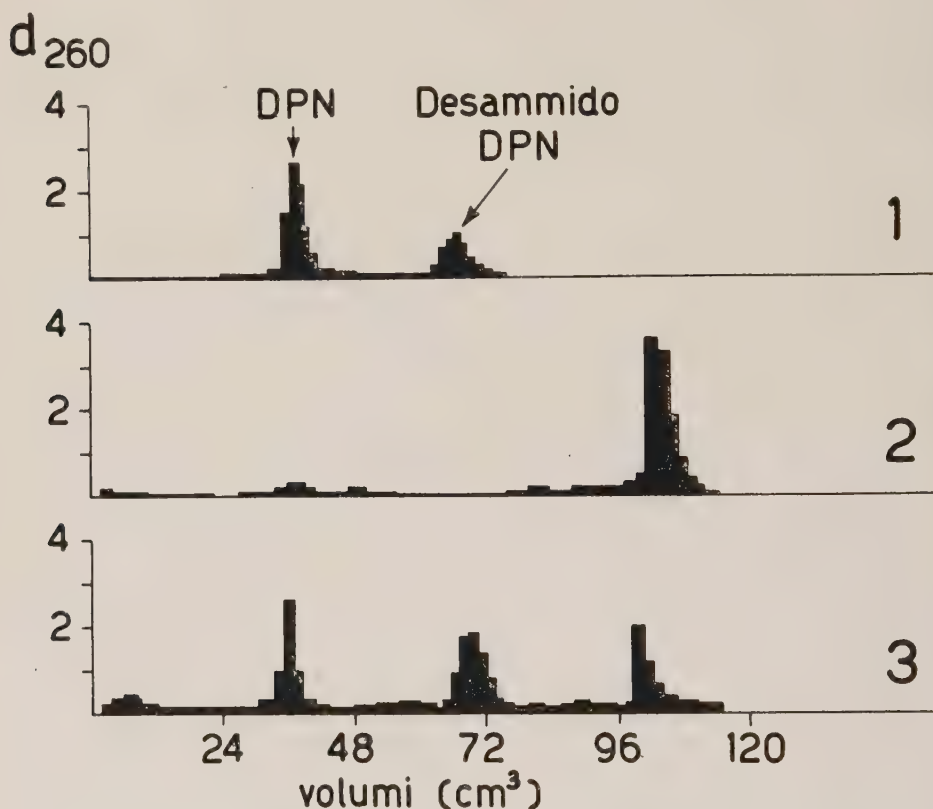


Figura 1. - Separazione del DPN dal desamido DPN su resina Dowex-1 formiato. I dettagli sono riportati nel testo.

1) Composti di riferimento. 2) Sangue defibrinato incubato nelle condizioni riportate nel testo, ma *senza* acido nicotinico. 3) come 2), ma *con* acido nicotinico.

formico, ottenuto secondo la tecnica descritta da Hurlbert e coll. [7] con le seguenti modificazioni: si usava un mescolatore contenente all'inizio 50 cm<sup>3</sup> di acqua ed una riserva con 25 cm<sup>3</sup> di acido formico N/1, al quale si facevano seguire 25 cm<sup>3</sup> di acido formico 4 N e poi 25 cm<sup>3</sup> di acido formico 2 N + formiato ammonico 0,1 M; infine si percolava la colonna con una soluzione di acido formico 4 N + formiato ammonico 0,8 M, finché la densità ottica dell'eluato a 260 mμ era pressoché nulla. In tal modo si aveva una netta separazione fra DPN e desamido DPN, mentre i nucleotidi più acidi di quest'ultimo erano eluiti dal solvente a forza ionica maggiore in un unico picco (ved. figura). Il picco la cui posizione nel diagramma di eluizione corri-

spondeva a quello del desammido DPN veniva liofilizzato e sul residuo si eseguivano (ved. Tabella I) cromatografie su carta in due solventi diversi (per entrambi si aveva un'unica macchia) e spettri di assorbimento dell'u. v. in soluzione acquosa e in soluzione idroalcolica al 50 % contenente cianuro di potassio M/1 (quest'ultima condizione determina la rapida comparsa di un nuovo massimo di assorbimento a 316 m $\mu$  [3]). Veniva in tal modo stabilito senza alcun dubbio che il prodotto isolato dagli eritrociti umani è identico a quello presente nel *P. chrysogenum* e ad un campione di desammido DPN sintetizzato per azione della DPN-asi di milza di bue su una miscela di DPN e acido nicotinico [3]. La quantità di desammido DPN ottenuta nelle condizioni sopra descritte è di circa 1  $\mu$  mole.

TABELLA I.

	Desammido DPN di riferimento	Desammido DPN degli eritrociti
<i>Cromatografie</i> (1)		
R <sub>F</sub> in acido isobutirrico-ammoniaca N/1 (100 : 60) . . . . .	0,37	0,38
R <sub>Adenosina</sub> in etanolo-acetato ammonico M/1 PH 7,5 (70 : 35) . . . . .	0,20	0,20
<i>Proprietà spettrofotometriche</i> (2)		
a pH 7:		
max (m $\mu$ ) . . . . .	258	259
min (m $\mu$ ) . . . . .	230	232
E max : E min . . . . .	2,19	1,90
E 250 : E 260 . . . . .	0,86	0,83
E 270 : E 260 . . . . .	0,74	0,77
E 280 : E 260 . . . . .	0,28	0,29
in cianuro di potassio M/1 idroalcolico:		
max del I picco (m $\mu$ ) . . . . .	260	261
max del II picco (m $\mu$ ) . . . . .	316	316
minimo (m $\mu$ ) . . . . .	289	288
E max del I picco : E min . . . . .	6,40	5,00
E max del I picco : E max del II picco	3,40	3,15
E 250 : E 260 . . . . .	0,75	0,71
E 270 : E 260 . . . . .	0,75	0,82
E 280 : E 260 . . . . .	0,30	0,35

(1) Cromatografie discendenti eseguite a 25° con carta Whatman 1 lavata con acido acetico 2 N e con acqua. Le sostanze venivano localizzate a luce u.v. (lampada germicida della General Electric Company) filtrata con filtro n. 9863 della Corning Glass Works.

(2) Spettri u.v. eseguiti con lo spettrofotometro registratore Cary mod. 11 in celle di quarzo da 1 cm.



I dati esposti in questa Nota e quelli assai interessanti avuti da Preiss e Handlér [1] incubando con acido nicotinico- $C^{14}$  un estratto di polvere acetonica di eritrociti umani, si completano vicendevolmente. Gli Autori americani suggeriscono che i due prodotti radioattivi da loro ottenuti siano il ribotide dell'acido nicotinico e il desammido DPN e si propongono di confermare tali strutture mediante ulteriori ricerche; i nostri risultati dimostrano ora che il secondo prodotto è certamente identico al desammido DPN e di conseguenza rendono più probabile anche la costituzione del primo. Gli stessi Autori, mediante un autolisato dializzato di lievito addizionato di ATP, glutamina e ioni magnesio, hanno realizzato la trasformazione a DPN del composto che ormai sappiamo con certezza essere il desammido DPN [1]. Ci appare perciò altamente probabile che negli eritrociti umani ed in vari microrganismi <sup>(2)</sup> il DPN venga sintetizzato secondo il seguente schema:



#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] J. PREISS e P. HANDLER, « J. Am. Chem. Soc. », 79, 4246 (1957).
- [2] A. BALLIO, C. CASINOVÌ e G. SERLUPI-CRESCENZI, « Biochim. Biophys. Acta », 20, 414 (1956).
- [3] G. SERLUPI-CRESCENZI e A. BALLIO, « Nature » (in corso di stampa, dal luglio 1957) e Comunicazione alla III Riunione Nazionale della Società Italiana di Biochimica, 3-6 ottobre 1957, « Riassunti », p. 122.
- [4] I. G. LEDER e P. HANDLER, « J. Biol. Chem. », 189, 889 (1951).
- [5] A. MALKIN e O. F. DENSTEDT, « Canad. J. Biochem. Physiol. », 34, 130 (1956).
- [6] N. LEVITAS, J. ROBINSON, F. ROSEN e W. A. PERLZWEIG, « J. Biol. Chem. », 167, 511 (1947).
- [7] R. B. HURLBERT, H. SCHMITZ, A. F. BRUMM e V. R. POTTER, « J. Biol. Chem. », 209, 23 (1954).
- [8] A. BALLIO, G. SERLUPI-CRESCENZI, S. RUSSI e A. TONOLO, risultati non pubblicati.

**Enzimologia.** — *Sintesi enzimatica dell'acetilmetilcarbinolo* <sup>(\*)</sup>.  
 Nota di CLAUDIO ANTONIANI e GIAN ANTONIO LANZANI, presentata <sup>(\*\*)</sup>  
 dal Socio F. GIORDANI.

Abbiamo già riferito in altra comunicazione <sup>(2)</sup> i risultati di esperienze indicanti il derivato tiolico del gruppo tiazolico della difosfo-tiamina quale gruppo attivo della cocarbolgasi.

(2) Oltre che nel *P. chrysogenum* abbiamo riscontrato recentemente la presenza del desammido DPN anche in un *Fusarium* sp. del quale stiamo studiando i nucleotidi acidolubili [8].

(\*) Lavoro eseguito nel Centro di Studio per la Chimica e Microbiologia delle Fermentazioni del C.N.R. - Sezione Chimica - Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) C. ANTONIANI e G. A. LANZANI, « Atti Accad. Naz. dei Lincei », XXII, 516 (1957).

Per la condensazione aciloinica dell'etilaldeide ad opera dei lieviti alcolici, già il Neuberg <sup>(2)</sup> ammetteva la indispensabilità di una delle due molecole di aldeide in *statu nascendi*. Secondo Antoniani <sup>(3)</sup> era da attribuirsi al lievito un'attivazione dell'aldeide per opera del gruppo tiazolico. Il Gunsalus <sup>(4)</sup> ammetteva la formazione di un composto etilaldeide-tiaminpirofosfato.

1. Partendo dal tiaminpirofosfato, e operando nelle stesse condizioni da noi usate per la preparazione del derivato tiolico <sup>(1)</sup>, in presenza però di un eccesso di etilaldeide, abbiamo isolato il prodotto di condensazione tra tiolderivato ed etilaldeide (dietilaldeide-tiolderivato).

PREPARAZIONE. — g 2 di etilaldeide in 5 ml di alcol assoluto vengono addizionati di 200 mg di cocarbossilasi cloridrato, in pallone con agitatore a valvola di mercurio. Alla sospensione si aggiungono 15 ml di alcolato sodico al 5 %, indi H<sub>2</sub>O a gocce sino a completa soluzione della cocarbossilasi. Si agita per 10'. La soluzione da gialla diventa rosso cupo. La reazione è esotermica. Si addizionano 20 ml di etere etilico, col che si ottiene la precipitazione di una sostanza gialla, che si separa per centrifugazione in ambiente secco. Si ridiscioglie il precipitato in alcol assoluto e lo si riprecipita con etere etilico, ripetendo due volte questa operazione e lavando da ultimo mediante sospensione in etere assoluto. Centrifugazione ed essiccamento del composto sotto vuoto su CaCl<sub>2</sub>. Con l'essiccamento il prodotto da giallo diventa rosso rubino.

2. Il prodotto di condensazione di cui sopra, addizionato di apocarbossilasi isolata da *Sacch. ellipsoideus*, dà luogo a formazione di acetilmetilcarbinolo (AMC).

A) dietilaldeide-tiolderivato mg 83 apocarbossilasi (*) ml 3	AMC formatosi γ 200
B) aldeide etilica mg 5 -cheto-cocarbossi-aldoligasi mg 78 apocarbossilasi ml 3	assente

(\*) apocarbossilasi estratta secondo Lohmann e Schuster da 1 g di *Sacch. ellipsoideus* e completamente dispersa in 10 ml, tampone fosfatico 0,1 M, pH 6,2.

Per quanto è a nostra conoscenza abbiamo in ciò il primo esempio di sintesi puramente enzimatica di AMC a partire dall'aldeide etilica, e per

(2) C. NEUBERG e H. OHLE, « Bioch. Z. », 127, 327 (1922).

(3) C. ANTONIANI, « Riv. Biol. », XXXVII, 122 (1944-45).

(4) I. C. GUNSALUS, *The Mechanism of Enzyme Action*, Baltimore. The John Hopkins Pres (1954).

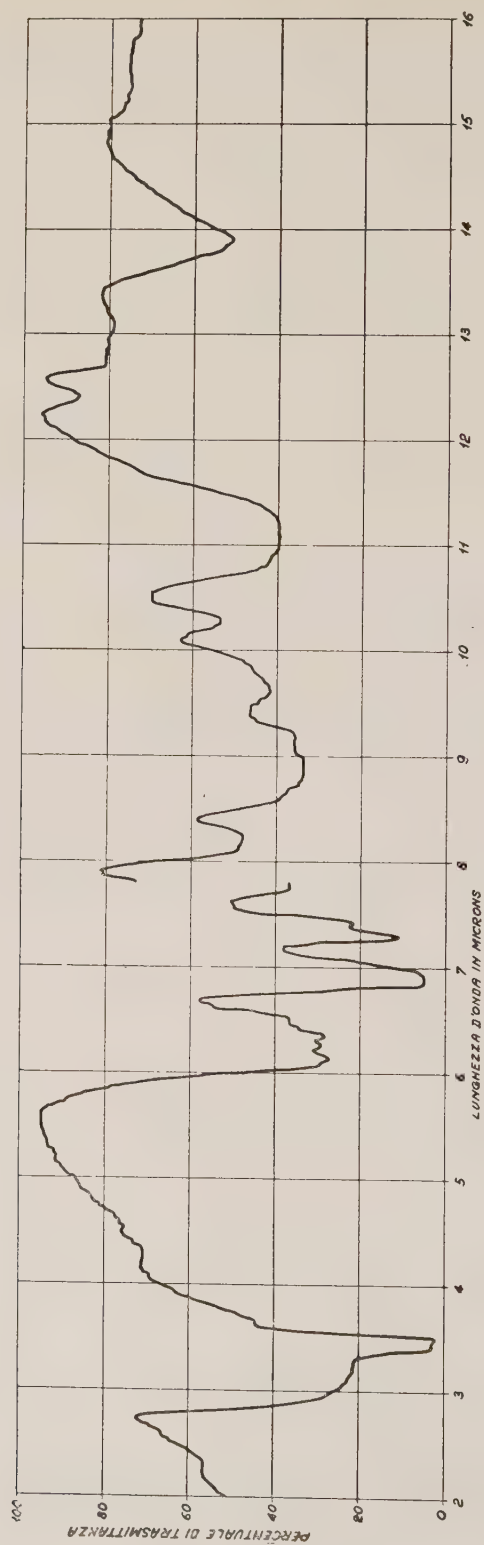


Fig. I.

opera dei soli apoenzima e coenzima specifici. Partendo da etilaldeide libera, e addizionandola di cocarbossilasi tiolica e di aporcabossilasi, non si ottiene alcuna formazione di AMC.

In A) siamo di fronte ad una etilaldeide capace di dar luogo a condensazione acetoinica, cioè ad una *aldeide etilica attiva*, tale in quanto nascente dalla scissione del dietilaldeide-tiolderivato.

In B), tale condizione mancando, non si ha formazione di AMC.

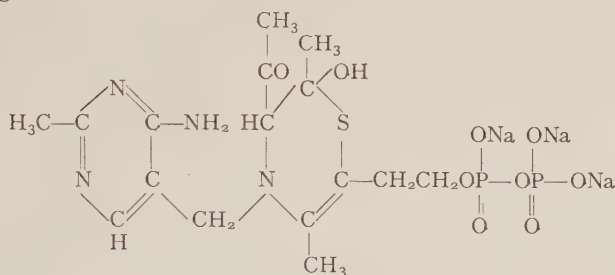
3. Il dietilaldeide-tiolderivato ha rivelato all'analisi le seguenti caratteristiche:

P.f. 119°C (con decomposizione)

P.M. (alla canfora) 658

C 27,21; H 4,45; N 8,09; P 10,10; S 4,22.

Sulla base dei dati di cui sopra proponiamo per il dietilaldeide-tiolderivato la formula seguente:



C'è una sensibile divergenza analitica solo per quanto concerne il contenuto in carbonio (teorico 28,74), ma si spiega il valore più basso del dato analitico con la non totale ossidabilità del C a cagione del forte contenuto salino.

L'annesso spettro infrarosso, eseguito dal nostro Collaboratore G. Kaderavek, conferma la formula di cui sopra. Nella zona di 3  $\mu$  appaiono gli assorbimenti dei gruppi OH ed NH<sub>2</sub>. A circa 6  $\mu$  quello del carbonile. Il gruppo di bande fra 6,1 e 6,5  $\mu$  è verosimilmente attribuibile ai due nuclei esatomici della molecola del dietilaldeide-tiolderivato.

**Biochimica.** — *Sull'elastina. — II. Presenza di mucopolisaccaridi nelle fibre di elastina* (\*). Nota (\*\*) di Lorenzo GOTTE e Vittorio MORET, presentata dal Corrisp. A. RONCATO.

Diversi Autori hanno prospettato l'ipotesi che l'elastina non sia di natura esclusivamente proteica. Infatti J. Lloyd e MacGarrod [1] hanno osservato nella elastina due frazioni diversamente resistenti all'azione solubilizzatrice del cuprammato e del m-cresolo, per cui hanno prospettato che

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica biologica e l'Istituto di Istologia e Embriologia dell'Università di Padova.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1957.



essa non sia omogenea ma che le sue fibre siano formate da due parti: una periferica (guaina) ed una centrale. Anche Gross [2-3] ritiene che l'elastina abbia una duplice composizione: fra le entità fibrillari submicroscopiche che compongono la fibra elastinica, vi sarebbe, secondo questo A., una qualche altra sostanza da lui chiamata matrice.

Sulla natura chimica della sostanza, che cementa o circonda a mo' di guaina tali entità fibrillari, le opinioni degli Autori sono discordi.

Lansing e coll. [4] avendo notato che le fibre di elastina, estratte dall'aorta con NaOH N/10, si colorano con il Bleu Nilo, che come è noto, è un colorante, anche se non strettamente specifico (Gomori [5]) dei lipidi, concludono che questo materiale è di natura lipidica e quindi che l'elastina sia da considerarsi una lipoproteina.

Adair e coll. [6], avendo constatato che nell'elastina, estratta in ambiente acido, sono presenti degli amminozuccheri, hanno invece avanzato l'ipotesi che l'elastina sia una mucoproteina. Dello stesso parere sono Banga e coll. [7], i quali hanno osservato che durante l'elastolisi ad opera della elastasi si liberano gruppi riducenti.

Anche noi, nella Nota precedente [8], per spiegare l'andamento della curva di solubilizzazione in NaOH N/10 dell'elastina, omogenea alla osservazione istologica ed elettronica, ottenuta per estrazione alcalina dal ligamento nucale sgrassato, abbiamo avanzato l'ipotesi che nella struttura di quella sia presente, oltre alla quota proteica, anche una quota non proteica a questa legata. Allo scopo di avere ulteriore suffragio per questa ipotesi abbiamo ritenuto opportuno vedere se nell'elastina (estratta in ambiente alcalino) fosse possibile dimostrare la presenza di materiale mucopolisaccaridico, il quale, come è noto, è presente nel ligamento nucale e secondo ricerche recenti, anche nelle fibre stesse di collagene (Gross, Schmitt, Highberger [9]).

#### PARTE SPERIMENTALE.

L'elastina è stata estratta dal ligamento nucale bovino, previo sgrassamento prima in acetone e successivamente in alcool-etere, nel modo descritto nella Nota precedente, cioè per trattamento alcalino (NaOH N/10 a b. m. bollente per 60') [8]. L'elastina così ottenuta (ormai priva del componente collagene), se il trattamento alcalino veniva continuato, rimaneva insolubile e praticamente costante in peso per circa due ore. Durante questo periodo, a intervalli di tempo crescenti, venivano prelevati campioni di elastina. Questi, liberati dall'NaOH per filtrazione, venivano accuratamente lavati con H<sub>2</sub>O distillata fino a reazione neutra dell'acqua di lavaggio, essiccati poi fino a peso costante. Aliquote di questi vari campioni erano sottoposti ad idrolisi acida (HCl 5N per 6 ore). Su tali idrolizzati venivano determinate le esosoammine secondo il metodo di Schloss [10], modificato da Cessi [11].

Sugli stessi idrolizzati acidi veniva eseguita la ricerca degli  $\text{SO}_4^{--}$ , precipitandoli con BaCl<sub>2</sub> secondo il metodo di Lugg. [12]. Ci si accertava che il

precipitato fosse effettivamente di  $\text{BaSO}_4$  riducendo quest'ultimo a solfuro per fusione con Na metallico ed evidenziando gli ioni  $\text{S}^{--}$  col nitroprusiato sodico.

Altre aliquote degli stessi campioni venivano reimpibite in  $\text{H}_2\text{O}$ , fissate in sublimato formolico e colorate, oltre che con la resorcin-fuxina (colorante specifico della sostanza elastica) anche con il periodato-leucofuxina (colorante specifico dei polisaccaridi) secondo il metodo di Hotchkiss [13].

## RISULTATI.

Come abbiamo riferito nella Nota precedente, durante il processo di estrazione dell'elastina dal ligamento nucale bovino, dopo i primi 60 minuti di trattamento alcalino, in cui si solubilizza circa il 30 % del materiale (essenzialmente collagene) costituente il ligamento nucale stesso, rimane un residuo insolubile (elastina) praticamente costante in peso per un certo intervallo di tempo (circa due ore).

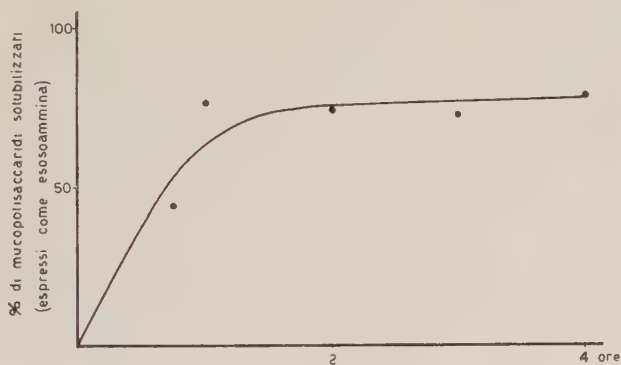


Fig. 1. - Velocità di solubilizzazione in  $\text{NaOH}$  0,1 N del materiale mucopolisaccaridico presente nel ligamento nucale sgrassato.

Premesso che durante i primi 60 minuti il collagene viene del tutto eliminato e con esso viene allontanata la massima parte (80 %) di sostanza polisaccaridica, abbiamo voluto vedere se durante le ulteriori altre due ore di azione alcalina si avesse una nuova perdita di materiale polisaccaridico. Tale perdita a priori era da escludersi perchè, come abbiamo detto prima, durante questo periodo, l'elastina ormai priva del collagene, rimaneva inalterata nel suo peso ed anche nel suo aspetto morfologico. La nostra supposizione è stata convalidata dal non aver trovato variazioni nel contenuto di mucopolisaccaridi. Ciò è dimostrato dal diagramma di fig. 1, dove in ascissa è posto il tempo di trattamento alcalino ed in ordinata la percentuale di esosoammine solubilizzate durante il trattamento medesimo, rispetto a quella del ligamento nucale di partenza.

Dal diagramma si può dedurre che sussiste un certo parallelismo fra la curva di solubilizzazione del ligamento nucale e quella della solubilizzazione delle esosoammine.

In altre parole nei primi 45-60 minuti di trattamento alcalino, durante il quale periodo il collagene viene allontanato dal ligamento nucale, non viene solubilizzata tutta la esosoammina presente nel ligamento nucale stesso ma solo l'80 % circa. Il 20 % delle esosoammine presenti nel ligamento nucale non si solubilizza ma è presente nel residuo (elastina), che rimane insolubile e praticamente costante in peso per altre due ore dopo tale primo periodo di trattamento alcalino.

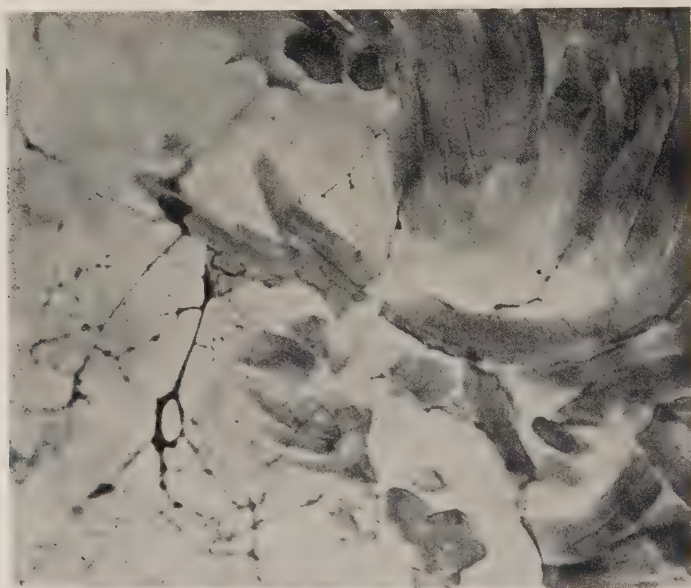


Fig. 2. - Fibre elastiche prive del collagene.  
Colorazione Hotchkiss 750  $\times$ .

Questo fatto starebbe ad indicare che nei primi 45-60 minuti, circa l'80 % del materiale mucopolisaccaridico presente nel ligamento nucale viene solubilizzato insieme al collagene, mentre l'altra parte rimane intimamente legata al residuo. In altre parole, a nostro parere, nella struttura dell'elastina, omogenea alla osservazione con il microscopio elettronico ed anche a quella dei comuni preparati istologici (almeno per quanto riguarda l'affinità alla resorcin-fuxina), è presente una quota mucopolisaccaridica la quale è intimamente legata alla elastina, come è dimostrato dal fatto che con i comuni metodi di estrazione dei mucopolisaccaridi ( $\text{CaCl}_2$  a diversi pH) questi ultimi non sono suscettibili di estrazione.

Ulteriore conferma che nell'elastina sia presente una quota mucopolisaccaridica è data anche dalla possibilità di evidenziare in essa gruppi  $\text{SO}_4^-$ .

La presenza di questi ultimi dimostrerebbe che verosimilmente si tratta di condroitinsolfato.

Abbiamo infine cercato se era possibile mettere in evidenza istochimicamente dove questo materiale mucopolisaccaridico fosse disposto nella fibra elastica.

Come abbiamo già esposto, l'elastina ottenuta dal ligamento nucale bovino sgrassato appare, dopo 60 minuti di trattamento alcalino, omogenea alla osservazione ottica previa colorazione con la resorcin-fuxina, colorante elettivo dell'elastina stessa.

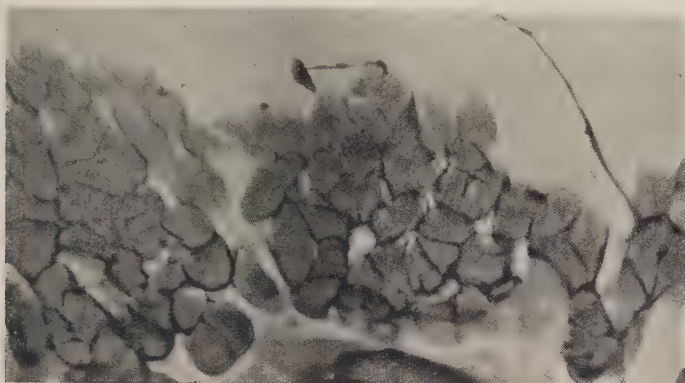


Fig. 3. - Fibre elastiche prive del collagene.  
Colorazione Hotchkiss 750  $\times$ .

Se invece l'elastina viene colorata, secondo il metodo di Hotchkiss, con il periodato-leucofuxina, colorante specifico dei polisaccaridi, si vede distintamente (figg. 2 e 3) come la colorazione non sia omogenea. Infatti le singole fibre elastiche si presentano Hotchkiss-negative, eccettuata una esile membrana periferica, Hotchkiss-positiva.

Quest'ultima quindi è con tutta verosimiglianza di natura polisaccaridica e corrisponderebbe, a nostro parere, a quella quota mucopolisaccaridica che, come abbiamo già esposto, è evidenziata chimicamente dal dosaggio delle esosoammine e dei gruppi  $\text{SO}_4^{--}$ .

Ci sembra interessante far notare che tale membrana mucopolisaccaridica, in alcuni campioni del preparato istochimico, si risolve in esili filamenti disposti in modo tale da dare l'impressione che si tratti quasi di una impalcatura che talvolta, vuotandosi, viene a perdere il materiale proteico a cui fa da supporto (fig. 2). Si noti inoltre che tali esili filamenti a maggior ingrandimento non appaiono omogenei (fig. 4): lungo la loro struttura filamentosa infatti risultano dei segmenti più scuri alternati con altri chiari.

Tale alternanza farebbe supporre che la membrana filamentosa avvolgente la fibra elastica sia costituita da mucoproteine in cui la quota pro-



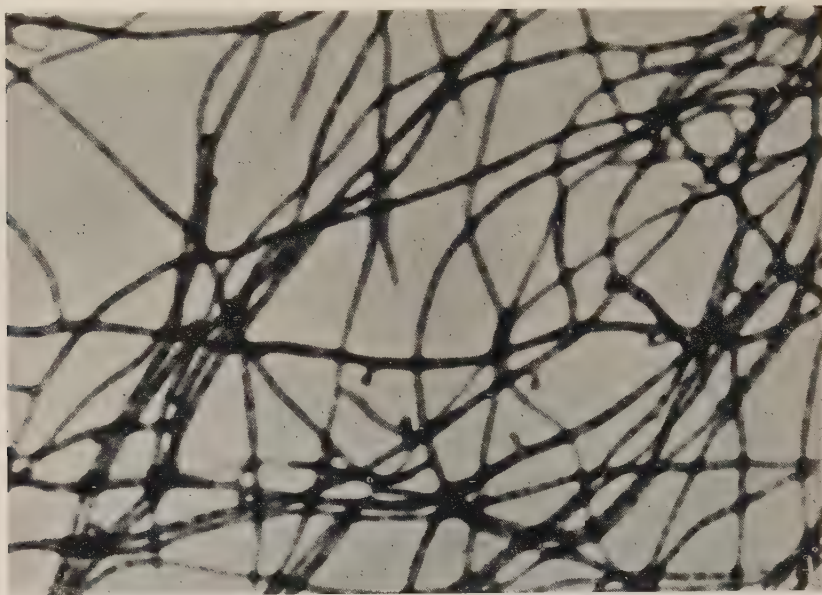


Fig. 4. - Particolare del preparato istochimico: esili filamenti costituiti da segmenti più scuri (Hotchkiss-positivi) alternati a tratti più chiari (Hotchkiss negativi). 1380  $\times$

stetica (Hotchkiss-positiva, segmento scuro) è data da condroitinsolfato e la frazione proteica corrisponderebbe al tratto Hotchkiss negativo (segmento chiaro).

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] LLOYD J., MAC GARROD, Soc. of Dyers and Colourists. Symposium on fibrous proteins, p. 46 (1946).
- [2] GROSS J., « J. Exptl. Med. », 89, 699 (1949).
- [3] GROSS J., « Proc. Soc. Exptl. Biol. Med. », 78, 241 (1951).
- [4] LANSING A. I. T., ROSENTHAL T. B., ALEX M., DEMPSEY E. W., « Anat. Rec. », 114, 555 (1954).
- [5] GOMORI G., *Microscopic Histochemistry*. The University of Chicago Press (p. 91).
- [6] PARTRIDGE S. M., DAVIS H. F., ADAIR G. S., « Biochem. J. », 61, 11 (1955).
- [7] BANGA I., SCHUBER D., « Acta Physiol. Acad. Sci. Hung. », 4, 13 (1953).
- [8] MORET V., GOTTE L., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 1957 (in corso di stampa).
- [9] SCHMITT F. O., GROSS J., HIGHBERGER J. H., *Fibrous Proteins and their biological significance*. « Symposia of the Society for experimental biology », IX, 148 (1955).
- [10] SCHLOSS B., « An. Chemistry », 23, 1321 (1951).
- [11] CESSI C., « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 28, 858 (1952).
- [12] LUGG J. W., « Biochem. J. », 32, 1143 (1938).
- [13] HOTCHKISS R. D., « Arch. of Biochem. », 16, 131 (1948).

**Fisiologia vegetale.** — *Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico.* — XXII. Sulla « monodeidroascorbico » riduttasi in pisello (\*).  
Nota di ORESTE ARRIGONI, GIÀNFRANCA ROSSI e ERASMO MARRÈ,  
presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

Recenti lavori di Mathews [1], Beevers [2], Nason et al. [3] e Kern e Racker [4], hanno dimostrato, nelle piante superiori e nel lievito, la presenza di un sistema enzimatico capace di trasportare elettroni dai coenzimi piridinici ridotti ad un composto di ossidazione dell'acido ascorbico (AA). L'incapacità dell'acido deidroascorbico (DHA) di fungere da accettore di elettroni in questa reazione, e il fatto che il composto in questione compare durante l'ossidazione dell'acido ascorbico ad acido deidroascorbico ad opera dell'ascorbico ossidasi (AAO), o di ioni quali  $\text{Cu}^{++}$  e  $\text{Fe}^{+++}$ , hanno suggerito che esso possa consistere in un composto, l'acido « monodeidroascorbico » (MDHA), a stato di ossidazione intermedio tra ascorbico e deidroascorbico [5]. In attesa di dati più precisi circa la natura chimica di questo accettore, l'enzima che ne catalizza la riduzione sembra potersi quindi definire, per brevità e comodità, come una piridinnucleotidi ridotti-« monodeidroascorbico » riduttasi.

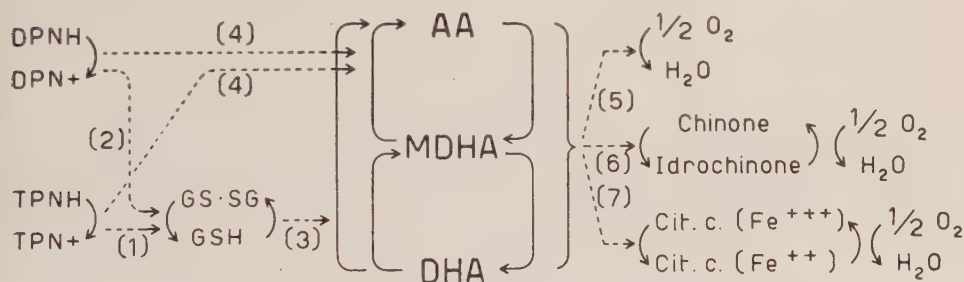


Fig. 1.

La scoperta di questo enzima, e della sua larga diffusione nelle diverse specie [6], accentua l'importanza del sistema dell'acido ascorbico nelle piante in quanto essa estende il quadro, già così complesso, delle possibilità di trasformazioni ossido-riduttive in cui questo sistema è coinvolto. Come appare dallo schema della fig. 1, i piridinnucleotidi ridotti (in particolare il TPNH), possono ridurre l'acido deidroascorbico ad acido ascorbico tramite il glutatione, oppure riprendere direttamente il composto di ossidazione intermedio, il « monodeidroascorbico », e riportarlo ad acido ascorbico. D'altro

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano. Centro di studio per le ossido-riduzioni nei vegetali del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

lato la riossidazione dell'acido ascorbico a deidroascorbico, e quindi il trasporto di elettroni all'ossigeno atmosferico, può a sua volta svolgersi attraverso vie del tutto diverse: l'ossidazione diretta, catalizzata dall'ascorbico ossidasi, l'ossidazione tramite i chinoni e le polifenolossidasi, e l'ossidazione tramite il citocromo *c* e la citocromo ossidasi. Per quanto riguarda l'ossidazione parziale dell'acido ascorbico a « monodeidroascorbico », i lavori sopra citati [3, 4], dimostrano che essa può essere catalizzata dall'ascorbico ossidasi e da ioni metallici quali il  $\text{Fe}^{+++}$  e il  $\text{Cu}^{++}$ ; mentre mancano dati per quanto riguarda l'ossidazione, teoricamente possibile, ad opera dei chinoni o del citocromo *c*.

Un aspetto interessante della scoperta della « monodeidroascorbico » riduttasi (e quindi di una via ossidativa capace di trasferire elettroni da entrambi i coenzimi piridinici ridotti all'ossigeno senza comprendere come anello intermedio il glutatione, accanto a quella ormai classica TPN-glutathione-ascorbico) consiste nel fatto che essa viene a mettere in nuova luce i rapporti che nella cellula intercorrono tra i due sistemi del glutathione e dell'ascorbico; sistemi che, d'altro lato, ricerche da tempo in atto in questo Istituto [7, 8, 9, 10, 11] dimostrano dotati di una singolare capacità di intervento nella regolazione della crescita, tanto da farli considerare come direttamente inseriti nel gioco della regolazione auxinica di questa funzione, nonché dei fenomeni metabolici ad essa connessi.

I risultati delle ricerche qui riferite dimostrano come la « monodeidroascorbico » riduttasi sia presente, con notevole attività, in un materiale classicamente adatto a ricerche sul meccanismo d'azione dell'auxina (gli internodi di pisello), e come esso si trovi almeno in parte localizzato in strutture insolubili del plasma. Essi suggeriscono inoltre la possibilità che nella cellula esista, a livello mitocondriale, una via ossidoriduttiva coinvolgente come successivi vettori i piridinucleotidi, il sistema acido ascorbico-« monodeidroascorbico » e il sistema dei citocromi.

## MATERIALI E METODI.

Il materiale è stato fornito in tutti i casi dalla parte apicale del terzo internodio di piantine eziolate di pisello (*Pisum sativum*) coltivate per 10 giorni in camera oscura termoregolata a 25° C.

*Preparazione dell'enzima.* - Il materiale appena raccolto veniva congelato a -25° C., quindi scongelato a temperatura ambiente e pressato a 400 atmosfere. Il succo torbido ottenuto veniva raffreddato a 0° C., addizionato di 4 volumi di acetone preraffreddato a -25° C. e filtrato rapidamente su Buchner. Il residuo secco, lavato con acetone puro, era seccato sotto vuoto. Tutte queste operazioni venivano eseguite in camera fredda a temperatura di 2-3° C. La polvere acetonica così ottenuta e dissolta in tri-idrossimetilaminometano (Tris) 0,1 M, pH 7,3, veniva sottoposta a frazionamento con  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  che veniva aggiunto come soluzione satura neutralizzata; e le frazioni precipitanti ai vari livelli di saturazione venivano separate per centrifugazione. In un primo frazionamento, il massimo dell'attività è apparso contenuto nella frazione precipitata tra 50 e 80 % di saturazione di  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ . Tale frazione veniva ridissolta in Tris 0,1 M, pH 7,3 e ulteriormente trat-

tata con  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ . La frazione precipitata tra 68 e 74 % di saturazione risultava contenere una notevole attività « monodeidroascorbico » riduttasica assieme ad una scarsissima attività ascorbico ossidasica; la sua attività DPNH e TPNH ossidasica era invece praticamente nulla. Questa frazione si prestava quindi per un primo studio delle caratteristiche dell'enzima. L'aumento dell'attività specifica durante il frazionamento risulta dai seguenti dati: attività in  $\mu$  moli  $\cdot 10^{-3}$  DPNH ossidato/mg proteine/minuto = 6,3 nel succo di pressa e = 96,6 nella frazione finale. Si è quindi conseguita una purificazione dell'enzima di circa 15 volte.

*Determinazione dell'attività enzimatica.* — Questa veniva valutata seguendo allo spettrofotometro (Beckman modello D. U. con fotomoltiplicatore annesso) alla lunghezza d'onda di 340  $m\mu$  l'ossidazione del DPNH o TPNH aggiunti (0,2  $\mu$  moli) ad una sospensione contenente un'aliquota dell'enzima, Tris 0,1 M, pH 7,3, acido ascorbico  $5 \cdot 10^{-4}$  M ed eventuali altri cofattori. Il volume finale era di 3 cc e la temperatura quella dell'ambiente (circa 18°C).

*Preparazione della frazione mitocondriale.* — Il materiale veniva pestato in un mortaio in presenza di sabbia di quarzo e di 3 volumi di Tris 0,1 M, pH 7,3 e KCl 1,2 %. L'omogenato veniva centrifugato a 1000 $\times$ g. per 5 minuti primi, il precipitato scartato ed il sopranatante ricentrifugato a 6500 $\times$ g. per la durata di 30 minuti primi. Il precipitato veniva raccolto e lavato con Tris 0,1 M e KCl a pH 7,3, quindi centrifugato per 30 minuti primi a 6500 $\times$ g. Il precipitato che si otteneva era sospeso in Tris 0,1 M, KCl 1,2 % a pH 7,3 ed omogeneizzato con un omogeneizzatore di Potter. Queste operazioni venivano compiute a temperatura di 2–3°C. Nella preparazione della polvere acetonica della frazione mitocondriale i mitocondri ottenuti nella maniera descritta venivano versati in un becker contenente 150 cc di acetone puro e raffreddato a  $-25^\circ\text{C}$ . ed il precipitato formatosi, raccolto per centrifugazione, veniva lavato ancora con acetone puro, quindi ricentrifugato e seccato sotto vuoto. L'estratto di questa polvere acetonica veniva preparato sospendendola in Tris 0,1 M, pH 7,3, omogeneizzando con agitatore magnetico e quindi centrifugando a 1000 $\times$ g. per 5 minuti primi. Il sopranatante era pronto per l'uso.

#### ESPERIENZE E RISULTATI.

I risultati della fig. 2 dimostrano nel preparato enzimatico ottenuto da internodi di pisello: *a*) l'assenza di enzimi ad attività DPNH ossidasica come pure di enzimi capaci di trasferire elettroni dal DPNH al DHA; *b*) una decisa attività DPNH e TPNH ossidasica in seguito all'aggiunta di acido ascorbico; *c*) un aumento di questa attività in seguito all'aggiunta di un preparato di ascorbico ossidasi esente da attività « monodeidroascorbico » riduttasica, e un ulteriore incremento in presenza di flavinmononucleotide (FMN)  $10^{-4}$  M; *d*) la non sostituibilità, ai fini dell'ossidazione del DPNH, del sistema acido ascorbico più ascorbico ossidasi con quello DHA più omocisteina (che riduce il DHA ad AA). Inoltre, sono risultate assenti le attività TPNH e DPNH glutatione riduttasiche.

Questo comportamento corrisponde esattamente a quanto rilevato da altri autori per la « monodeidroascorbico » riduttasi e stabilisce quindi la presenza di questo enzima nel nostro preparato.

Nelle esperienze della fig. 3 è stata studiata l'azione della presenza di DPNH sulla ossidazione dell'acido ascorbico ad opera della modesta attività ascorbico ossidasica presente nel nostro preparato. L'ossidazione dell'acido ascorbico è stata studiata seguendo allo spettrofotometro le varia-



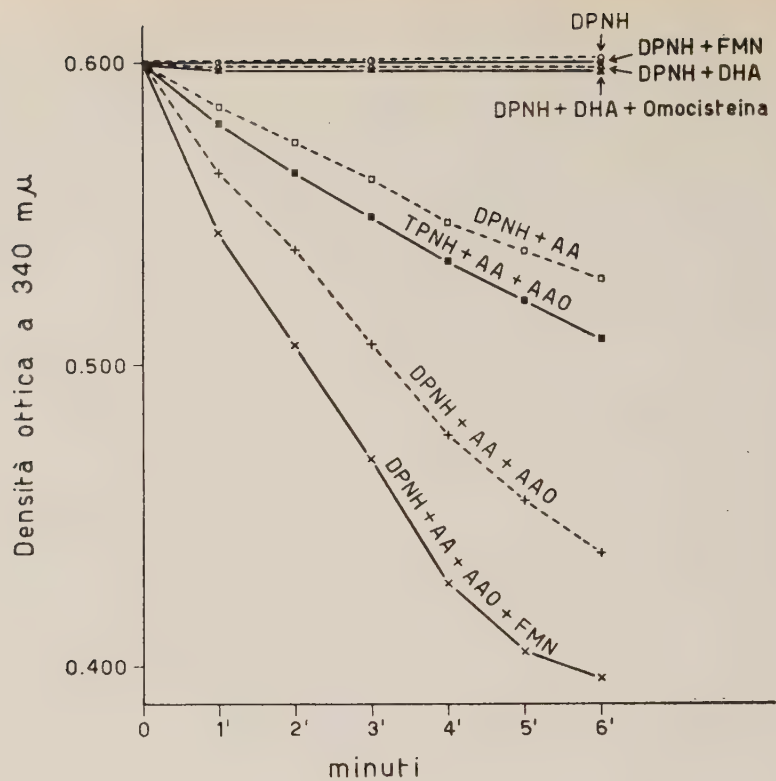


Fig. 2.

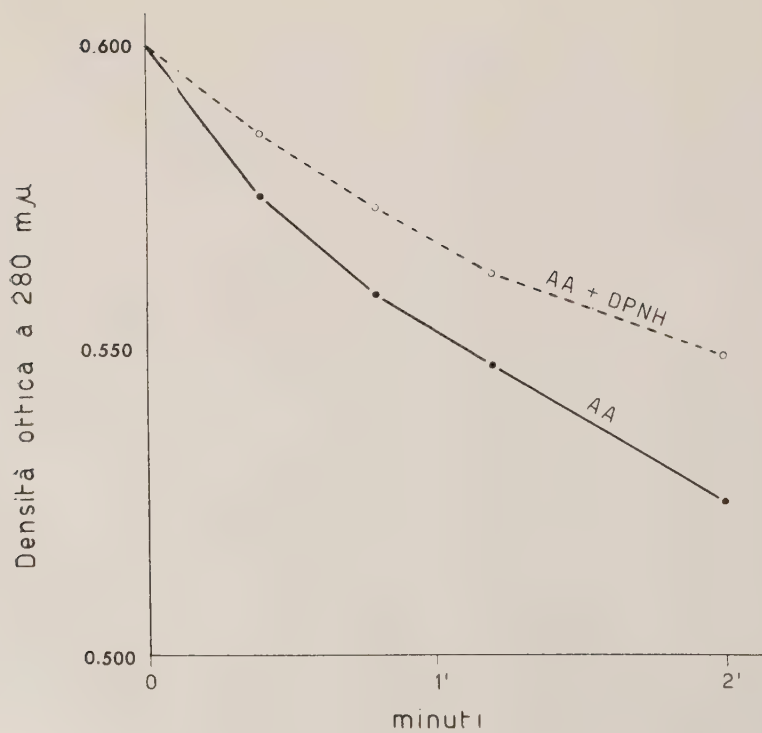


Fig. 3.

zioni di densità ottica a 280  $m\mu$ , zona in cui la differenza di assorbimento tra l'acido ascorbico e l'acido deidroascorbico è già fortissima, mentre il passaggio del DPNH a DPN<sup>+</sup> non interferisce in modo sensibile. Si osserva come la presenza del DPNH nel preparato rallenti in misura notevole la velocità di ossidazione dell'acido ascorbico: ciò che conferma l'ipotesi che sia un prodotto intermedio di ossidazione dell'acido ascorbico, formato per azione dell'ascorbico ossidasi, a fungere da accettore di elettroni dal DPNH ritornando ad acido ascorbico.

I risultati esposti in fig. 4 mostrano come non solo l'ascorbico ossidasi, ma anche il citocromo *c* possa, nell'ossidare l'acido ascorbico, accelerare l'ossidazione del DPNH, dando origine al composto di ossidazione intermedia tentativamente denominato acido «monodeidroascorbico».

Solo per questa proprietà, il Cit *c* accelera l'ossidazione del DPNH; infatti, assente è risultata l'attività DPNH Cit *c* riduttasica.

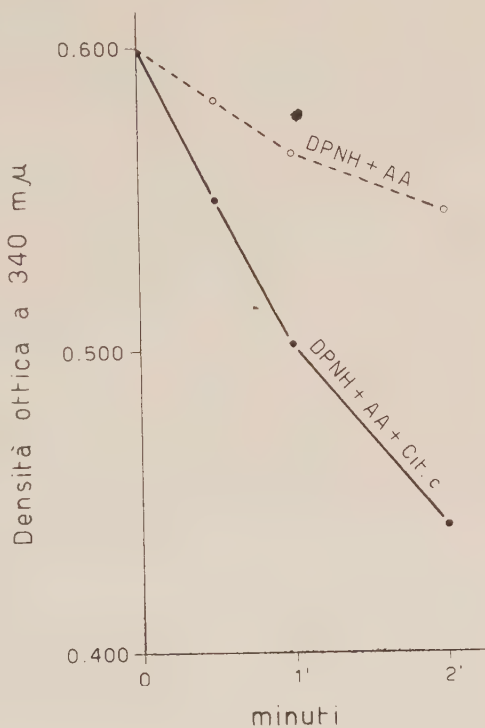


Fig. 4.

TABELLA I.

*Azione di alcuni inibitori dei gruppi sulfidrilici sull'attività monodeidroascorbico riduttasica.*

Composizione dell'incubato: DPNH 100  $\gamma$ , AA 50  $\gamma$ , enzima corrispondente a 99  $\gamma$  di N proteico, tampone al Tris 0,1 M, pH 7,3, AA ossidasi 0,1 cc. Volume finale 3 cc.

Aggiunte	— $\Delta$ D. O. a 340 $m\mu$ /min. pr.	Inibizione %
Controllo . . . . .	0,030	—
p—ClHgB $2 \cdot 10^{-3}$ M. . . . .	0,000	100
p—ClHgB $10^{-3}$ M. . . . .	0,006	80
IoAc. $10^{-2}$ M. . . . .	0,014	53
GS—SG $10^{-3}$ M. . . . .	0,026	12

I dati della Tabella I dimostrano, riteniamo per la prima volta, come l'enzima studiato sia sensibile all'azione di alcuni inibitori di enzimi a gruppi sulfidrilici essenziali. Si osserva come l'enzima sia decisamente inibito dal p-cloromercuribenzoato e dallo iodoacetato, mentre più blanda, ma interessante per la presenza fisiologica di questo composto nella cellula, appare l'azione del glutatione ossidato.

#### ESPERIENZE SU PREPARATI MITOCONDRIALI.

I preparati mitocondriali ottenuti da piante superiori posseggono, come già rilevato da altri Autori, una notevole attività DPNH ossidasica [16, 17] e sono inoltre capaci di ossidare l'acido ascorbico sia per via ascorbico ossidasica che citocromica [18]. La presenza in queste particelle della « monodeidroascorbico » riduttasi dovrebbe quindi esprimersi come un acceleramento del ritmo di ossidazione del DPNH in seguito all'aggiunta, al mezzo di sospensione, di quantità modeste di acido ascorbico. Come si rileva dalla Tabella II, l'aggiunta a sospensioni mitocondriali di acido ascorbico a concentrazione  $10^{-5}$  M aumenta realmente, in grado notevole, l'attività DPNH ossidasica delle stesse, mentre per contro appare del tutto priva di effetto l'aggiunta di acido deidroascorbico. Che tale effetto sia realmente dovuto alla presenza della « monodeidroascorbico » riduttasi è confermato dai dati della seconda metà della tabella, che mettono in rilievo un comportamento sostanzialmente identico anche nelle prove in cui ai mitocondri interi è stato sostituito l'estratto di polvere acetonica di mitocondri.

TABELLA II.

*Attività monodeidroascorbico riduttasica di mitocondri e di estratto solubile di polvere acetonica degli stessi.*

Composizione dell'incubato: A) DPNH 150  $\gamma$ , AA 50  $\gamma$ , DHA 60  $\gamma$ , mitocondri corrispondenti a 2 gr. di tessuto fresco sospesi in Tris 0,1 M, KCl 1,2 % pH 7,3, volume finale 3 cc. B) Tutte le condizioni come in A) tranne che ai mitocondri è stato sostituito l'estratto solubile di polvere acetonica degli stessi mitocondri.

Aggiunte		— $\Delta$ D. O. a 340 m $\mu$ /min. pr.
A	DPNH . . . . .	0,033
	DPNH + DHA . . . . .	0,031
	DPNH + AA . . . . .	0,073
B	DPNH . . . . .	0,021
	DPNH + DHA . . . . .	0,023
	DPNH + AA . . . . .	0,041

## RIASSUNTO E CONCLUSIONI.

I risultati ottenuti possono così riassumersi.

1° Da tessuti di internodi di pisello è stato estratto e parzialmente purificato, fino ad attività specifica 15 volte superiore a quella iniziale, un enzima che ha tutte le caratteristiche della monodeidroascorbico riduttasi descritta da Beevers, da Nason et al. e da Kern e Racker.

2° L'azione attivante del FMN e quella del p-ClHgB, come pure, anche se in grado minore, dello iodoacetato e del glutatione ossidato suggeriscono che questo enzima sia una flavoproteina contenente gruppi sulfidrilici essenziali per l'attività dell'enzima stesso.

3° La capacità dell'enzima di trasferire elettroni dal DPNH al prodotto intermedio di ossidazione dell'acido ascorbico, « acido monodeidroascorbico » si mantiene inalterata quando, come agente ossidante dell'acido ascorbico, si sostituisca all'ascorbico ossidasi il citocromo *c* ossidato.

4° La presenza dell'enzima è chiaramente rilevabile sia in preparati mitocondriali che nell'estratto di polveri acetoniche di questi.

La localizzazione della « monodeidroascorbico » riduttasi a livello mitocondriale, congiuntamente alla dimostrazione della capacità del citocromo *c* di dare origine, nell'ossidazione dell'acido ascorbico, a quel composto di ossidazione intermedia che nel sistema « monodeidroascorbico » riduttasi funge da accettore di elettroni, suggerisce che nella cellula accanto ad una sequenza: PN-GSH-AA-AAO, possa funzionare la via ossido-riduttiva PN-AA-Cit. *c*-Citocromo ossidasi-Ossigeno; con la riserva di un'eventuale diversità di natura tra le particelle in cui è localizzato il sistema dei citocromi e quelle ad attività monodeidroascorbico riduttasica. D'altro lato l'abbondanza dell'enzima nel materiale studiato appare di notevole interesse fisiologico in quanto dimostra che il metabolismo dell'acido ascorbico, nella cellula, può essere regolato con un meccanismo del tutto distinto da quello precedentemente noto, che coinvolge il glutatione; ciò che sembra fornire la chiave di alcune interessanti divergenze nel comportamento dei due sistemi del glutatione e dell'acido ascorbico, rilevate nel corso di una precedente ricerca sul meccanismo dell'azione auxinica [11]. Argomento questo che verrà trattato più estesamente in un successivo lavoro.

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] M. B. MATHEWS, « Jour. Biol. Chem. », 189, 695 (1951).
- [2] H. BEEVERS., *Reported at the meeting of the American Institute for biological Science.* Madison, Wisconsin, Sept., 1 (1953).
- [3] A. NASON, W. WOSILAIT and A. J. TERRELL, « Arch. of Bioch. and Bioph. », 48, 233 (1954).
- [4] M. KERN and E. RACKER, « Arch. of Bioch. and Bioph. », 48, 235 (1954).
- [5] A. WEISSBERGER and J. E. LUVALLE, « Jour. Am. Chem. Soc. », 66, 700 (1944).



- [6] H. BEEVERS, « Plant Physiol. », 29, 265 (1954).
- [7] S. TONZIG e F. TREZZI, « Nuovo Gior. Bot. It. », 57, 535 (1950).
- [8] S. TONZIG e E. MARRÈ, « Rend. Ist. Lomb. Sc. Lett. », 89, 243 (1955).
- [9] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 19, 320 (1955).
- [10] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « Physiol. Plantarum. », 10, 289 (1957).
- [11] E. MARRÈ, O. ARRIGONI e G. FORTI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 22, 85 (1957).
- [12] E. E. CONN and B. VENNESLAND, « Jour. Biol. Chem. », 192, 17 (1951).
- [13] L. W. MAPSON and D. R. GODDARD, « Biochem. J. », 29, 592 (1951).
- [14] E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16, 64 (1952).
- [15] E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 20, 206 (1956).
- [16] T. E. HUMPHREYS and E. E. CONN, « Arch. of Bioch. and Bioph. », 60, 226 (1956).
- [17] D. P. HACKETT, « Plant Physiol. », 31, 345 (1956).
- [18] S. I. HONDA, « Plant Physiol. », 30, 174 (1955).

**Entomologia.** — *Contributo alla conoscenza dei fattori determinanti l'esito della competizione tra parassiti endofagi in vittime superparassitizzate e multiparassitizzate* (\*). Nota di EGIDIO MELLINI, presentata (\*\*) dal Socio G. GRANDI.

Casi di superparassitismo e di multiparassitismo, vale a dire, seguendo la terminologia adottata da Grandi, coesistenza e possibilità di sviluppo nella stessa vittima di più individui parassiti, rispettivamente della medesima specie e di specie diverse, sono comuni nelle complesse e sovente intricatissime simbiosi antagonistiche che riscontriamo tra gli Insetti. Se in molti casi dalla vittima superparassitizzata e, per quanto meno frequentemente, da quella multiparassitizzata, fuoriescono effettivamente più individui del parassita, o dei parassiti, in numerosi altri invece da vittime che pure ospitano più parassiti della stessa o di diversa specie vediamo fuoriuscire, senza eccezione, un solo individuo. Come ben si comprende questa seconda evenienza si verifica normalmente quando le differenze di mole tra gli individui delle specie simbiotiche è lieve, in altri termini quando la vittima costituisce una riserva nutritizia sufficiente per lo sviluppo di un solo individuo parassita. In tali condizioni è evidente che, ad eccezione di uno, tutti i concorrenti finiscono di necessità col soccombere. Ma quale di essi sarà quello che prevarrà ed in base a quali fattori? Poiché in genere, ed in particolare a riguardo dei Ditteri Larvevoridi, ci si è poco occupati in modo specifico di questo problema, pur tuttavia sovente sfiorato in lavori intesi a tratteggiare a grandi linee l'etologia di questo o quel parassita, ho creduto utile prospettare in una Nota preventiva i risultati scaturiti al riguardo da ricerche che ho condotto sulla biologia del Dittero Larvevoride *Macquartia chalconota* Meig. (1)

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Entomologia dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) Classificato dal chiar.mo prof. F. Venturi cui rinnovo i sensi della mia più viva gratitudine.

quale parassita del Coleottero Crisomelide *Chrysomela fastuosa* Scop. <sup>(2)</sup> talora parassitizzata anche da un altro Larvevoride: la *Meigenia mutabilis* Fall.

CENNI DI ETOLOGIA DELLA VITTIMA. — La *C. fastuosa* Scop. è un insetto di modesta taglia, relativamente comune in ambienti molto umidi ove prosperano certe Labiate come la *Galeopsis Tetrahit* L., a spese della quale esso compie il suo ciclo. Nell'Appennino Tosco-Emiliano il Crisomelide svolge una generazione all'anno e iberna come larva matura in cellette scavate nel terreno sotto le piante ospiti. Gli adulti sfarfallano in maggio; frequentano in questo periodo le piante spontanee, soprattutto le Ortiche, del biotopo in cui si sono evoluti, poi nella seconda metà di giugno si rarefanno progressivamente fino a scomparire. Ricompaiono verso la fine di luglio quando le *Galeopsis*, oramai in rapido accrescimento, cominciano a fiorire. Da questo momento l'attività dell'insetto diviene intensa: si nutre intaccando le foglie della *Galeopsis*, si accoppia e le femmine depongono le uova lungo il fusto ed i rametti nonché sui calici e sulle corolle delle piante ospiti. Accoppiamenti ed ovideposizioni si susseguono ininterrottamente fino agli ultimi giorni di settembre. Le larve, parimenti fillofaghe, hanno costumi crepuscolari e notturni; di giorno stanno rintanate entro i calici (una per ciascuno), capo contro il fondo del fiore, per cui di esse all'esterno si vede tutt'al più sporgere, qualora siano già avanti nello sviluppo, la porzione dorsale degli ultimi uriti. Man mano raggiungono la maturità scendono nel terreno sotto la pianta, si scavano la celletta in cui ibernano ed ove compiranno le metamorfosi nella primavera successiva.

CENNI DI ETOLOGIA DELLA *Macquartia chalconota* Meig. — La *M. chalconota* Meig. è un larvevoride ovoviviparo, con larve della I età di tipo planidio. Trascorre l'inverno allo stato di larva della II età, in fase iniziale, nel lacunoma delle larve ibernanti della *C. fastuosa* Scop. In primavera, quando l'ospite superata la diapausa si appresta ad impupare, riprende ad accrescersi, raggiunge la maturità ed impupa entro le spoglie della vittima completamente divorata. Gli adulti sfarfallano in maggio, nello stesso periodo cioè in cui sfarfalla la *C. fastuosa* Scop. Poiché le prime larve del suddetto crisomelide si hanno verso la metà di agosto, il nostro larvevoride con tutta probabilità compie, durante questi tre mesi di intervallo, una prima generazione a spese di altri ospiti. La *Macquartia* ha abitudini diurne e quindi depone i suoi germi sulle larve di *Crisomela* quiescenti incuneate entro i calici. A questo scopo essa esplora ad uno ad uno, con le zampe anteriori, i fiori riuniti in verticillastri attorno al fusto ed ai rametti ed avvertita la presenza della larva del crisomelide vi depone sopra un uovo che immediatamente schiude. Terminata l'esplorazione di un verticillastro passa in quello subito sovrastante o sottostante ove ripete le identiche operazioni.

(2) Il lavoro è in corso di stampa nel XXII volume del « Bollettino dell'Istituto di Entomologia dell'Università di Bologna ».

In tal modo il dittero finisce col parassitizzare praticamente tutte le larve presenti in quel momento negli organi florali della parte di pianta esplorata. Il crisomelide viene indifferentemente attaccato in tutti e quattro i suoi stadi larvali. Tuttavia le larve della I età, per trovarsi in genere occultate negli interstizi alla base tra un fiore e l'altro, anziché entro, finiscono con lo sfuggire all'attacco e, d'altro canto, in quelle della IV età a sviluppo avanzato, sovente la parassitizzazione non è efficace, poiché il planidio non riesce a perforare il tegumento dorsale, oramai troppo tenace del crisomelide; né d'altronde, aderendo questo strettamente al calice col ventre, può aggredirlo nelle aree sternali più vulnerabili. Il planidio dopo brevi momenti di frenetica attività si appresta ad incidere il tegumento dell'ospite. Il tempo impiegato per penetrare varia da 1-2 minuti ad un'ora, e magari anche più, in dipendenza dell'età del crisomelide e in definitiva della resistenza offerta dalla cuticola in quel punto. Guadagnato l'emocoele della vittima il planidio rimane a contatto con l'esterno mediante l'estremità dell'ultimo urite, attorno al quale i lembi della ferita cominciano subito a differenziare il tubo respiratorio. Mentre nell'età in cui il crisomelide viene parassitizzato il foro dell'imbuto mostra i margini irregolari e brunastri, nell'età successiva esso diviene, colla muta, perfettamente circolare ed il tegumento si presenta come se in quel punto si fosse verificata una semplice introflessione. Tali caratteristiche sono importanti per gli scopi qui perseguiti, perché ci permettono di stabilire di primo acchito se una data larva è stata parassitizzata in quella età ovvero in altra precedente. In ogni caso il dittero compie la I muta quando la vittima ha raggiunto l'ultima età.

CENNI DI ETOLOGIA DELLA *Meigenia mutabilis* Fall. - La *M. mutabilis* Fall. è una specie ovipara, con larve della I età di tipo tachiniforme. Larvevoride polivoltino (svolge 3 generazioni annuali) e polifago, per quanto particolarmente legato ai Crisomelidi, la *M. mutabilis* Fall. è una specie di gran lunga più comune della *Macquartia chalconota* Meig. Le femmine depongono le uova in un punto qualsiasi del corpo dell'ospite; le larvette che sgusciano, dopo circa due giorni di incubazione, penetrano direttamente nella vittima dopo averne inciso il tegumento sottostante al corion. Esse menano vita libera nel lacunoma della vittima fino a quando questa non sia divenuta matura e i parassiti concorrenti eliminati. Allora inducono la formazione dell'imbuto respiratorio di preferenza in prossimità di aree sclerificate e pertanto, nella *C. fastuosa* Scop., a livello della placca pronotale e alla base delle zampe. L'ibernamento in questa vittima è sostenuto dalle larve alla fine della I età ancorate al sifone. Il larvevoride riprende ad accrescersi nella primavera successiva e svuotata completamente la vittima impupa entro l'esoscheletro di questa. A differenza della *Macquartia*, che depone indiscriminatamente su qualsiasi stadio larvale della Crisomela, la *Meigenia* attacca di solito le larve della III e della IV età, vale a dire quelle più evidenti sulla pianta, cioè quelle più facilmente percepibili ed aggredibili.

Stabilito che la *C. fastuosa* Scop. per le sue modeste dimensioni può nutrire una sola *Macquartia* od una sola *Meigenia* e che quindi l'eliminazione dei parassiti coinquilini diviene automaticamente un fatto ineluttabile, esaminiamo partitamente i casi di concorrenza tra parassiti della medesima specie e di specie diversa nel corpo dello stesso individuo vittima.

COMPETIZIONI NELLE VITTIME SUPERPARASSITIZZATE DA *MACQUARTIA*. — Poiché il tasso di parassitizzazione è abbastanza elevato (circa 40 %), è facile trovare in natura *Crisomele* che alberghino due o più parassiti contemporaneamente. In laboratorio poi il nostro coleottero può essere parassitizzato a piacere ed inoltre l'infestazione può essere condotta su ospiti appositamente scelti.

In autunno nelle larve di *Crisomela* superparassitizzate quiescenti nel terreno si trova di regola una sola larva di *Macquartia* agli inizi della II età, viva, ed uno o più planidi in fasi iniziali dello sviluppo, morti. Ciò significa che i parassiti in soprannumero hanno di solito vita breve, vale a dire che l'eliminazione dei concorrenti è precocissima. Se superparassitizziamo una *Crisomela* in modo che l'entrata dei planidi avvenga entro un breve lasso di tempo (poche ore) tutti i sinoici possono sopravvivere anche per due o tre giorni, ma non appare del tutto chiaro per quale motivo finisca col prevalere l'uno piuttosto che l'altro. Il punto occupato dal superstita non sembra avere importanza al riguardo giacché vediamo indifferentemente prevalere planidi ancorati nel torace e nell'addome, anteriormente o posteriormente, al dorso, al ventre ed ai lati della vittima. Con ogni probabilità influisce, di contro, la posizione reciproca dei concorrenti nel senso che quelli disposti in modo da volgere verso gli altri la regione dorsale possono essere da questi più facilmente feriti. Se invece la superparassitizzazione viene effettuata in due età successive (i primi tre stadi larvali del *crisomelide* hanno ciascuno una durata media di 3-4 giorni), il problema si chiarisce. Già dopo una giornata dall'ultima infestazione troveremo nella vittima un individuo più avanti nello sviluppo<sup>(3)</sup> vivo e uno o più planidi in fase jejuna (o quasi) inerti, privi di vita. Evidentemente l'individuo più grande (e l'aspetto del suo imbuto respiratorio lo conferma) è quello penetrato per primo. Ne risulta pertanto che il fattore determinante l'esito della competizione appare essere di norma la « priorità di penetrazione nella vittima », almeno quando tale priorità raggiunga certi valori. Se poi si considera che in ambiente naturale solo occasionalmente può accadere, dato anche il comportamento delle femmine ovideponenti, che una larva venga parassitizzata in due momenti vicini, ne consegue che il fattore « priorità di penetrazione » sarebbe in natura quello sostanzialmente operante.

(3) La durata della vita alla I età si aggira sui 9 giorni e quindi per infestazioni che avvengano entro tale periodo di tempo la competizione ha luogo tra individui nel medesimo stadio larvale.



Si è detto che gli individui in soprannumero soccombono in breve tempo, ed implicitamente si è accennato al fatto che la loro vita è tanto più breve quanto maggiore è lo sviluppo a cui è pervenuto l'antagonista. Tuttavia in qualche caso tali planidi crescono fino a divenire «semirepleti», in rarissimi casi raggiungono la fase repleta, in casi del tutto eccezionali possono addirittura iniziare la muta ed anche portarla a termine. In tutte queste contingenze, in cui la vita degli individui soprannumerari dura oltre la norma, si osserva che i tubi respiratori della forma vincente e di quella soccombente risultano differenziati, o in due punti molto vicini, ovvero in due notevolmente lontani: uno verso l'estremità cefalica e l'altro verso quella caudale. Pertanto se la localizzazione rispetto alla vittima dei vari concorrenti non risulta essere determinante in riguardo all'esito della competizione a favore dell'uno o dell'altro, diviene invece importante agli effetti della durata della vita delle forme soccombenti.

Come vengono eliminati gli individui in soprannumero? Tutti i planidi morti mostrano in genere qualche piccola macchia bruna sui loro tegumenti; tali alterazioni sembrano rappresentare la conseguenza di azioni meccaniche esercitate sul corpo del planidio vivo. Ciò porterebbe a concludere che l'eliminazione dei concorrenti sia ottenuta a colpi di uncino boccale. A favore di ciò depone anche il fatto che quando i parassiti sono ancorati in punti molto lontani ovvero quando la superparassitizzazione si è compiuta in un breve lasso di tempo (in entrambi i casi diminuiscono cioè le possibilità di contatto, nel primo per la distanza, nel secondo per essere i parassiti molto piccoli) la sopravvivenza dei concorrenti è notevolmente più lunga.

COMPETIZIONI NELLA VITTIMA MULTIPARASSITIZZATA DA *MACQUARTIA* E DA *MEIGENIA*. - Mentre la percentuale delle larve ospitanti *M. chalconota* Meig. raggiunge livelli abbastanza elevati (circa 40 %), quella delle larve con *M. mutabilis* Fall. si mantiene invece entro limiti piuttosto bassi (circa 15 %) tuttavia in qualche caso (in circa il 6 % degli individui maturi raccolti in natura) il crisomelide può ospitare entrambi i parassiti. Dato che la *Crisomela* offre il cibo sufficiente per lo sviluppo di un solo parassita è giocoforza che anche nella vittima multiparassitizzata uno dei concorrenti soccomba. Ma quale dei due? Orbene in queste vittime talora raggiunge la maturità la *Macquartia*, tal'altra la *Meigenia*; molto più di frequente la prima che la seconda.

Come nei casi di superparassitizzazione l'eliminazione dei concorrenti è precoce; il soccombente infatti di norma viene eliminato in fasi poco più che iniziali del suo sviluppo.

In base a quali fattori il vincitore prevale? Le differenze morfologiche ed etologiche tra i due parassiti concorrenti sono nette. Le larve della I età di *Macquartia* sono di tipo planidio ed appena penetrate inducono la formazione del tubo respiratorio, quelle della *Meigenia* sono di tipo tachiniforme e conducono vita libera nel lacunoma della vittima fino a quando questa

non abbia raggiunto la maturità. Ma poiché entrambe le specie possono, secondo i casi, risultare vittoriose, evidentemente il successo non è tanto dovuto a qualità intrinseche dell'una o dell'altra, sibbene piuttosto, a contingenze particolari in cui vengono a trovarsi i due parassiti antagonisti.

Se isoliamo larve di *Crisomela* dell'ultima età che presentino contemporaneamente sui loro tegumenti uova di *Meigenia* e tubi respiratori di *Macquartia* con foro rotondo ed a margini netti, vale a dire larve parassitizzate dalla *Meigenia* nell'ultima età e dalla *Macquartia* in età precedente, troveremo sempre durante l'inverno, quando tutti i simbionti sono quiescenti, la *Macquartia* all'inizio della II età, viva, e la *Meigenia* in fase iniziale della I età morta, generalmente prima ancora di avere dato inizio alla differenziazione dell'imbuto respiratorio. Viceversa larve di *Crisomela* all'ultima età provviste di tubo di *Macquartia* con foro a margini poco netti e prive di uovo di *Meigenia* possono, una volta raggiunta la maturità, presentare un evidente tubo di *Meigenia* con relativa larvetta viva, mentre il tubo di *Macquartia* risulta occluso ed il planidio che lo occupa morto. In questi casi la *Meigenia* aveva evidentemente deposto le uova su larve ancor giovani, mentre il planidio della *Macquartia* era certamente penetrato (lo testimoniano le caratteristiche del foro del sifone) nella larva all'ultima età.

In queste due serie di osservazioni risulta che l'individuo vincente è quello che è penetrato per primo nell'ospite.

In base a questo principio si può spiegare come i casi in cui prevale la *Macquartia* siano di gran lunga più numerosi di quelli in cui vince la *Meigenia*. La *Macquartia*, si è detto, depone i suoi germi in tutti gli stadi dell'ospite mentre la *Meigenia* tende in genere ad affidare le uova alle larve più appariscenti, vale a dire a quelle più avanti nello sviluppo. Non solo, i planidi di *Macquartia* deposti su *Crisomele* vicino alla maturità riescono a penetrare con difficoltà e sovente vanno perduti; d'altro canto le uova di *Meigenia* deposte su *Crisomele* giovani possono essere rigettate con la muta prima che il parassita sia sgusciato. Pertanto alle differenze iniziali di comportamento tra le femmine deponenti delle due specie si unisce un meccanismo selettivo per cui le *Crisomele* mature alberganti la *Macquartia* sono rimaste parassitizzate da questa di solito in età giovanile, mentre quelle che ospitano la *Meigenia* hanno subito nella maggioranza dei casi la parassitizzazione nell'ultima età. A tutto ciò si aggiunga che la *Macquartia* è ovovivipara mentre la *Meigenia* è ovipara, per cui ammesso che la parassitizzazione della stessa *Crisomela* da parte dei due parassiti sia pressoché simultanea, la prima raggiungerà l'emocele dell'ospite con un anticipo sulla seconda pari alla durata dello sviluppo embrionale extrauterino di questa ultima. In conclusione risulta che le larvette di *Macquartia*, nella grande generalità, vengono a trovarsi nel corpo della *Crisomela* prima di quelle della *Meigenia* e corrispondentemente sono quelle che di solito prevalgono.

Aggiungerò ancora che come nelle vittime superparassitizzate così in quelle multiparassitizzate i parassiti che saranno eliminati possono sopravvivere più a lungo della norma qualora si trovino ancorati o vicini o alla massima distanza dall'individuo che prevarrà.

CONCLUSIONI. - Per quanto riguarda le specie ed i casi qui presi in considerazione risulta che, in linea generale, il fattore determinante l'esito della competizione nello stesso individuo vittima, sia tra parassiti della stessa specie sia tra parassiti di specie diversa, è la « priorità di penetrazione nella vittima » almeno quando tale priorità raggiunga certi valori. Differenze etologiche e morfologiche tra le larve concorrenti, sia pure notevolissime, come quelle intercorrenti tra i planidi di *Macquartia chalconota* Meig. e le larve di I età di *Meigenia mutabilis* Fall., non sembrano avere importanza per l'esito della competizione.

Quale significato si può attribuire al fattore « priorità » di penetrazione nella vittima? ». Cioè, in concreto, in quale modo risulta avvantaggiato il concorrente che penetra per primo?

Nella vita endozoa dei Larvevoridi si possono in genere distinguere due fasi nettamente separate: quella ematofaga e quella istofaga. La prima, in molti casi, comprende il periodo che va dal momento in cui la larva penetra nella vittima fino a quando viene compiuta la I muta, la seconda abbraccia quasi tutta la II età e la III. Nella I fase l'accrescimento del parassita è molto modesto, la vittima in genere non ne risulta compromessa, tant'è che se l'endofago perisce essa si salva. L'ospite poi non è inerte, è un organismo vivo e come tale reagisce contro un corpo estraneo che venga a trovarsi nel suo lacunoma. Pertanto nella I fase di vita il compito dell'endofago sembra sia quello di « ambientarsi », di « affermarsi », di « prendere possesso della vittima ». Se il suo sviluppo si arresta per cause dipendenti dall'ospite (questo non ha ancora raggiunto la maturità larvale, ovvero entra in diapausa, o per altre ragioni ancora) di solito è proprio alla fine della I fase che il parassita si ferma.

Ora la *M. chalconota* Meig. e la *M. mutabilis* Fall. nella *C. fastuosa* Scop. si arrestano a questo punto del loro sviluppo, che verrà continuato solo nella primavera seguente. Parrebbe quindi lecito dedurre che l'individuo penetrato per primo non sarebbe tanto avvantaggiato perché è un po' più grande di quelli penetrati successivamente (la competizione avviene tra individui della I età o tutt'al più tra larve della I età da un lato e larve ferme agli inizi della II età dall'altro), ma perché esso si è già « sistemato » o è in via di esserlo, mentre i nuovi arrivati debbono ancora iniziare la fase di adattamento. Rimane tuttavia da stabilire fino a che punto sul fattore « priorità di penetrazione nella vittima » possa interferire la posizione reciproca dei concorrenti che sembra invece essere determinante nei casi in cui la competizione si svolga tra individui penetrati a brevi distanze di tempo gli uni dagli altri.

**Zoologia** (Anatomia). — *Ulteriori dati sulla innervazione vegetativa della sostanza nervosa cerebrale.* Nota di GENNARO PALUMBI, presentata (\*) dal Socio A. PENSA.

Nella seduta del 14 novembre 1953 dell'Accademia Nazionale dei Lincei il Socio Antonio Pensa ha presentato una mia prima Nota riguardante le connessioni fra il corredo nervoso della leptomeninge e dei vasi encefalici e la sostanza nervosa cerebrale nell'uomo. In quella Nota riferivo di avere notato in corrispondenza dell'area perforata anteriore dell'uomo un particolare comportamento delle fini fibre nervose di natura vegetativa disposte in parte, intorno ai numerosi vasi, di vario calibro, decorrenti nel connettivo della pia ed in parte, frammiste alle grosse fibre nevrali partecipanti alla costituzione del così detto plesso nervoso fondamentale della pia stessa. Precisai che molte di esse penetrano nella sostanza nervosa cerebrale accompagnando i vasi ed altre invece, in minor numero, vi penetrano indipendentemente, almeno in apparenza, dai vasi stessi. Rilevavo che le prime, oltre a provvedere alla innervazione della parete dei vasi intracerebrali, si distribuiscono anche, mediante fasci collaterali, alle guaine piali e gliali che circondano le loro diramazioni, formando a loro livello delicatissimi plessi; che le seconde invece sembrano contrarre più diretti rapporti con le cellule gliali dislocate negli strati più superficiali della corteccia e principalmente nel cosiddetto strato nevroglico di Held. Facevo inoltre presente che nello spessore della sostanza nervosa (testa del nucleo caudato) dai plessi disposti nelle guaine nevrogliche perivasali partono numerose fini fibre nervose che penetrano nell'interno della sostanza grigia circostante.

In base a detti reperti manifestavo l'idea di una probabile innervazione vegetativa della sostanza grigia cerebrale, almeno per quanto riguarda la sua componente gliale.

Successivamente, nell'agosto del 1954, la Hagen<sup>(1)</sup> riferisce che nella parete delle arterie e delle vene del diencefalo umano si riconoscono: fini fasci di fibre nervose amidollate che attraversano l'avventizia; un reticolo terminale nervoso che si estende in corrispondenza della tonaca muscolare; altri elementi nervosi che penetrano nell'endotelio dei vasi. Ella precisa inoltre che singole fibre nervose specifiche *provenienti dalla sostanza cerebrale* ed avvolte da fibre gliali si portano direttamente nella parete intracerebrale dei vasi collegando così strettamente l'attività della parete vasale alle eventuali richieste della regione cerebrale circostante. Senonché, la fig. 1 del lavoro della Hagen, intesa a dimostrare la ricca innervazione dei vasi sanguigni decorrenti in seno alla sostanza nervosa del diencefalo umano e la partecipazione delle fibre ne-

(\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) «Z. Anat.», 118, 223 (1954).



vrassiali alla costituzione dei loro plessi perivasali, non è molto dimostrativa; essa anzi mi dà l'impressione che molte almeno delle fibre dalla A. interpretate come destinate alle pareti vasali siano piuttosto da considerare fibre della rete nervosa propria del diencefalo che per effetto del taglio, sembrano arrestarsi in corrispondenza dei vasi o sovrapporvisi.

Allo scopo di accertare se anche in altri animali esistessero condizioni morfologiche analoghe a quelle da me riscontrate nell'uomo, ho cominciato con l'estendere le mie ricerche all'encefalo ed alle meningi craniche del cane. Mi limito ad esporre brevemente nella presente Nota quanto ho potuto osservare nella regione paraolfattoria basale dell'encefalo di questo animale, corrispondente alla area perforata anteriore dell'uomo. In detta zona, i preparati di impregnazione argantica dimostrano la presenza, nel connettivo proprio della pia, di un plesso nervoso fondamentale, estremamente ricco alla cui costituzione partecipano, con le loro ripetute diramazioni, in parte fibre grosse e midollate di natura sensitiva ed in parte fibre di minor calibro, scarsamente mielinizzate, raccolte in alcune zone in fascetti di un certo calibro; si aggiunge un numero notevole di fibrille fini e varicose, prevalentemente perivasali, con ogni probabilità di natura vegetativa. I vasi decorrenti nello spazio sottoaracnoideo sono provvisti di plessi perivasali in alcuni punti di estrema finezza. Ora, è sorprendente in questi preparati l'enorme numero di fibre nervose amieliniche o poco mielinizzate e di fascetti nervosi che, dal plesso nervoso piaie, penetrano nella sostanza nervosa, qui rappresentata dal *nucleo sopraottico* non solo accompagnando i vasi ma anche indipendentemente da essi per raggiungere e disperdersi nella fitta rete nervosa diffusa del nucleo stesso. Non ho potuto finora stabilire i loro centri di origine.

La fig. 1 della Tav. I rappresenta uno di questi fascetti che partendo dal plesso piaie si approfonda in detto nucleo direttamente ed indipendentemente dai vasi.

Anche dai plessi perivasali che accompagnano i vasi maggiori nell'interno del nucleo, si diparte ogni tanto qualche fibra che, dopo aver attraversato la guaina perivasale piaie o gliale, raggiunge e si disperde nella rete nervosa diffusa propria del nucleo. Invece, non ho mai potuto osservare neuriti o collaterali dei neuriti delle cellule neurosecretorie, né fibre provenienti dalla sostanza bianca del nucleo sopraottico, che si portano sulla parete di detti vasi per partecipare alla costituzione dei loro plessi perivascolari.

Nelle sezioni frontali del diencefalo nelle quali inferiormente al nucleo sopraottico è presente il tratto ottico, è agevole constatare un continuo scambio di fibre dall'una all'altra formazione; fatto questo già da tempo osservato da altri Autori (Staderini, Brugi) e di estrema importanza in quanto dimostra che impulsi provenienti dalla retina possono influenzare l'attività secretoria delle cellule nervose di tale nucleo.

Ora, la intima compenetrazione fra le fibre provenienti dai plessi piaie e perivasali, questi ultimi extra ed intracerebrali, e la rete nervosa diffusa del nucleo sopraottico, suggerisce l'idea che le prime non tanto e non solo

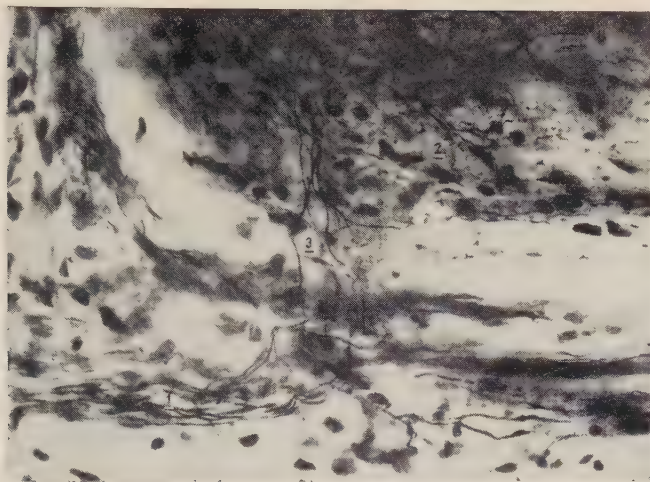


Fig. 1. – Area perforata anteriore del cane. (Microfotografia di preparato ottenuto con il metodo Bielschowsky-Palumbi).

1, plesso piale; 2, nucleo sopraottico; 3, fascetto di fibre che dal plesso piale si addentra nella sostanza nervosa del nucleo sopraottico.



Fig. 2. – Innervazione dei vasi endocerebellari del pipistrello.

(Disegno del prof. A. Pensa, da un preparato allestito con il metodo Golgi).



provvedano alla innervazione delle cellule gliali, come in un primo tempo da me supposto, ma che piuttosto provvedano alla trasmissione di impulsi provenienti dalla pia madre stessa e dai suoi vasi alle cellule neurosecretorie di detto nucleo. Naturalmente, solo la conoscenza della origine reale di tali fibre potrà chiarire la loro natura; tuttavia, almeno per una parte di esse, si può senz'altro presumere una natura vegetativa. Per quanto riguarda poi il loro valore funzionale, per ora, in via del tutto ipotetica, considerando che l'ipotalamo neurosecretorio è legato al metabolismo dell'acqua e tenendo presenti le terminazioni, recentemente descritte, di fibre neurosecretorie in prossimità dell'epitelio ependimale del terzo ventricolo e di altre cavità ventricolari, si può pensare che queste fibre da me descritte possano provvedere alla regolazione in via riflessa della produzione e del riassorbimento del liquido cefalo-rachidiano. D'altra parte il reperto stesso assume maggior valore se si tengono presenti le connessioni che il nucleo sopraottico ha anche con altre regioni encefaliche (talamencefalo, telencefalo ecc.).

Proprio in questi giorni il mio illustre Maestro Antonio Pensa mi ha fatto dono di un suo disegno eseguito molti anni fa, raffigurante l'innervazione dei vasi endocerebellari del pipistrello, quale appare nei preparati allestiti col metodo Golgi. Il disegno dimostra chiaramente quanto ricca sia l'innervazione di detti vasi e poiché esso rappresenta una delle più autorevoli conferme ai miei dati, mi onoro pubblicarlo (Tav. I, fig. 2) assieme alla mia microfotografia.

**Zoologia.** — *Studio delle amilasi nello sviluppo di «Artemia salina» Leach* (\*). Nota di LORETA BELLINI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Le amilasi sono enzimi che idrolizzano l'amido e il glicogeno fino a maltosio; a seconda del modo come la molecola del polisaccaride viene attaccata nei suoi due componenti amilosio e amilopectina si distinguono una  $\alpha$  amilasi destrinizzante e una  $\beta$  amilasi saccarificante (Bernfeld 1951 [1], Meyer e Gibbons 1951 [2], Baldwin 1951 [3], Sumner e Somers 1953 [4]).

Questi enzimi sono molto diffusi nel regno animale e vegetale e per quanto riguarda i problemi di embriologia chimica è interessante ricordare come già Herlitzka (1907) [5] avesse messo in evidenza una amilasi nell'uovo di rana.

Le ricerche condotte da Urbani e Scollo-Lavizzari (1955) [6], da Urbani (1955) [7] e da Scollo-Lavizzari (1956) [8] sulle  $\alpha$  amilasi e  $\beta$  amilasi nello sviluppo embrionale di *Bufo vulgaris* e *Rana esculenta* hanno mostrato una elevata attività enzimatica nell'uovo fecondato che decresce fino ad un

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata della Università di Camerino, con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.



periodo di poco precedente il termine della vita embrionale, indicato dagli studi di Cotronei (1922 [9], 1930 [10], 1932 [11]) con l'esaurimento delle scorte vitelline. Nella giovane larva, anche se questa viene tenuta a digiuno, si ha una forte ripresa di attività enzimatica che torna a diminuire solo dopo qualche giorno di inanizione.

Le ricerche condotte da Løvtrup (1955) [12] sugli Urodeli mostrano un andamento simile con la differenza che l'enzima mantiene presso a poco un livello costante fino al termine della vita embrionale per aumentare fortemente nelle giovani larve. Se questi risultati vengono confrontati con quanto accade per gli enzimi proteolitici (Urbani e De Cesaris Coromaldi 1954 [13], Urbani 1956 [14]) e per le lipasi (Urbani 1956 [18]) si vede che le amilasi hanno, sullo stesso materiale, un andamento completamente diverso da quello di queste idrolasi.

Dato l'interesse di queste ricerche, dietro suggerimento del prof. Urbani, ho esteso l'analisi degli enzimi proteolitici allo sviluppo dell'*Artemia salina* ed i risultati ottenuti sono stati esposti in una precedente Nota (Bellini 1957 [15])<sup>(1)</sup>. Continuando in questi studi ho preso in esame il comportamento delle  $\beta$  amilasi sullo stesso materiale adottando la metodica qui di seguito descritta.

Ho utilizzato germi incistati di *Artemia salina* Leach provenienti dalla California ed in vita latente da più di un anno. Essi appartengono al biotipo diploide anfimissico e sono perciò gli stessi usati nelle mie precedenti ricerche.

Le cisti poste in acqua salata (30 gr. NaCl/litro) si idratano rapidamente e schiudono in circa 30-40 ore. Vi è perciò uno sviluppo più veloce di quello riscontrato precedentemente e ciò in conseguenza del fatto che le presenti ricerche sono state effettuate in periodo estivo con una temperatura ambiente più elevata di quella invernale.

Per i dosaggi di stadi anteriori alla fessurazione del guscio sono state adoperate quelle cisti che una volta messe in acqua si depositano sul fondo del recipiente perché in queste la percentuale di schiusura è quasi del 100 %.

L'attività amilasica è stata determinata con il metodo di Bernfeld (1951) [1] e di Meyer e Gibbons (1951) [2] adattato al materiale nella seguente maniera.

Trecento esemplari ai vari stadi di sviluppo sono stati isolati al binoculare ed omogenati (dopo averli lavati in acqua distillata) in 200  $\mu$ l di acqua distillata con un piccolo omogenizzatore in vetro. L'omogenato è stato centrifugato per 3' a 3000 giri ed il supernatante usato per le determinazioni.

77  $\mu$ l di supernatante sono stati uniti a 77  $\mu$ l di una soluzione di glicogeno al 2 % e a 77  $\mu$ l di tampone fosfato a pH 7,2.

Dopo incubazione di 2,30 ore a 38°C sono stati prelevati 77  $\mu$ l del totale ed uniti a 77  $\mu$ l di reattivo all'acido dinitrosalicilico (1 gr. di acido 3-5 dinitrosalicilico + 20 ml NaOH + 30 gr. di sale di Rochelle: il tutto portato a 100 ml con acqua distillata).

(1) *Errata corrige*: detto lavoro è stato presentato il 9 marzo 1957 e non 1956 come è scritto a piede della prima pagina.

Le provette contenenti questa miscela sono state poste in acqua bollente per 3 minuti ed il colore sviluppato, diluito con 209  $\mu$ l di acqua distillata. Le prove in bianco sono state fatte al *tempo zero* e la fotometria del colore eseguita al microcolorimetro a cellula fotoelettrica di Urbani (1952) [16] con filtro verde (circa 510 m $\mu$ ) su spessore di liquido di 2,4 mm.

Le estinzioni lette vengono tradotte in gamma di glucosio a mezzo di una curva di taratura eseguita con quantità note di questo zucchero sciolte in acqua distillata.

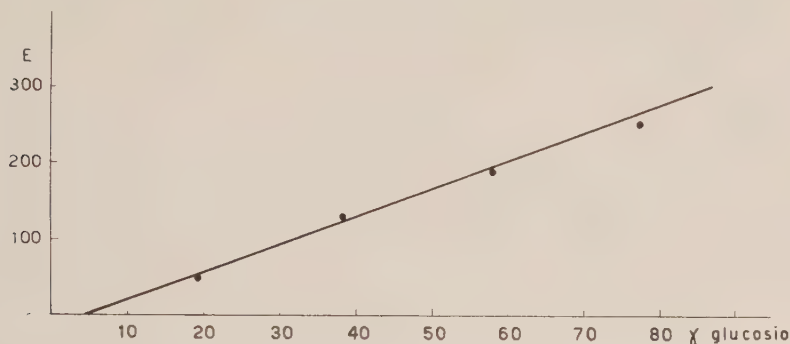


Fig. 1. — Curva di taratura eseguita con varie diluizioni di una soluzione madre di glucosio contenente 100 mgr/100 ml di acqua.

Determinazioni su 77  $\mu$ l sol. glucosio + 77  $\mu$ l acido dinitrosalicilico, bollito per 3' minuti + 209  $\mu$ l H<sub>2</sub>O.  
In ordinate le Estinzioni, in ascisse i  $\gamma$  di glucosio.

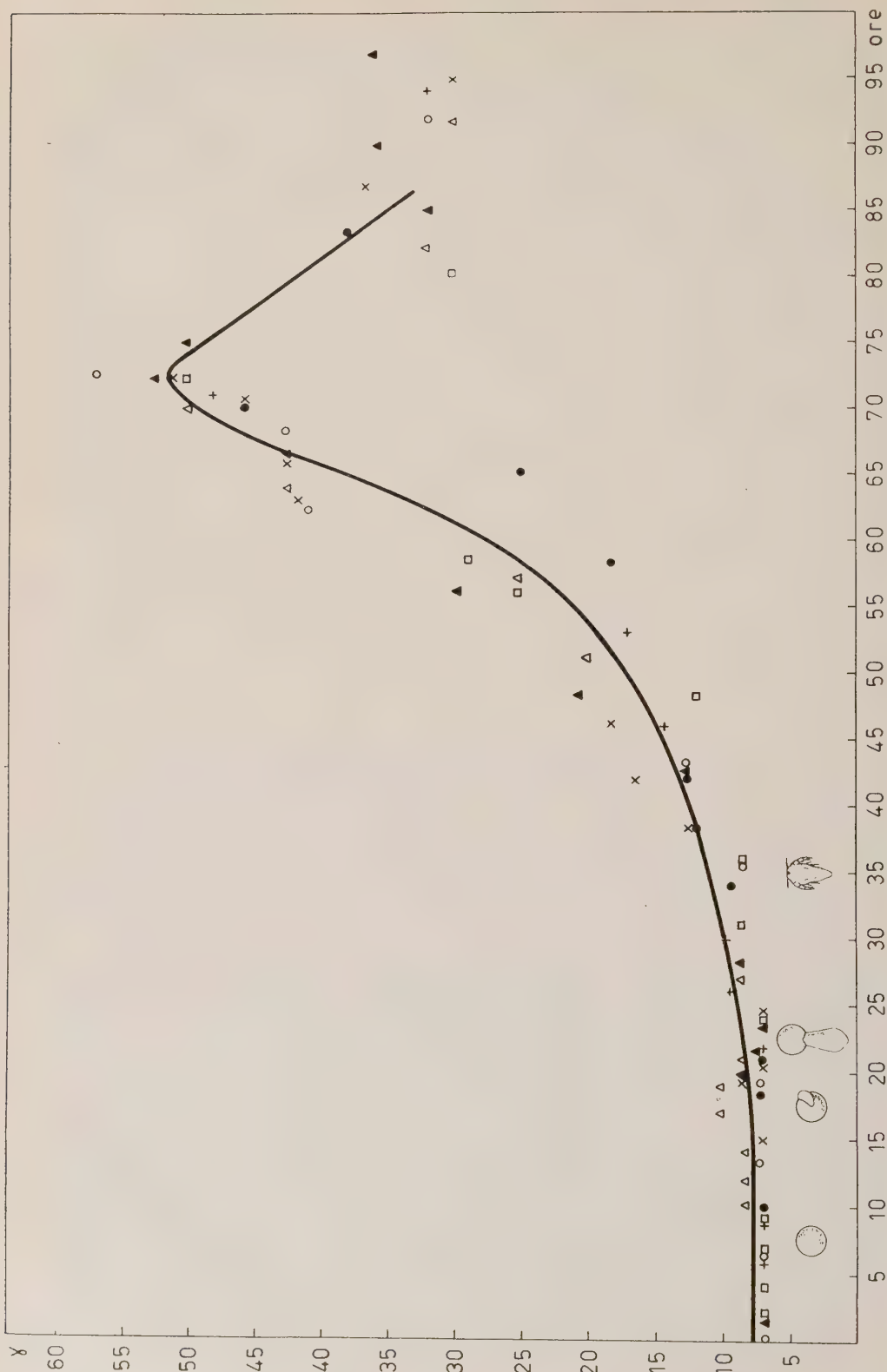
È importante fare una curva di taratura ogni qualvolta si è costretti a preparare di nuovo il reattivo all'acido dinitrosalicilico perché si è notato che, a seconda della maniera con la quale il reattivo è stato preparato o a seconda dei prodotti chimici usati, pur essendo la relazione sempre lineare, la retta può o no passare per l'origine degli assi.

Nella fig. 1 è riportata la curva di taratura usata per le determinazioni del presente lavoro.

Se i germi incistati e allo stato secco vengono omogenati con acqua è possibile dimostrare una attività amilasica.

Questo risultato ottenuto da Urbani e Collaboratori (1953) [17] con la tecnica iodometrica (Linderström-Lang e Holter 1933) è confermato facendo uso del metodo sopra descritto.

Nelle prime ore di idratazione è stato possibile (fig. 2), in alcuni casi, rilevare un leggero aumento di attività enzimatica ma le numerose determinazioni eseguite mostrano che fino al momento nel quale l'embrione di *Artemia* sguscia dall'involucro il tenore in amilasi è praticamente costante. Dallo stadio di nauplio nuotante al metanauplio si ha invece un forte aumento di attività enzimatica che alla temperatura di sviluppo di 24°C si accentua fino a circa 75 ore. A questa attività massima fa seguito una caduta se i metanaupli non vengono alimentati.

Fig. 2. - Comportamento delle 3 amilasi nello sviluppo di *Artemia salina*.

Questi risultati mostrano che le  $\beta$  amilasi hanno nello sviluppo di *Artemia salina* un comportamento completamente diverso dagli enzimi proteolitici. Infatti mentre dipeptidasi e proteinasi aumentano dallo stadio di cisti idratata al nauplio nuotante e subiscono una caduta prima del passaggio a meta-nauplio, le amilasi subiscono il forte aumento proprio tra questi due stadi.

Questi primi risultati non consentono di trarre delle conclusioni precise su quale possa essere il ruolo esercitato dalle amilasi nello sviluppo di *Artemia salina* ma permettono di stabilire che differenti enzimi hanno negli stessi stadi di sviluppo un diverso atteggiamento che indubbiamente è un indice del loro significato nelle attività metaboliche dell'embrione.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] P. BERNFELD, « *Advances in Enzymology* », 12, 380 (1951).
- [2] K. H. MEYER e G. C. GIBBONS, « *Advances in Enzymology* », 12, 341 (1951).
- [3] E. BALDWIN, *Biochimica dinamica*, Ediz. Einaudi (1951).
- [4] J. B. SUMNER e G. F. SOMERS, *Chemistry and Methods of Enzymes*. Acad. Press. Inc. New York (1953).
- [5] A. HERLITZKA, « *Arch. Ital. de Biol.* », 48, 119 (1907).
- [6] E. URBANI e G. SCOLLO-LAVIZZARI, « *Ric. Sci.* », 25, 1151 (1955).
- [7] E. URBANI, « *Ric. Sci.* », 25, 2258 (1955) e 27, 1549 (1957).
- [8] G. SCOLLO-LAVIZZARI, « *Ric. Sci.* », 26, 2146 (1956).
- [9] G. COTRONEI, « *Arch. Zool. Ital.* », 10, 85 (1922).
- [10] G. COTRONEI, « *Mon. Zool. Ital.* », 41, 8 (1930).
- [11] G. COTRONEI, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », 15, 236 (1932).
- [12] S. LØVTRUP, « *C. R. Lab. Carlesberg* », 29, 262 (1955).
- [13] E. URBANI e L. DE CESARIS COROMALDI, « *Ric. Sci.* », 24, 2364 (1954).
- [14] E. URBANI, « *Atti Soc. Ital. Anat.* », Relaz. al XVII Convegno Sociale, Roma 1956.
- [15] L. BELLINI, « *Rend. Accad. Naz. Lincei* », 22, 340 (1957).
- [16] E. URBANI, « *Ric. Sci.* », 22, 2174 (1952).
- [17] E. URBANI, S. RUSSO e L. ROGNONE, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », 14, 697 (1953).
- [18] E. URBANI, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », 21, 498 (1956).

**Biologia.** — *Sul comportamento della coda di un Anfibio urodelo trapiantata su Anuri dotati di differente velocità di sviluppo* (\*). Nota di ALDO ROSSI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Nella presente Nota espongo i primi risultati di ricerche sulle correlazioni di sviluppo tra coda trapiantata di *Triton taeniatus* e i portatori *Discoglossus pictus* ed *Hyla arborea* dotati di differente velocità di sviluppo.

Dai dati bibliografici risulta che Harrison (1924)<sup>(1)</sup> per primo studiò lo sviluppo dell'abbozzo dell'arto anteriore trapiantato reciprocamente fra

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) R. G. HARRISON, *Some unexpected results of the heteroplastic transplantation of limbs*, « *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* », vol. 10, p. 69 (1924).



*Amblystoma punctatum* a crescita lenta e *Amblystoma tigrinum* a crescita rapida ed osservò che l'abbozzo dell'arto di *A. tigrinum* trapiantato su embrioni di *A. punctatum* crescevano in modo tale da superare contemporaneamente la grandezza del portatore e quella del donatore. Nei trapianti reciproci (*A. punctatum* su *A. tigrinum*) l'arto trapiantato rimaneva invece più piccolo degli arti del donatore e del portatore. Harrison per spiegare questi risultati sostenne che due fattori agiscono contemporaneamente nello sviluppo dell'organo trapiantato: uno « *sviluppo potenziale* » insito nelle cellule del trapianto e un « *fattore regolativo della crescita* » che circola nel sangue del portatore: questo fattore sarebbe stato più intenso nell'*A. punctatum* che nell'*A. tigrinum*. Twitty e Schwind (1928-31)<sup>(2-3)</sup> in esperimenti di trapianto di occhio e di arto fra *A. punctatum* e *A. tigrinum* allevarono i portatori e i donatori di ambedue le specie con il massimo nutrimento. Sotto queste nuove condizioni di esperimento, i due Autori osservarono che i trapianti di occhio e di arto si sviluppavano con la stessa velocità dei donatori controllo. Successivamente Harrison (1929)<sup>(4)</sup> con nuove esperienze di trapianto di occhio, confermò i risultati di Twitty e Schwind, per cui identificò il « *fattore regolativo della crescita* » con il « *livello di nutrimento* ». Tuttavia Detwiler (1930)<sup>(5)</sup> fece alcune interessanti osservazioni che non possono essere spiegate con il solo fattore nutrimento: trapiantò su embrioni di *A. punctatum* l'arto anteriore di embrioni di *A. tigrinum* provenienti da due zone di raccolta, Nashville e Chicago, e dotati di differente velocità di sviluppo (l'*A. tigrinum* Chicago cresce più rapidamente dell'*A. tigrinum* Nashville) ed osservò che gli arti trapiantati crescevano più rapidamente degli arti dei controlli, sebbene i donatori fossero stati allevati con il massimo nutrimento. Inoltre notò che gli arti di *A. tigrinum* Nashville trapiantati su *A. punctatum* crescevano più rapidamente degli arti di *A. tigrinum* Chicago trapiantati ugualmente sull'*A. punctatum*. Secondo Detwiler il differente comportamento degli arti dei due *A. tigrinum* è dovuto più a differenze costituzionali dei due donatori che ad altri fattori come la temperatura ed il nutrimento.

Le mie esperienze sono state eseguite con lo scopo di verificare se il ritmo di sviluppo di un portatore Anuro può modificare il ritmo di sviluppo di un organo trapiantato di Urodelo: cioè più precisamente, ho voluto esaminare se i processi di formazione delle vertebre caudali vengono accelerati quando gli abbozzi della coda di *Triton taeniatus* vengono trapiantati su un portatore Anuro, il *Discoglossus pictus*, il cui ritmo di sviluppo è superiore a quello dei donatori. Inoltre ho trapiantato gli abbozzi di *Triton taeniatus* su

(2) V. C. TWITTY and J. L. SCHWIND, *The growth of heteroplastically transplanted eyes and limbs in Amblystoma*, « Proc. Soc. Exper. Biol. and Med. », vol. 25, p. 686 (1928).

(3) V. C. TWITTY and J. L. SCHWIND, *The growth of eyes and limbs transplanted heteroplastically between two species of Amblystoma*, « J. Exp. Zool. », vol. 59, p. 61 (1931).

(4) R. G. HARRISON, *Correlation in the development and growth of the eye studied by means of heteroplastic transplantation*, « Arch. Entw. mech. », vol. 120, p. 1 (1929).

(5) R. S. DETWILER, *Some observations upon the growth, innervation and function of heteroplastic limbs*, « J. Exp. Zool. », vol. 57, p. 183 (1930).

un altro portatore Anuro, l'*Hyla arborea*, il cui ritmo di sviluppo è inferiore a quello del *Discoglossus pictus*.

I donatori di *Triton taeniatus* sono stati operati ad uno stadio paragonabile al 31 del *Triton torosus* (secondo Twitty e Bodenstein) <sup>(6)</sup> ed i portatori *Discoglossus pictus* ed *Hyla arborea* ad uno stadio corrispondente al 16 della *Rana pipiens* (secondo Rugh 1948) <sup>(7)</sup>. Per gli stadi larvali del *Discoglossus pictus* e dell'*Hyla arborea* mi sono basato su quelli della *Rana pipiens* (secondo Taylor e Kollros) <sup>(8)</sup> e per gli stadi larvali del *Triton taeniatus* ho seguito quelli descritti da Glücksohn (1932) <sup>(9)</sup>.

In due lotti di esperienze (*Triton taeniatus* su *Discoglossus pictus* e *Triton taeniatus* su *Hyla arborea*) è stata asportata solo la parte distale del bottone codale del *Triton taeniatus*. In un altro lotto (*Triton taeniatus* su *Discoglossus pictus*) è stato asportato l'intero bottone codale più una parte dell'abbozzo dell'arto posteriore destro. Il trapianto è stato sempre eseguito sul fianco destro del portatore Anuro ed esattamente nel campo dell'arto posteriore. Complessivamente sono state eseguite 40 operazioni nella combinazione *Triton su Discoglossus* e 20 nella combinazione *Triton su Hyla*.

I portatori e i donatori sono stati allevati nelle migliori condizioni di nutrimento: gli Anuri col tuorlo d'uovo e lattuga bollita mentre i donatori controllo con dafnie e tubifex. Le esperienze sono state eseguite nei mesi di aprile-giugno e i portatori e i donatori sono stati allevati alla temperatura ambiente.

I portatori e contemporaneamente i controlli dei donatori sono stati sacrificati in tempi successivi e come fissativo è stato usato il Bouin acetico. I preparati istologici sono stati colorati con ematossilina ed eosina.

Nelle code dei controlli, di *Triton taeniatus* ho ricercato lo stadio in cui si formano le vertebre caudali ed ho potuto osservare che tale processo ha inizio fra lo stadio larvale 58-59 (fig. 9). Allo stadio 57 (fig. 8) non si trovano né archi vertebrali né il corpo della vertebra, ma solo la corda presenta un ispessimento della capsula fibrosa. Nella tavola sono rappresentate tre successive fasi di questo processo (figg. 7, 8, 9) corrispondenti agli stadi 50, 57 e 59, presi in esame rispettivamente 20, 30 e 40 giorni dopo l'operazione.

Dall'esame microscopico delle code di *Triton taeniatus* trapiantate su *Discoglossus pictus* (portatore a crescita rapida), risulta che dopo 10 giorni dall'operazione nelle code trapiantate non vi è alcun processo di formazione delle vertebre caudali (fig. 1). A tale data il portatore presenta ancora l'arto posteriore sotto forma di gemma rotondeggiante ossia allo stadio in cui la

(6) TWITTY and BODENSTEIN, vedi RUGH, *Experimental Embriology*, p. 101 (1948).

(7) R. RUGH, *Experimental Embriology*, p. 60 (1948).

(8) TAYLOR and KOLLROS, vedi R. RUGH, *Experimental Embriology*, p. 73 (1948).

(9) S. GLÜCKSOHN, *Äussere Entwicklung der Extremitäten und Stadieneinteilung der Larvenperiode von «Triton taeniatus» und «Triton cristatus»* Laur, «Arch. Entw. mech.», vol. 125, p. 341 (1932).

larghezza dell'arto posteriore è uguale alla sua lunghezza (stadio III). La formazione delle vertebre ha inizio nelle code trapiantate dopo 25 giorni dall'operazione (fig. 2) cioè quando il portatore presenta nell'arto posteriore ben distinte le piegature tra lo stilo-zeugopodio e fra zeugo-auto-podio, mentre si riduce il tubo cloacale (XVIII). Dopo 30 giorni dall'operazione le vertebre della coda trapiantata hanno raggiunto un notevole grado di sviluppo e di perfezionamento morfologico (fig. 3); il portatore sta metamorfosando ed ha la propria coda ridotta ad un piccolo moncone (stadio XXIV).

Nelle code di *Triton taeniatus* trapiantate su *Hyla arborea* i primi processi di formazione delle vertebre sono stati osservati dopo 45 giorni dall'operazione (fig. 5); il portatore presentava nell'arto posteriore gli abbozzi del secondo, terzo quarto e quinto dito (stadio IX). Le vertebre nella coda trapiantata non hanno avuto tuttavia uno sviluppo regolare e non hanno raggiunto il perfezionamento morfologico delle vertebre delle code trapiantate su *Discoglossus pictus* (vedi fig. 6 - stadio del portatore X, cioè nell'arto posteriore si sono evidenziati gli abbozzi di tutte le cinque dita - giorni 55 dalla operazione). Le vertebre caudali, molto probabilmente, hanno una struttura irregolare perché si sono formate quando erano già in atto i processi di incompatibilità (vedi fagocitosi fig. 5) tra portatore ed il trapianto.

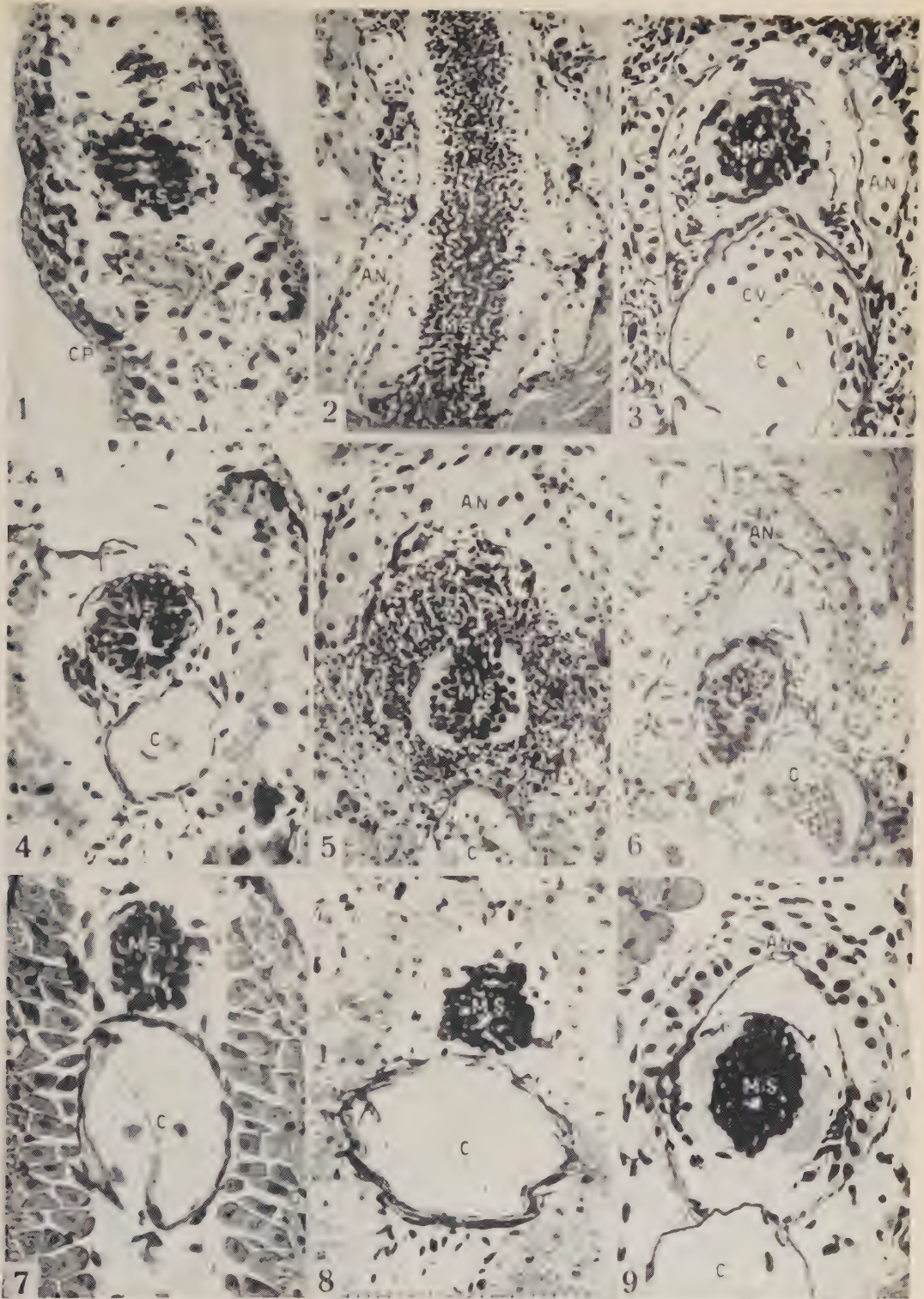
Dal confronto fra le code di *Triton taeniatus* trapiantate su *Discoglossus pictus* e quelle dei donatori controllo risulta che nelle prime la formazione delle vertebre caudali viene anticipata di circa 15 giorni rispetto alle seconde, mentre nelle code di *Triton taeniatus* trapiantate sull'*Hyla arborea* la formazione delle vertebre caudali avviene circa nello stesso periodo di tempo delle code dei controlli di *Triton taeniatus*. Quindi è ben chiaro che le vertebre si sono formate più rapidamente nelle code di *Triton taeniatus* trapiantate su portatore Anuro a crescita rapida (*Discoglossus*) che su uno a crescita lenta (*Hyla*).

Come si è detto nel cenno storico, secondo Twitty e Schwind (1928) lo sviluppo accelerato e ritardato di un organo trapiantato su un portatore con velocità di sviluppo differente da quella del donatore è dovuto semplicemente al differente livello alimentare dei donatori e dei portatori. Tuttavia nelle mie esperienze, pur avendo allevato i portatori Anuri nelle migliori condizioni di nutrimento, le vertebre si sono formate più tardivamente nelle code trapiantate sull'*Hyla arborea*, portatore a crescita lenta, che in quelle trapiantate su sul *Discoglossus pictus*, portatore a crescita rapida.

Pertanto ritengo che la differente velocità di sviluppo delle vertebre nelle code trapiantate sull'*Hyla arborea* e sul *Discoglossus pictus*, non è dovuta al livello alimentare, ma a quei stessi fattori, probabilmente ormonali, che regolano in modo differente il ritmo di sviluppo dei due portatori Anuri.

Nel corso delle mie esperienze di trapianto del bottone codale di Urodelo nel campo dell'arto posteriore del portatore Anuro, non ho mai avuto casi di trasformazione della coda in arto come è stato descritto recentemente da





Figg. 1, 2, 3. - Code di *Triton taeniatus* trapiantate su *Discoglossus pictus* rispettivamente dopo 10, 25 e 30 giorni dell'operazione. Figg. 4, 5, 6. - Code di *Triton taeniatus* trapiantate su *Hyla arborea*, rispettivamente dopo 30, 45 e 55 giorni dall'operazione. Figg. 7, 8, 9. - Code dei controlli di *Triton taeniatus*, rispettivamente dopo 20, 30 e 40 giorni dall'operazione.

Abbreviazioni: A.N. = arco neurale; C = corda; C.P. = cute portatore; C.V. = Corpo vertebrale; F = fagociti; M.S. = sistema nervoso.  
Per le figg. 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vedi la scala in calce alla fig. 8. Ogni unità della scala delle figg. 2 e 8 è uguale a 10  $\mu$ .





Farinella-Ferruzza (1957<sup>(10)</sup>) *Triton cristatus* su *Discoglossus pictus*). Solo nei casi di trapianto di bottone codale con una parte più o meno estesa dell'abbozzo dell'arto posteriore si è sviluppata prima una coda e poi, dopo circa 18 giorni dall'operazione, un arto.

Dopo circa un mese dall'operazione le code trapiantate presentano evidenti processi di involuzione con intensa fagocitosi (fig. 5). La muscolatura ed il sistema nervoso degenerano più rapidamente della cartilagine delle vertebre caudali. Infine la coda, totalmente rivestita da un manicotto cutaneo del portatore Anuro, viene invasa dal connettivo del portatore e quindi si riassorbe più o meno rapidamente.

Secondo Farinella-Ferruzza durante i processi involutivi della coda si avrebbe la degenerazione del sistema nervoso, della corda e della cartilagine mentre le fibre muscolari si sdifferenzierebbero e si trasformerebbero in cellule isolate del tipo mesenchimale. Successivamente sotto l'azione del campo dell'arto le cellule mesenchimali neoformate si ridifferenzierebbero in cartilagine e in fibre muscolari dello scheletro dell'arto e del cinto indotto.

In tutte le mie esperienze non ho mai osservato casi di sdifferenziamento delle fibre muscolari ma solo evidenti fenomeni di degenerazione.

#### CONCLUSIONI.

Sono stati trapiantati bottoni codali di *Triton taeniatus* nel campo dell'arto posteriore di embrioni di *Discoglossus pictus* e di *Hyla arborea*. Pertanto, scopo della ricerca è stato di esaminare se il ritmo di sviluppo dei due portatori Anuri può modificare il ritmo di sviluppo delle vertebre nelle code trapiantate di *Triton taeniatus*.

I risultati della ricerca sono stati i seguenti:

1° le vertebre si sono formate prima nelle code di *Triton taeniatus* trapiantate sul portatore Anuro a crescita rapida, il *Discoglossus pictus*, che in quelle trapiantate sul portatore Anuro a crescita lenta, l'*Hyla arborea*;

2° le vertebre si sono formate prima nelle code di *Triton taeniatus* trapiantate sul *Discoglossus pictus* (portatore a crescita rapida) che in quelle dei controlli dell'Urodelo; mentre nelle code di *Triton taeniatus* trapiantate sull'*Hyla arborea* (portatore a crescita lenta) le vertebre si sono formate circa nello stesso periodo di tempo che nelle code dei donatori di *Triton taeniatus*.

Questi risultati dimostrano chiaramente che il ritmo di sviluppo del portatore Anuro influisce sul ritmo di sviluppo delle vertebre nelle code trapiantate dell'Urodelo. Di conseguenza la differente velocità di sviluppo delle vertebre nelle code trapiantate sull'*Hyla arborea* e sul *Discoglossus pictus* è da mettersi in rapporto con quei stessi fattori che regolano differentemente il ritmo di sviluppo dei due portatori Anuri.

(10) N. FARINELLA-FERRUZZA, *Trasformazione di coda in arto nei trapianti xenoplastici di bottone codale di « Triton cristatus » su « Discoglossus »*, « Acta Embr. Morph. Exp. », vol. I, p. 171 (1957).

**Biologia.** — *Osservazioni sulla sopravvivenza dei gangli nervosi di pollo in coltura* (\*). Nota di ANNA MARIA ZACCHEI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

La maggior parte delle ricerche sul comportamento delle cellule nervose fuori dell'organismo sono state rivolte a studiare il differenziamento di cellule embrionali; altre, meno numerose, hanno cercato di fissare i limiti di sopravvivenza degli elementi nervosi differenziati.

L'isolamento di interi gangli nervosi o di loro parti è stato realizzato da vari autori sia *in vivo* che *in vitro*; al primo tipo di esperienze appartengono i trapianti di gangli di animali giovani o adulti nel tessuto connettivo sottocutaneo (o lungo il decorso dello sciatico) dello stesso o di un altro individuo.

Marinesco (1907) [1], Nageotte (1907) [2], Cajal (1910) [3], Agosti (1911) [4] e altri Autori che hanno eseguito esperienze con questa tecnica, sono concordi nel ritenere che le cellule dei gangli trapiantati vanno incontro a fenomeni degenerativi più o meno rapidi, con tempi diversi di sopravvivenza a seconda della natura del ganglio, della regione in cui è stato posto il trapianto e delle modalità con le quali esso è stato eseguito. Durante il periodo di sopravvivenza - da 9 giorni secondo Cajal a 23 secondo altri Autori - ai fenomeni chiaramente involutivi a carico della maggior parte degli elementi cellulari si accompagnano, sia pure in misura assai ridotta, tentativi di rigenerazione di altri elementi.

Allorché il ganglio viene trapiantato, come hanno fatto Ranson (1914) [5] e Tidd (1952) [1], in un ambiente migliore del connettivo sottocutaneo, quale ad esempio la corteccia cerebrale, la sopravvivenza si protrae per un periodo assai maggiore (99 giorni nelle osservazioni di Tidd); questo dato e l'osservazione che i gangli posti più in prossimità del ventricolo laterale, e quindi meglio nutriti, si trovano in condizioni migliori, portano a ritenere che tra le cellule nervose e il nuovo ambiente, si possa realizzare una condizione che consente una indefinita sopravvivenza.

Le osservazioni di Legendre e Minot (1910, 1911) [7] sui gangli nervosi coltivati *in vitro* in sangue defibrinato, hanno mostrato che sensibili alterazioni strutturali si manifestano già a partire dall'8ª ora con omogenizzazione della sostanza cromofila e riduzione del volume cellulare e nucleare. Dopo 24 ore esse sono estese alla quasi totalità delle cellule, che appaiono in acromatosi assoluta; molti elementi sono invasi dalle cellule nevrogliche indicando una neuronofagia assai intensa. Se la coltura anziché a 39° è mantenuta a 15°-20° i segni di sofferenza sono assai più modesti e si osservano aspetti morfologici pressoché normali fino al 4° giorno.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

Nel nostro Istituto da tempo si conducono ricerche sul ciclo vitale delle cellule nervose a mezzo di tecniche diverse per la valutazione dei vari fattori che influiscono sulla vita del neurone. Oltre a ricerche su cellule nervose in differenziamento, eseguite anche con tecniche di culture *in vitro* (Stefanelli e Chiti [8], Stefanelli [9]), sono state iniziate osservazioni su organi già differenziati o in avanzato differenziamento (*culture di organi* - Stefanelli e Levanti [10]) nell'intento di esaminare comparativamente le modificazioni involutive degli elementi differenziati ed in particolare la labilità delle diverse strutture cellulari. Nell'ambito di queste ultime osservazioni, ho eseguito uno studio citologico ed istochimico sul comportamento delle cellule nervose di gangli interi isolati *in vitro*.

Sono state allestite colture su vetrini da orologio contenuti in capsula Petri, di gangli spinali (lombo-sacrali) di embrione di pollo a 8-10-13 giorni di incubazione. Come mezzo di coltura è stata usata una miscela di tre parti di siero di pollo e tre di estratto embrionale al 50 % in Tyrode (l'estratto è stato fatto con embrioni di 7 giorni di incubazione). Il mezzo è stato cambiato ogni due giorni e gli espianti sono stati fissati dopo 12, 24, 48, 72, 96 ore di coltura. I pezzi sono stati fissati in Helly; le sezioni di 5  $\mu$  di spessore sono state colorate con il Bleu di toluidina, con o senza trattamento con ribonucleasi secondo la tecnica di Brachet. Contemporaneamente agli espianti sono stati fissati gangli di controllo (anche in Bouin per il metodo di Bodian al protargolo); corrispondenti per numero di ore di sviluppo a quelli in coltura.

*Al momento dell'espianto* il ganglio si presenta rivestito di una capsula sottile; in esso sono ben evidenti, accanto ad elementi differenziati provvisti di neurofibrille e di due prolungamenti (che daranno poi il prolungamento a T), elementi molto piccoli, sprovvisti di questi caratteri, generalmente considerati come cellule indifferenziate da cui si formeranno gli amfociti, i lemnoblasti, le cellule del mesenchima e infine i neuroni a differenziazione tardiva.

Le cellule sono disposte a gruppi, separati da fascetti di fibre nervose, formanti un bordo compatto alla superficie dell'organo intorno alla radice nervosa. Le grandi cellule sono sferiche o ellissoidali, a volte piriformi con nucleo eccentrico provvisto di uno o due nucleoli. La sostanza tigroide è abbondante, intensamente colorata, disposta a cappuccio a uno o ambedue i poli della cellula, o a zolle con l'aspetto caratteristico delle cellule differenziate (figg. 1, 2). Non ho notato differenze in rapporto all'età del ganglio al momento dell'espianto, in quanto lo studio dei gangli in sviluppo mostra che le mitosi degli elementi indifferenziati si arrestano al 7° giorno. Come è noto da questo momento il numero degli elementi del ganglio è definitivo ed i neuroblasti si evolvono in cellule gangliari. Al 12° giorno si ha una nuova spinta nel differenziamento dei neuroblasti mentre il numero degli elementi piccoli diminuisce. Inoltre i neuroni differenziati aumentano in grandezza a partire dal 6° giorno fino alla fine del periodo di accrescimento; gli altri elementi invece persistono per un periodo assai lungo e costituiscono una riserva (ved.: Levi [11]).



Nella descrizione che segue riferirò pertanto i quadri più significativi da me osservati, dopo vari tempi di coltura *in vitro*, indipendentemente dall'età raggiunta dal ganglio al momento dell'espianto.

*Dopo 12 ore* al centro del ganglio si vedono cellule che sono andate incontro a una rapida degenerazione. Queste cellule sono cromofobe ed in esse si distingue appena il nucleo e il nucleolo. Altri neuroni sono intensamente cromofili con contorni cellulari assai irregolari. Solo in qualche elemento la sostanza tigroide presenta una struttura a granuli minuti; in molti è irregolarmente spinta alla periferia della cellula; il nucleo allora è eccentrico e molto deformato con uno o due grossi nucleoli. Si nota intorno alle cellule cromofile la presenza di goccioline di sostanza basofila intensamente colorate, che appaiono come espulse all'esterno (fig. 3).

*Dopo 24 ore* le grandi cellule centrali appaiono ancor più intensamente cromofile. La quantità di goccioline citoplasmatiche extracellulari è aumentata. Le cellule cromofile hanno un nucleo grande e vacuoloso. In altri elementi esso appare spostato ad un estremo della cellula. Si notano cellule come vuote in cui la sostanza cromofila è alla periferia tutta a masse irregolari. Qualche cellula periferica ha ancora una forma normale e presenta tigroide a zolle.

*Dopo 48 ore* oltre alle cellule in acromatosi assoluta (fig. 4) si vedono detriti di sostanza basofila (figg. 6, 7). Negli gangli prelevati a 13 giorni di incubazione ci sono ancora elementi intensamente cromofili (fig. 5) con nuclei molto deformati e spostati quasi fuori della cellula la cui forma è irregolare.

*Dopo 72 ore* non c'è quasi più traccia di cellule, si notano invece molte cavità. Qualche piccola cellula sotto la guaina esterna del ganglio presenta ancora una debole colorazione omogenea.

*Dopo 96 ore* nei gangli prelevati a 10 giorni si nota qualche cellula sopravvissuta disposta in una zona ad anello alla periferia del ganglio. In esse la sostanza basofila è disposta ad ammassi irregolari e laminari, compatti alla periferia cellulare e con aspetto polverulento internamente. Non si notano più elementi al centro del ganglio ma solo detriti basofili sparsi.

Da queste osservazioni risulta che le cellule nervose dei gangli mantenuti in un mezzo di coltura subiscono un processo di degenerazione relativamente rapida con tigrolisi totale, che provoca una riduzione numerica dei neuroni: si osservano elementi cromofobi caratterizzati dalla scomparsa quasi totale di sostanza basofila citoplasmatica, da un nucleo omogenizzato deformato e atrofico, con un nucleolo decolorato e ipertrofico. Tra questi sono riconoscibili elementi che presentano quadri di cromatofilia diffusa e rapida disgregazione delle zolle di tigroide dal centro alla periferia della cellula. Sono poi presenti cellule cromofile in cui si ha alterazione notevole di forma sia del citoplasma che del nucleo. Il citoplasma diventa ricco di materiale basofilo; il nucleolo aumenta di volume.

Il processo di degenerazione, che è più intenso nella parte più profonda del ganglio, già al terzo giorno ha raggiunto gli elementi più superficiali. Non si osservano fenomeni di neuronofagia.

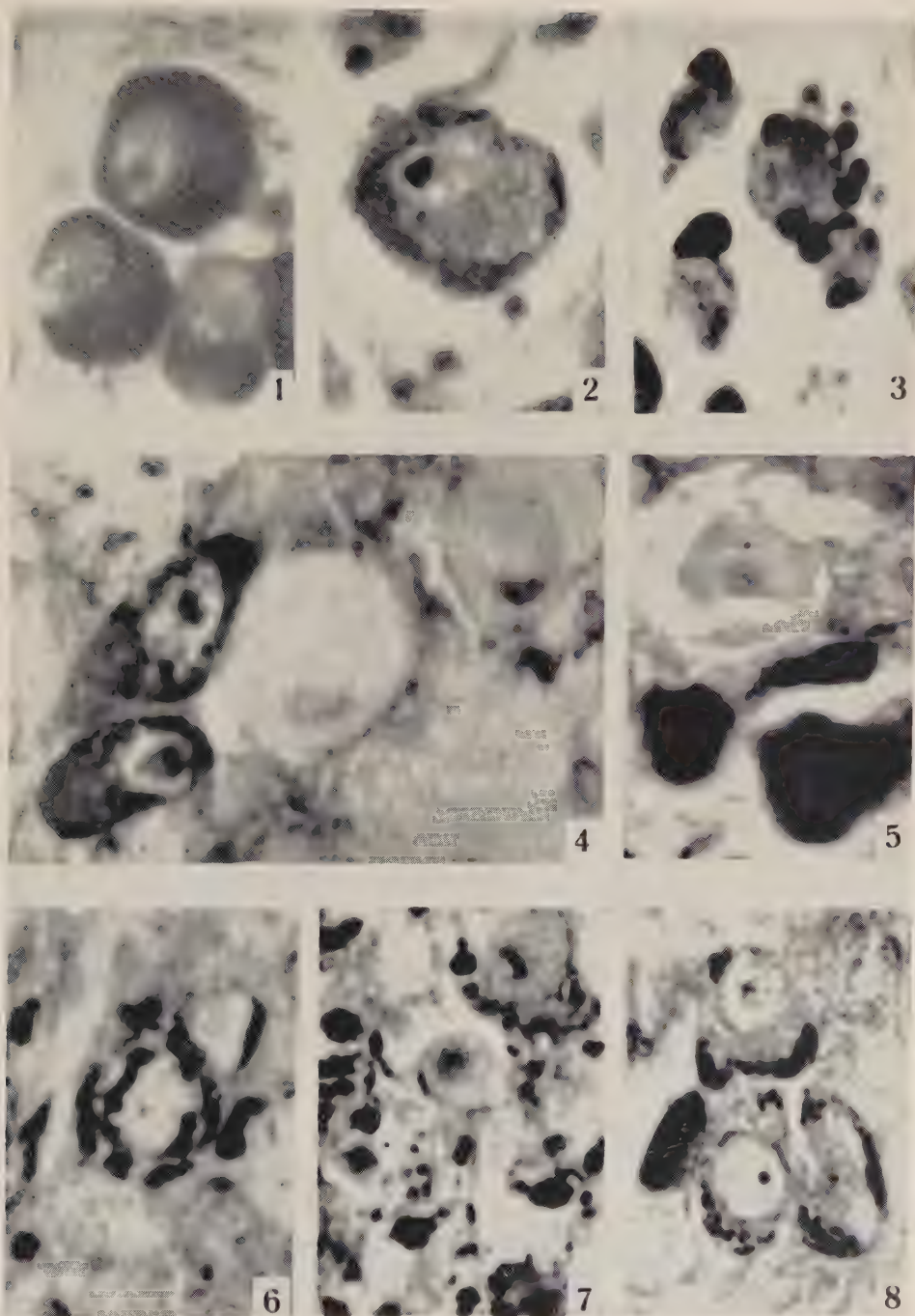


Fig. 1 e 2. - Cellule gangliari spinali di embrione di pollo di 10 e 13 giorni d'incubazione in differenziamento.

Fig. 3-8. - Cellule gangliari in coltura; vari aspetti del processo degenerativo.



Un aspetto osservato con notevole frequenza in tutti gli stadi del processo degenerativo è rappresentato dalla presenza di goccioline intensamente basofile extracellulari. Ho sottoposto ad un controllo con la ribonucleasi, secondo la tecnica di Brachet, i preparati in cui si osservano queste formazioni ed ho notato in tutti i casi la loro scomparsa. È questo un quadro che si riscontra in molti casi in cui la degenerazione dell'elemento cellulare è preceduta da un accumulo citoplasmatico di sostanze intensamente basofile. Questo fenomeno, osservato da diversi Autori rappresenta una delle manifestazioni citologiche dell'aumento dell'RNA che si osserva nei fenomeni regressivi. La interpretazione esatta di questo quadro citologico è controversa; mentre alcuni ritengono che si tratti di modificazioni chimico-fisiche delle nucleoproteine, che provocano un aumento della basofilia, altri pensano che vi sia un reale accumulo dei ribonucleoproteidi.

I fenomeni degenerativi di cellule nervose causati da fattori lesivi di varia natura sono, in genere, preceduti da ipertrofia reattiva e cromatolisi diffusa: questi quadri sono stati osservati, soprattutto in seguito a lesioni traumatiche, su vari materiali (Zannone 1947) [12].

La involuzione fisiologica delle cellule che si osserva, a seconda delle caratteristiche proprie di ciascun tipo cellulare, in vari momenti del ciclo vitale (Glücksmann 1951 [13]; ved.: Stefanelli [14] per le cellule nervose), o in condizioni sperimentali per interruzione dell'attività funzionale, presenta invece quadri di ipotrofia cellulare che termina con « un processo di gelazione accompagnata da cromatolisi diffusa e da picnosi » cui spesso fanno seguito fenomeni di neuronofagia ad opera di macrofagi (Stefanelli 1955) [14].

Dalle mie osservazioni su culture di gangli interi (cultura di organo) si può concludere: 1° le cellule del ganglio spinale in coltura sopravvivono per un limitato periodo senza ulteriore accrescimento e senza che proseguano i fenomeni di differenziamento iniziati al momento dell'espianto; 2° la sopravvivenza delle cellule nervose non si prolunga oltre il terzo giorno; solo in qualche caso possono osservarsi elementi residui oltre tale termine; 3° i fenomeni di involuzione si presentano con quadri vari, in cui però è possibile riconoscere due aspetti caratteristici: *a*) presenza di cellule che, attraverso una graduale diminuzione della cromatofilia, giungono ad una condizione di acromatosi totale, *b*) presenza di cellule intensamente cromofile che vanno incontro ad atrofia e frammentazione; 4° si osserva costantemente la presenza di sferule extracellulari intensamente basofile, simili a quelle osservate in altre condizioni involutive cellulari; tali sferule sono costituite da ribonucleotidi in quanto scompaiono per azione della ribonucleasi; 5° i quadri osservati sono simili a quelli riscontrati in varie condizioni di degenerazione fisiologica a seguito della perdita dell'attività funzionale anche se più rapidi in conseguenza del trauma e dell'anossia <sup>(1)</sup>.

(1) Trapianti di gangli nervosi di Anfibi Anuri nella camera anteriore dell'occhio sono stati eseguiti nel nostro Istituto dalla NUZZO (1957) [15]; in queste condizioni lo stabilirsi di una vascolarizzazione consente ad alcune cellule una sopravvivenza protratta (fino a 63 giorni) con aspetti reattivi, cui seguono fenomeni di neuronofagia.



## BIBLIOGRAFIA.

- [1] MARINESCO G., « Rev. Neurol. », 15, 241-252 (1907).
- [2] NAGEOTTE J., « Rev. Neurol. », 15, 357-368 (1907).
- [3] CAJAL S. R., « Trab. Lab. Invest. Biol. Univ. », Madrid VIII, 1911.
- [4] AGOSTI F., « Anat. Anz. », 39, 424-473 (1911).
- [5] RANSON S. W., « J. Comp. Neur. », 24, 547-558 (1914).
- [6] TIDD C., « J. Comp. Neur. », 55, 531-541 (1932).
- [7] LEGENDRE R. e MINOT H., « C. R. Soc. Biol. », 68, 839, 885 (1910); ID., « C. R. Soc. Biol. », 69, 618 (1910); ID., « C. R. Soc. Biol. », 70, 18 (1911).
- [8] STEFANELLI AL. e CHITI L., « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), XVI, 287 (1954).
- [9] STEFANELLI AL., « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), XVI, 792 (1954); ID., « Nature », 174, 974 (1954); ID., « Acta Embriol. Morph. Exp. », I, 56 (1957).
- [10] STEFANELLI AL. e LEVANTI C., « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), XX, 163 (1956).
- [11] LEVI G., « Arch. Biol. », 52, 133-278 (1941).
- [12] ZANNONE L., « Ric. Morfol. », XXII (1947).
- [13] GLÜCKSMANN A., « Biol. Rew. », 26, 59-86 (1951).
- [14] STEFANELLI A., « Ric. Scient. », 10, 2778-2795 (1955).
- [15] NUZZO F., « Riv. Neurobiol. » (in stampa), 1957.

**Biologia.** — *Il metabolismo del testosterone da parte di «Lebistes reticulatus» e di «Gambusia holbrooki»: Ricerche «in vivo» (\*)*.  
 Nota di GIOVANNI CHIEFFI e EUGENIO DE LUTIO, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

Il metabolismo del testosterone è stato oggetto di numerose ricerche da parte di diversi Autori (per una estesa bibliografia sull'argomento cfr. Dorfman e Shipley [1], p. 67). Samuels e coll. [2], [3], [4], [5], inoltre, hanno dimostrato la presenza nel fegato di almeno due sistemi enzimatici, richiedenti come cofattori l'uno il difosfopiridinnucleotide (DPN), l'altro il citrato. Il primo composto è responsabile dell'ossidazione a chetone del gruppo alcoolico in C-17, il secondo accelera la riduzione del  $\Delta^4$  doppio legame e del cheto-gruppo in C-3.

Una ricerca comparativa sul metabolismo del testosterone da parte di diverse specie di Vertebrati è stata eseguita da Samuels e coll. [6] con l'intento di stabilire un eventuale sviluppo filogenetico dei sistemi enzimatici. Questi Autori osservarono che i Pesci, gli Anfibi ed i Rettili possiedono un sistema enzimatico che distrugge lentamente il doppio legame nell'anello A, senza formare 17-chetosteroidi. Inoltre il DPN ed il citrato non presentavano alcuna azione. Negli Uccelli e nei Mammiferi le reazioni catalizzate da DPN portavano alla formazione di 17-chetosteroidi, mentre il citrato

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Genetica dell'Università di Napoli.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

favoriva la distruzione del  $\Delta^4$  doppio legame, senza la formazione di 17-chetosteroidi. Anzi la formazione di questi in presenza di DPN diminuiva con l'aggiunta di citrato.

Tali risultati, secondo gli Autori, dimostravano che parallelamente allo sviluppo di un controllo omeotermico, i sistemi enzimatici responsabili del metabolismo degli ormoni sessuali divenivano più complessi.

Nel corso di nostre ricerche sul metabolismo del testosterone da parte di Vertebrati inferiori, abbiamo ottenuto risultati contrastanti con quelli dei succitati Autori, e che ci sembra utile segnalare.

Sono state prese in esame due specie di Teleostei: *Lebistes reticulatus* e *Gambusia holbrooki*. Il metabolismo qualitativo e quantitativo del testosterone è stato studiato *in vivo*.

Per la ricerca quantitativa venivano adoperati per ogni esperimento 10 esemplari adulti di *Lebistes* oppure 2 di *Gambusia*, lavati ripetutamente. Essi venivano allevati a temperatura ambiente (circa 22°C) in 50 ml di acqua di fonte sterilizzata, contenente 20.000 U. O. di penicillina G cristallizzata, 0,01 gr. di streptomicina e 200  $\mu$ g di testosterone sciolti in 0,2 ml di alcool etilico assoluto. Il metabolismo veniva interrotto dopo 6, 12, 24, 48 ore. L'acqua filtrata veniva estratta per 3 volte con 30 ml di cloroformio distillato. Dopo distillazione del cloroformio il residuo secco veniva disciolto con 2 ml di alcool etilico assoluto. 0,4 ml di questa soluzione, portati a 5 ml con lo stesso solvente, servivano per la lettura allo spettrofotometro UNICAM. Per la determinazione del testosterone è stata usata la banda di assorbimento a 240 m $\mu$  dovuta al doppio legame presente nell'anello A<sup>(1)</sup>. Come bianco veniva usato l'estratto dell'acqua di allevamento di pesci cui non era aggiunto testosterone.

In esperimenti di controllo (aggiunta del testosterone subito prima dell'estrazione con cloroformio) il testosterone veniva recuperato con un errore del  $\pm 2,5$  %. Un ulteriore controllo veniva effettuato aggiungendo a 50 ml di acqua delle vasche di allevamento dei pesci, 200  $\mu$ g di testosterone. Dopo 24 e 48 ore l'acqua veniva estratta secondo la tecnica suddescritta. Anche in questo caso il testosterone era recuperato con un errore del  $\pm 2,5$  %. Tale controllo serviva ad escludere un eventuale metabolismo del testosterone da parte di batteri o protozoi trasportati passivamente dagli animali usati per gli esperimenti, anche se venivano ripetutamente lavati.

Per l'esame qualitativo del metabolismo dell'ormone venivano usati dopo ripetuto lavaggio, 30 esemplari di *Lebistes* e 10 di *Gambusia* per ogni esperimento, allevati in 150 ml di acqua contenente 600  $\mu$ g di testosterone. Gli estratti venivano cromatografati su carta Whatman n. 1 secondo la tecnica di Savard [7]. Dopo scorrimento gli steroidi venivano messi in evi-

(1) Ogni variazione o scomparsa di assorbimento alla lunghezza d'onda di 240 m $\mu$  può essere dovuta sia alla riduzione del cheto-gruppo in C — 3 sia alla distruzione del  $\Delta^4$  doppio legame, oppure alla contemporanea riduzione di entrambi i doppi legami.

denza sulla carta mediante la reazione di Zimmermann modificata da Haskins e coll. [8].

La eventuale formazione di coniugati veniva controllata mediante idrolisi. All'acqua dopo filtrazione veniva aggiunto HCl in proporzione di 20 volumi per cento. Dopo ebollizione sotto refflusso per 20' e successivo raffreddamento, l'acqua era estratta e analizzata come di consueto.

I vari procedimenti di distillazione e di refflusso venivano eseguiti con tutti i raccordi in vetro (Pyrex Standard Type).

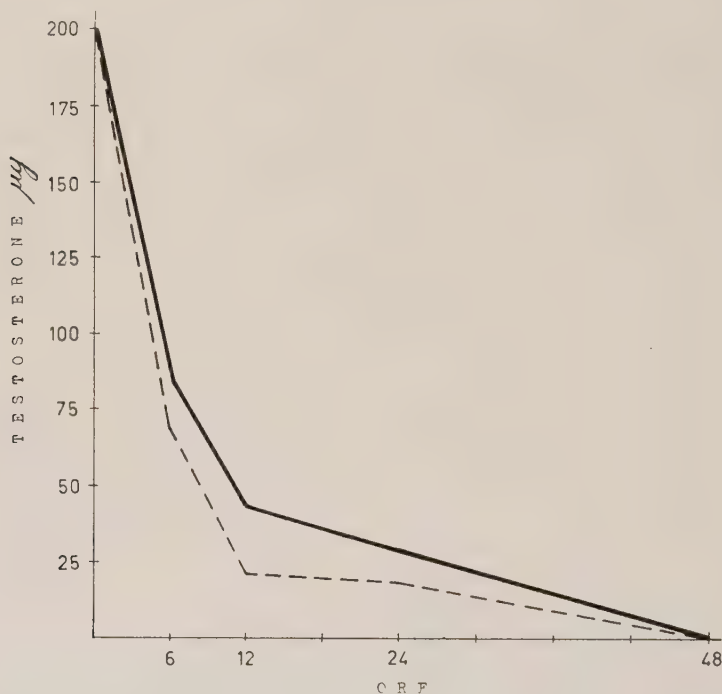


Fig. 1. - Intensità del metabolismo del testosterone da parte di *Lebistes reticulatus* (10 animali per gruppo) e di *Gambusia holbrooki* (2 animali per gruppo).

Lebistes: - - - -  
Gambusia: ———

La fig. 1 illustra l'intensità di metabolismo del testosterone da parte di *Lebistes* e di *Gambusia*. Si rileva che dopo 48 ore tutto il testosterone scompare; si calcola che ogni individuo di *Lebistes* o *Gambusia* consumi in media rispettivamente circa 1,4 e 6,4 µg di ormone per ora.

La cromatografia di ripartizione su carta ha messo in evidenza sia nel caso di *Lebistes* sia in quello di *Gambusia* la presenza di una macchia dello stesso  $R_T$  dell'androsterone e colorantesi in violetto con la reazione di Zimmermann, secondo il modo caratteristico dei 17-chetosteroidi. Questa macchia compare già dopo 6 ore di metabolismo, raggiunge un massimo d'intensità verso la 12<sup>a</sup> ora e scompare dopo 24 ore. Probabilmente l'androsterone subisce a sua volta un processo di degradazione. Cromatografie di estratti di acqua

di allevamento, cui non veniva aggiunto testosterone, risultavano completamente negative. Anche le cromatografie di estratti di acqua sottoposta ad idrolisi acida non mettevano in evidenza altre macchie, all'infuori di quelle corrispondenti al testosterone ed all'androsterone.

È evidente che tali piccoli Teleostei non solo sono capaci di ridurre il sistema di doppi legami presenti nell'anello A, ma anche possono ossidare a chetone il gruppo alcolico in C-17 come gli Uccelli ed i Mammiferi.

Tali risultati escludono quindi l'ipotesi offerta da Samuels e coll. (loc. cit.) di uno sviluppo filogenetico dei sistemi enzimatici degradanti gli ormoni sessuali parallelamente allo sviluppo del controllo omeotermico.

Bisogna d'altra parte tener presente che mentre le ricerche di Samuels e coll. sono state eseguite *in vitro* con fettine di fegato <sup>(2)</sup>, le nostre erano condotte *in vivo*, quindi avendo a disposizione l'intero organismo. In altri termini nei nostri esperimenti *in vivo*, il rene o altro organo e non il fegato potrebbero essere stati responsabili del metabolismo del testosterone in 17-chetosteroidi. Ciò non giustifica però le conclusioni di ordine generale cui sono giunti Samuels e coll.

Ulteriori esperimenti di metabolismo *in vitro* sia da parte del fegato sia da parte del rene serviranno a stabilire la sede di formazione dei 17-chetosteroidi dal testosterone, dimostrata *in vivo*.

Ricerche *in vivo* ed *in vitro* sul metabolismo del testosterone da parte di Anfibi allo stadio larvale ed a quello adulto [9], [10], [11], convalidano i presenti risultati ottenuti con i Pesci.

Indipendentemente da tali critiche, è da considerare inoltre che a struttura degli ormoni sessuali dei Vertebrati inferiori è tuttora sconosciuta. Per cui l'osservazione di un diverso metabolismo degli ormoni sessuali da parte di tali organismi rispetto agli Uccelli ed ai Mammiferi, potrebbe essere imputata all'esistenza di sistemi enzimatici diversi, adattati alla differente struttura degli ormoni sessuali.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] R. I. DORFMAN, R. A. SHIPLEY, *Androgens*, New York, 1956.
- [2] L. T. SAMUELS, C. MCCAULAY, D. M. SELLERS, « J. Biol. Chem. », 168, 477-483 (1947).
- [3] M. L. SWEAT, L. T. SAMUELS, « J. Biol. Chem. », 173, 433-434 (1948).
- [4] M. L. SWEAT, L. T. SAMUELS, « J. Biol. Chem. », 175, 1-5 (1948).
- [5] L. T. SAMUELS, M. POTTNER, « Federation Proc. », 6, 287 (1947).
- [6] L. T. SAMUELS, M. L. SWEAT, B. H. LEVEDAHL, M. POTTNER, M. L. HELMREICH, « J. Biol. Chem. », 183, 231-239 (1950).
- [7] K. SAVARD, « J. Biol. Chem. », 202, 457-477 (1953).
- [8] A. L. HASKINS, A. I. SHERMAN, W. M. ALLEN, « J. Biol. Chem. », 182, 429-437 (1950).
- [9] G. CHIEFFI, « Boll. Zool. », 24, 121-130 (1956).
- [10] G. CHIEFFI, E. DE LUTIO, « Atti del XXIX Congresso dell'Unione Zoologica Italiana », Palermo 1957, in corso di stampa.
- [11] G. CHIEFFI, in corso di stampa.

<sup>(2)</sup> Nel lavoro di SAMUELS e coll. non è riportato il nome della specie di Pesce su cui sono stati eseguiti gli esperimenti.



**Patologia.** — *Esempio di calcolo di una curva approssimante una linea di sezione principale della superficie anteriore della cornea.*

Nota di GIROLAMO LO CASCIO, FERNANDO DE LEONIBUS, MICHELE LIGUORI, presentata (\*) dal Socio L. CALIFANO.

Per lo studio della forma e della curvatura della superficie anteriore del cristallino si adotta di solito un procedimento che consiste nel seguire trigonometricamente, nell'ambito del piano di simmetria del sistema ottico dell'occhio, il percorso di un raggio luminoso il quale provenendo dall'aria colpisce la superficie anteriore della cornea, viene rifratto nell'umore acqueo e quindi, riflesso dalla superficie anteriore del cristallino, riattraversa la cornea e torna nell'aria.

Se si conoscono le caratteristiche del punto di incidenza e di quello di emergenza sulla cornea, l'angolo di apertura del raggio incidente e di quello emergente e l'indice di rifrazione dell'acqueo, è possibile calcolare le caratteristiche del punto della superficie lenticolare anteriore a livello del quale avviene la riflessione. Ripetendo la ricerca per altri raggi luminosi con diverso angolo di apertura, si vengono a conoscere le caratteristiche di una serie di punti della superficie anteriore del cristallino e quindi la forma stessa della superficie.

Ma per ottenere le caratteristiche dei punti di incidenza e di emergenza sulla cornea è necessario avere prima determinato nell'ambito del piano di simmetria le caratteristiche di numerosi punti della superficie anteriore della cornea, di guisa che, avendo ad esempio misurato il valore dell'ordinata o quello dell'angolo di apertura della normale nel punto di emergenza, si possono poi per interpolazione conoscere le altre caratteristiche.

Questo procedimento di interpolazione è stato ampiamente usato da Nordenson e da due di noi (Lo Cascio, De Leonibus), ma più esatto sarebbe il calcolo delle caratteristiche se si conoscesse l'equazione della curva approssimante la linea di sezione della superficie anteriore della cornea col piano di simmetria.

Tentativi del genere sono stati fatti, e mentre Helmholtz in base alle sue misurazioni propose come superficie approssimante un ellissoide, ulteriori ricerche dimostrarono che alle linee di sezione misurate non potevano sostituirsi delle ellissi perché la curvatura variava molto lentamente nelle parti centrali e rapidamente in quelle periferiche.

Mathiessen infatti a conclusione delle sue indagini fece rilevare che per la parte centrale della linea di sezione si sarebbe dovuto adoperare una ellissi di eccentricità diversa da quelle delle parti periferiche.

(\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

Successivamente Aebly consigliò di calcolare una curva trascendente, ad esempio una catenaria, e Berg di adottare le curve:

$$R = \frac{R_0}{1 - \tan^3 w}$$

$$R = \frac{R_0}{1 - \tan^4 w}$$

nelle quali  $R_0$  è il raggio nell'elemento centrale,  $R$  il raggio di un elemento periferico la cui normale nel centro formi un angolo di  $w$ .

In un recentissimo pregevole studio sull'argomento Nordenson conclude che nella zona ottica della cornea per la linea di sezione verticale passante per l'asse ottalmometrico può adottarsi come curva approssimante una catenaria simmetrica e per quella orizzontale una catenaria asimmetrica, mentre per le parti periferiche di ambedue le sezioni le curve approssimanti sarebbero evolventi del cerchio.

Nel corso di alcune ricerche di uno di noi (Lo Cascio) sulla superficie anteriore del cristallino nell'occhio accomodato e di simili ricerche in corso di De Leonibus sulla superficie posteriore, ci siamo convinti, come è stato già detto, che una migliore elaborazione dei dati sperimentali avrebbe potuto farsi se fosse stato possibile conoscere l'equazione della curva approssimante la linea di sezione della superficie anteriore della cornea col piano di simmetria nell'occhio in esame.

Con la presente Nota vengono comunicati i risultati di un tentativo fatto a questo scopo.

Il problema della determinazione della curva approssimante una sezione principale della cornea è stato trattato come problema piano perché tale può essere ridotto.

Di fatti la curva cercata è per definizione l'intersezione della superficie corneale col proprio piano di simmetria, e perciò è inutile dire che appartiene a tale piano. Poiché la cornea è una superficie regolare, cioè senza spigoli, le normali alla cornea nei punti del piano di simmetria appartengono anche loro a questo piano ed inoltre, osservazione utile per il seguito, sono anche normali della curva negli stessi punti. Siccome sperimentalmente si fa in modo che i raggi luminosi incidenti impiegati nelle misure appartengano al piano di simmetria, anche i raggi riflessi stanno nel medesimo piano dei raggi incidenti e della normale, ossia appartengono al piano di simmetria. E dunque appartenendo al piano di simmetria non solo la curva di intersezione ma anche le normali ed i raggi incidenti e riflessi, il problema si riduce ad un problema in tale piano.

*Determinazione delle coordinate dei punti P.* — Le condizioni sperimentali per la ricerca sono riprodotte dalla fig. 1 nella quale simmetricamente rispetto all'asse ottalmometrico ossia alla normale corneale parallela alla linea di mira sono disposte due piccole sorgenti luminose  $D_1$  e  $D_2$ ; ai raggi inci-

dentì  $D_1$ ,  $P_1$  e  $D_2$ ,  $P_2$  corrispondono i raggi riflessi paralleli all'asse  $P_1 F_1$  e  $P_2 F_2$ ; ciascuna sorgente luminosa è posta alla distanza angolare di  $4^\circ$  dall'asse, cosicchè l'angolo formato dalle normali  $N_1 P_1$ ,  $N_2 P_2$  è di  $4^\circ$ . Con l'ottalmometro viene misurata la distanza  $P_1 P_2$ .

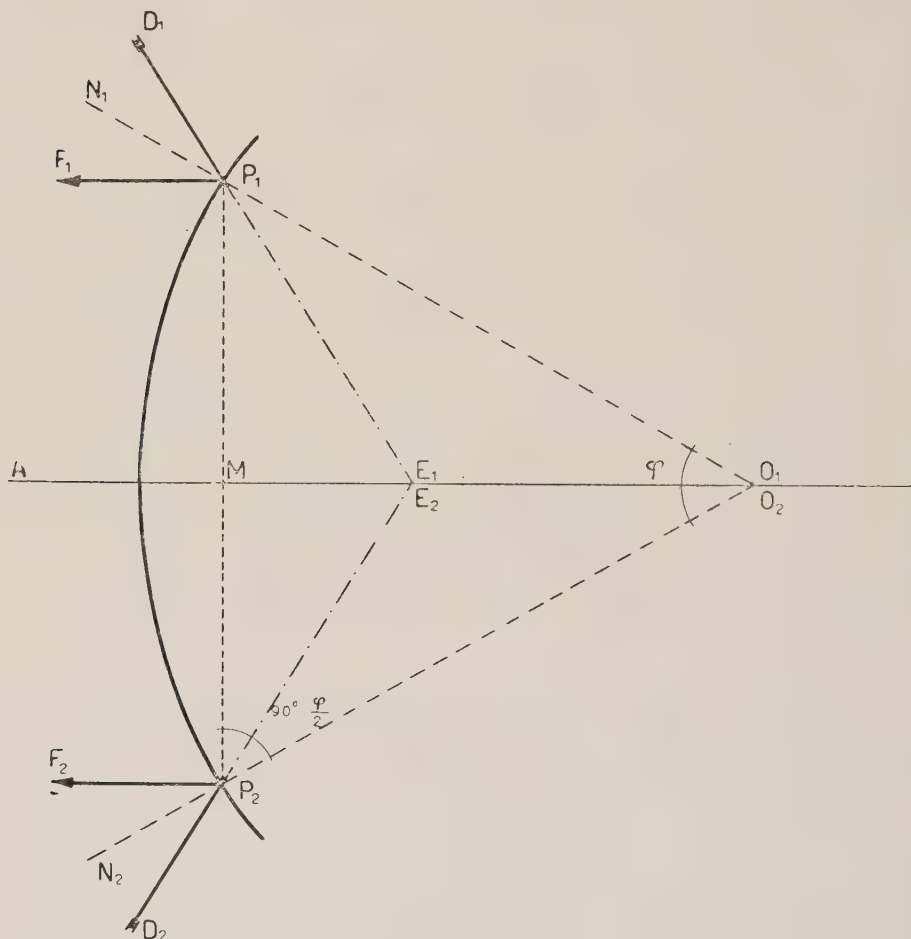


Fig. I.

Questa misurazione, fatta dapprima per l'elemento corneale che circonda la linea di mira, va poi ripetuta per gli altri elementi della stessa sezione principale della cornea, in modo però che un estremo di ciascun elemento coincida con l'estremo vicino dell'elemento precedente, ciò che si ottiene con successive rotazioni dell'occhio ciascuno di un angolo eguale all'apertura angolare dell'elemento centrale, ossia di  $\varphi$ .

Per le indagini che formano l'oggetto di questa Nota è stato utilizzato l'occhio sinistro di un soggetto giovane eseguendo le misurazioni a livello della sezione principale della cornea che era orientata a  $170^\circ$  e che coincideva col piano di simmetria di tutto il sistema ottico dell'occhio.

Riferendoci sempre alla fig. 1 nella quale è indicato con M il punto medio del segmento  $P_1 P_2$  che per le condizioni sperimentali è sull'asse della ricerca, è utile osservare che il punto O, intersezione delle rette  $N_1 P_1$  ed  $N_2 P_2$ , è sullo stesso asse, e che il triangolo  $P_1 O P_2$  è isoscele.

Difatti, distinguendo i punti  $E_1$  ed  $E_2$ , intersezioni con l'asse rispettivamente delle rette  $D_1 P_1$  e  $D_2 P_2$ , poiché i raggi  $F_1$  ed  $F_2$  sono paralleli all'asse AM si ha:

$$\widehat{\overline{D_1 P_1 F_1}} = \widehat{\overline{P_1 E_1 M}} \quad \widehat{\overline{D_2 P_2 F_2}} = \widehat{\overline{P_2 E_2 M}}$$

come angoli corrispondenti di fasci di parallele tagliati da trasversali, e siccome per le condizioni sperimentali  $\widehat{\overline{P_1 E_1 M}} = \widehat{\overline{P_2 E_2 M}}$ , si ha pure:  $\widehat{\overline{D_1 P_1 F_1}} = \widehat{\overline{D_2 P_2 F_2}}$ .

Per le condizioni sperimentali avendosi:

$$\widehat{\overline{N_1 P_1 F_1}} = \frac{1}{2} \widehat{\overline{D_1 P_1 F_1}} = \frac{1}{2} \widehat{\overline{D_2 P_2 F_2}} = \widehat{\overline{N_2 P_2 F_2}}$$

e, distinguendo  $O_1$ , intersezione della retta  $N_1 P_1$  con l'asse da  $O_2$ , intersezione della retta  $N_2 P_2$  con lo stesso asse, sarà anche:

$$\widehat{\overline{P_1 O_1 M}} = \widehat{\overline{N_1 P_1 F_1}} \quad \widehat{\overline{P_2 O_2 M}} = \widehat{\overline{N_2 P_2 F_2}}$$

(questi come angoli corrispondenti) si ottiene:

$$\widehat{\overline{P_1 O_1 M}} = \widehat{\overline{P_2 O_2 M}}.$$

Dato che i punti  $P_1 P_2$  sono simmetrici rispetto ad AM ciò significa che il segmento  $P_1 P_2$  è perpendicolare ad AM e che i triangoli  $P_1 M O_1$  e  $P_2 M O_2$  sono ambedue rettangoli in M.

Allora i triangoli rettangoli  $P_1 M O_1$  e  $P_2 M O_2$  sono eguali avendo  $P_1 M = P_2 M$ , per le condizioni sperimentali, e  $\widehat{\overline{P_1 O_1 M}} = \widehat{\overline{P_2 O_2 M}}$  come detto. In conseguenza  $P_1 O_1 = P_2 O_2$  e  $M O_1 = M O_2$  e, siccome  $O_1$  ed  $O_2$  sono sulla stessa retta AM, da quest'ultima eguaglianza segue che  $O_1 \equiv O_2$ , per cui infine il triangolo  $P_1 O P_2$ , avendo  $P_1 O = P_2 O$ , è isoscele.

In questa dimostrazione, e naturalmente per tutto quello che seguirà, è di capitale importanza che  $P_1$  e  $P_2$  siano simmetrici rispetto ad AM, e ciò è sperimentalmente ottenuto disponendo simmetricamente  $D_1$  e  $D_2$  rispetto ad AM. Si potrebbe mostrare qui anche che dalla simmetria di  $D_1$  e  $D_2$  rispetto ad AM discende quella di  $P_1$  e  $P_2$ , ma è superfluo trattandosi di una delle condizioni sperimentali che si intendono note. Si è voluto solo fare rilevare l'importanza per la presente ricerca della simmetria di  $P_1$  e  $P_2$  e come essa sia stata garantita dalle condizioni sperimentali.

Ciò detto vediamo come, fissato un sistema di coordinate cartesiane, si possano ricavare le coordinate del punto  $P_{j+1}$ , essendo dati sperimentalmente la distanza  $P_j P_{j+1} = i_{j+1}$  e l'angolo  $\widehat{\overline{P_j O_{j+1} P_{j+1}}}$  e conoscendosi già le coordinate di  $P_j$  (ved. fig. 2).



Fissiamo come asse  $x$  la normale parallela alla linea di mira e ordiniamo i punti  $P$  dando a quelli della metà nasale un apice ed un indice, questo da  $O$  ad  $n$ , ed a quelli della metà temporale due apici ed un indice, pure da  $O$  ad  $n$ , e facciamo coincidere l'asse  $y$  con la retta  $P'_0 P''_0$ , col verso positivo rivolto al lato nasale. Ovviamente  $P'_0$  e  $P''_0$  sono simmetrici rispetto ad  $x$  ed è  $P'_0(O, \frac{i_0}{2})$  e  $P''_0(O, -\frac{i_0}{2})$ .

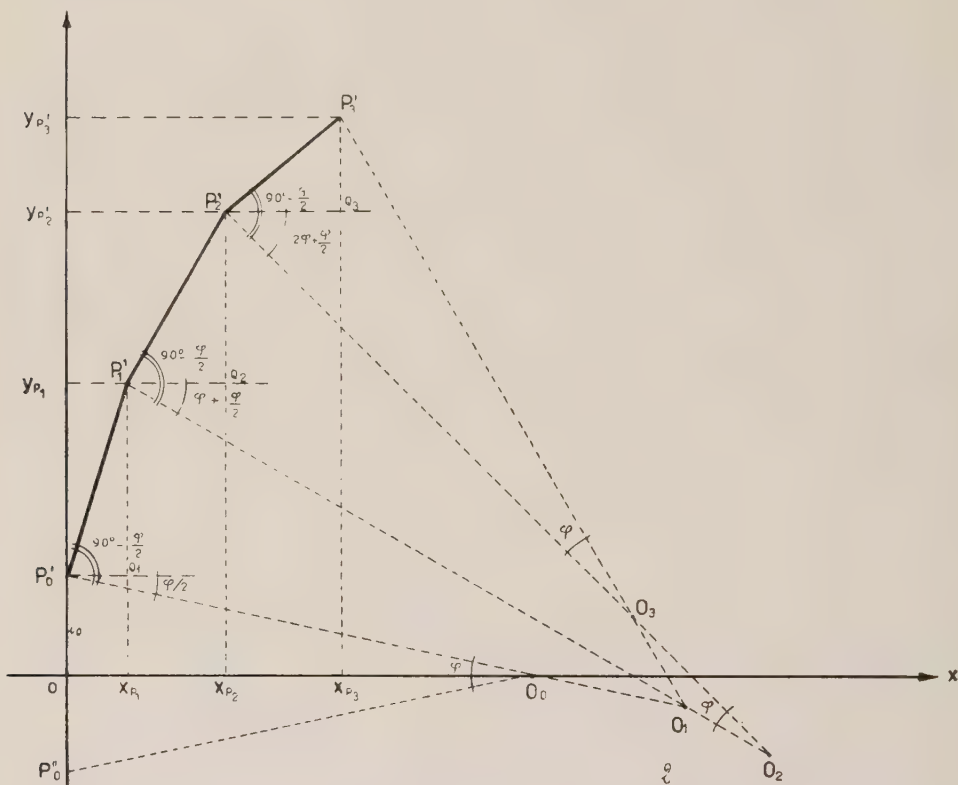


Fig. 2.

Per trovare le coordinate del punto  $P_{j+1}$  conoscendo quelle  $x_{P_j}$  ed  $y_{P_j}$  del punto  $P_j$ , ricordiamo che, per le condizioni sperimentali, tutti i triangoli  $P_j O_{j+1} P_{j+1}$ , oltre ad essere isosceli, hanno uguale l'angolo  $\widehat{P_j O_{j+1} P_{j+1}} = \varphi$ , opposto alla base, ed in conseguenza per tutti gli angoli  $\widehat{P_{j+1} P_j O_{j+1}}$  adiacenti alle basi è  $P_{j+1} P_j O_{j+1} = 90^\circ - \varphi/2$ . Tirando poi da ciascun  $P_j$  la parallela all'asse  $x$  e da ciascun  $P_{j+1}$  la parallela all'asse  $y$  si ha, dalla loro intersezione, il punto  $Q_{j+1}$ .

Si vede che avendosi

$$x_{j+1} = x_j + \overline{P_j Q_{j+1}} \quad y_{j+1} = y_j + \overline{Q_{j+1} P_{j+1}} \quad (j = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$\overline{P_j Q_{j+1}} = i_{j+1} \cos(\widehat{P_{j+1} P_j Q_{j+1}}) \quad \overline{Q_{j+1} P_{j+1}} = i_{j+1} \sin(\widehat{P_{j+1} P_j Q_{j+1}})$$

è

$$x_{j+1} = x_j + i_{j+1} \cos (\widehat{\overline{P_{j+1} P_j} \overline{Q_{j+1}}}) \quad y_{j+1} = y_j + i_{j+1} \sin (\widehat{\overline{P_{j+1} P_j} \overline{Q_{j+1}}}).$$

Ma:

$$\widehat{\overline{P_{j+1} P_j} \overline{Q_{j+1}}} = \widehat{\overline{P_{j+1} P_j} \overline{O_{j+1}}} - \widehat{\overline{Q_{j+1} P_j} \overline{O_{j+1}}}$$

e siccome  $\widehat{\overline{Q_{j+1} P_j} \overline{O_{j+1}}} = j\varphi + \varphi/2$ , perché angoli alterni interni rispetto alle parallele  $\overline{P_j Q_{j+1}}$  ed  $x$  tagliate dalla trasversale  $\overline{P_j O_{j+1}}$ , e  $\widehat{\overline{P_{j+1} P_j} \overline{O_{j+1}}} = 90^\circ - \varphi/2$  per quanto già detto, si ha:

$$\widehat{\overline{P_{j+1} P_j} \overline{Q_{j+1}}} = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} - \left(j\varphi + \frac{\varphi}{2}\right) = 90^\circ - (j+1)\varphi,$$

da cui infine:

$$(I) \quad \begin{cases} x_{j+1} = x_j + i_{j+1} \cos [90^\circ - (j+1)\varphi] = x_j + i_{j+1} \sin (j+1)\varphi \\ y_{j+1} = y_j + i_{j+1} \sin [90^\circ - (j+1)\varphi] = y_j + i_{j+1} \cos (j+1)\varphi \end{cases}$$

Conoscendosi già le coordinate di  $P'_0$  e  $P''_0$ , applicando ordinatamente queste equazioni abbiamo le coordinate di ciascuno dei punti  $P$ .

C'è da dire che le  $x$  e le  $y$  calcolate con le equazioni (I) sono dei valori assoluti, e pertanto per i punti del IV quadrante (che nel caso presente sarebbe la metà temporale della linea di sezione) bisogna attribuire il segno negativo alle  $y$ .

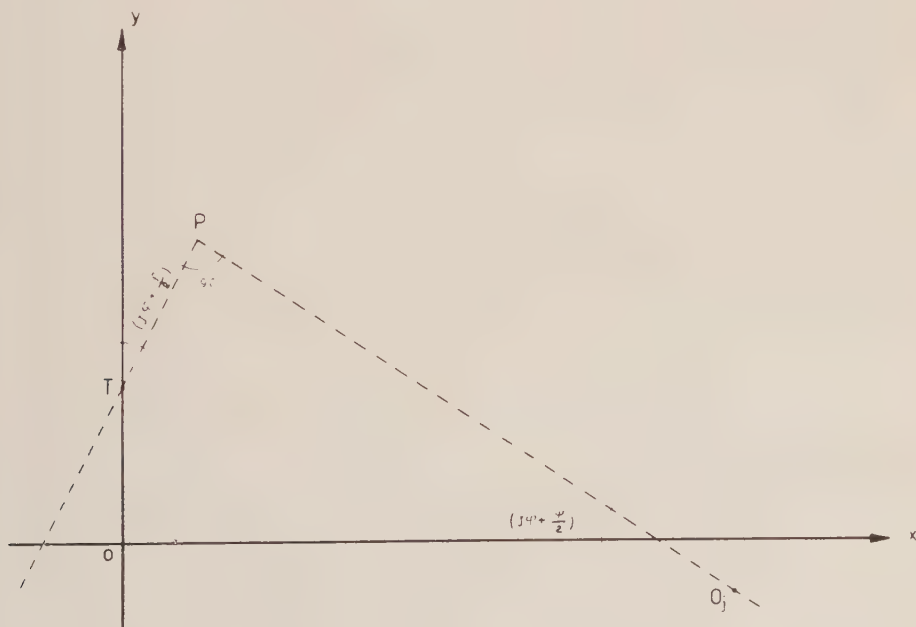


Fig. 3.

*Normali e tangenti nei punti P.* — Trovate le coordinate dei punti  $P$  supponiamo che ci sia una curva passante per essi e soddisfacente certe condizioni sperimentali appresso specificate. Siccome per le condizioni spe-

rimentali sappiamo che la retta  $P_j O_j$  è normale in  $P_j$  a tale curva e che, come si è visto nella fig. 2, essa forma con l'asse  $x$  un angolo uguale a  $(j\varphi + \frac{\varphi}{2})$ , si ha pure, come si vede dalla fig. 3, che la tangente TP (avendo chiamato T la sua intersezione con l'asse  $y$ ) forma con l'asse  $y$  lo stesso angolo.

Nella tabella seguente sono riportati i valori delle misurazioni eseguite per i vari tratti P P (ossia  $i$ ) nel soggetto in esame; l'angolo formato dalle normali, era di  $4^\circ$ .

*Misure.*

$i$	lato nasale	lato temporale
0	0,5553	0,5553
1	0,5681	0,5711
2	0,5733	0,5636
3	0,5681	0,5658
4	0,5583	0,5658
5	0,5711	0,5711
6	0,5905	0,5883
7	0,6144	0,6077
8	0,7044	0,6009
9	1,0434	0,6436
10		0,7712

Così disponiamo dei dati sperimentali  $x_p, y_p$ , tangente in P, e mediante questi dobbiamo costruire una curva  $f(y) = x$  tale che  $f(y_{P_j}) = x_{P_j}$ ,  $f'(y_{P_j}) = \tan(j\varphi + \frac{\varphi}{2})$  e che inoltre dovrà soddisfare, nell'intervallo osservato, le tre condizioni sperimentali:

I) essere regolare, cioè oltre che continua anche senza spigoli;

II) essere priva di flessi, ossia priva di gobbe sia verso l'esterno che l'interno dell'occhio;

III) avere la concavità rivolta al verso positivo dell'asse  $x$ , poiché questo è stato scelto diretto verso l'interno dell'occhio.

Queste tre condizioni, del resto molto ovvie, significano: la  $f'(y)$  è continua e unica; II)  $f''(y) \neq 0$ ; III) non solo  $f''(y) \neq 0$  ma  $f''(y) > 0$ .

Naturalmente, dato che si dispone solo di dati sperimentali, la  $f(y)$  sarà solo una curva approssimante.

Si è usata la scrittura  $f(y) = x$  piuttosto della solita  $f(x) = y$  per uniformare la notazione attuale con quella abitualmente usata in ricerche di diottrica oculare.

*Punti sperimentali.*  
(Coordinate e tangenti).

P	$x$	$y$	$j\varphi + \frac{\varphi}{2}$	$\text{tang.} \left( j\varphi + \frac{\varphi}{2} \right)$
9'	+ 2,102	+ 5,564	+ 38°	+ 0,78129
8'	+ 1,489	+ 4,720	+ 34°	+ 0,67451
7'	+ 1,115	+ 4,123	+ 30°	+ 0,57735
6'	+ 0,8269	+ 3,581	+ 26°	+ 0,48773
5'	+ 0,5867	+ 3,041	+ 22°	+ 0,40403
4'	+ 0,3914	+ 2,504	+ 18°	+ 0,32492
3'	+ 0,2375	+ 1,968	+ 14°	+ 0,24933
2'	+ 0,1194	+ 1,412	+ 10°	+ 0,17633
1'	+ 0,0396	+ 0,8444	+ 6°	+ 0,10510
0'	0,0000	+ 0,2776	+ 2°	+ 0,03492
0''	0,0000	— 0,2776	— 2°	— 0,03492
1''	+ 0,0398	— 0,8474	— 6°	— 0,10510
2''	+ 0,1183	— 1,405	— 10°	— 0,17633
3''	+ 0,2359	— 1,959	— 14°	— 0,24933
4''	+ 0,3919	— 2,503	— 18°	— 0,32492
5''	+ 0,5872	— 3,039	— 22°	— 0,40403
6''	+ 0,8265	— 3,577	— 26°	— 0,48773
7''	— 1,112	— 4,113	— 30°	— 0,57735
8''	+ 1,430	— 4,623	— 34°	— 0,67451
9''	+ 1,809	— 5,143	— 38°	— 0,78129
10''	+ 2,304	— 5,734	— 42°	— 0,90040

CALCOLO DELLA CURVA APPROSSIMANTE.

*Scelta della curva.* — Come curva approssimante conviene scegliere un polinomio intero, poiché per una funzione di tale tipo la  $f'(y)$  è sempre unica e continua, e si è così sicuri che è soddisfatta la I condizione sperimentale. Inoltre per il polinomio calcolato, nell'intervallo osservato, è la  $f''(y) > 0$ , soddisfacendo le altre due condizioni sperimentali.



*Cenno sul metodo di calcolo.* - Il calcolo della curva approssimante è stato effettuato col metodo dei minimi quadrati. Si fa notare che il metodo non è stato impiegato nella sua completezza, poiché per la completa trattazione della questione si sarebbero dovuti discutere e i dati e i risultati. Per i nostri fini è stato sufficiente trovare la  $f(y)$  e mostrare che i residui  $O - C$  e lo scostamento medio sono confrontabili con gli errori dei dati sperimentali.

Il polinomio da determinare è:

$$f(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y + a_n = x$$

ed in esso, poiché le  $y$  e le  $x$  sono dati sperimentali già conosciuti, sono da determinare i coefficienti  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ . Tenendo presente che disponiamo di due gruppi di equazioni sperimentali

$$\left. \begin{aligned} \text{I)} \quad f'(y_{p_{j+1}}) &= \tan\left(j\varphi + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \text{II)} \quad f(y_{p_{j+1}}) &= x_{p_{j+1}} \end{aligned} \right\} \quad (j = -1, 0, 1, \dots, n-1)$$

possiamo scrivere che per  $f(y)$  deve essere

$$f'(y_{p_{j+1}}) = A_0 y^{n-1} + A_1 y^{n-2} + A_2 y^{n-3} + \dots + A_{n-2} y + A_{n-1} = \tan\left(j\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$f(y_{p_{j+1}}) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y + a_n = x_{p_{j+1}}$$

dove

$$a_0 = \frac{A_0}{n} ; \quad a_1 = \frac{A_1}{n-1} ; \quad a_2 = \frac{A_2}{n-2} ; \dots ; \quad a_{n-1} = \frac{A_{n-1}}{n-(n-1)} ;$$

e dove alle  $y$ , per semplicità di scrittura, non si è apposto l'indice  $p_{j+1}$ .

Applicando il metodo dei minimi quadrati, dalle equazioni del 1° gruppo si ricava un sistema normale nelle incognite  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ , che si possono così calcolare. Calcolati  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  e introdottili nelle equazioni del 2° gruppo, rimane la sola incognita  $a_n$ , che si calcola riapplicando il medesimo metodo.

Trovati i coefficienti  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ , del polinomio  $f(y)$  si calcolano gli scostamenti

$$(O - C)_{\left(j\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)} = \left(j\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)_{\text{oss.}} - \left(j\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)_{\text{calc.}}$$

$$(O - C)_{x_{p_{j+1}}} = x_{p_{j+1}} - f(y_{p_{j+1}})$$

e gli scostamenti medi, che devono risultare confrontabili con gli errori delle misure. Se ciò non fosse, man mano si aumenta o si diminuisce, a seconda dei casi, il grado  $n$  del polinomio, fino a trovare quello che, soddisfacendo le condizioni sperimentali poste, dia gli scostamenti richiesti. Il polinomio  $f(y)$  così determinato è la curva approssimante la sezione della cornea e tutte le altre caratteristiche della stessa sezione, quale ad esempio il raggio di curvatura  $\rho$ , si possono calcolare dalla  $f(y)$  con i normali metodi analitici. Si deve però sempre tener presente che qualunque siano i risultati, essi sono stati ottenuti partendo da dati sperimentali ed in conseguenza sono delle

approssimazioni del valore vero, anche se, per aver applicato il metodo dei minimi quadrati, sono la migliore approssimazione.

Il calcolo è stato qui condotto per un occhio particolare, per il quale il olinomio approssimante è risultato di 7° grado; per un occhio diverso il grado del polinomio approssimante potrebbe essere differente ma, naturalmente, non cambierebbe lo schema di calcolo.

## RISULTATI DEI CALCOLI.

$$f'(y) = -2,5470110 \times 10^{-6} y^6 - 2,0080654 \times 10^{-5} y^5 + 3,736637 \times 10^{-5} y^4 + \\ + 1,4890088 \times 10^{-3} y^3 - 3,5682 \times 10^{-5} y^2 + 0,12117994 y - 0,0003247 = \\ = \operatorname{tang}\left(j\varphi + \frac{\varphi}{2}\right).$$

nasale	$y$	$\left(j\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)_{\text{oss.}}$	$\operatorname{tang}\left(j\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)_{\text{oss.}}$	$f'(y) = \operatorname{tang}\left(j\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)_{\text{calc.}}$	$\left(j\varphi + \frac{\varphi}{2}\right)_{\text{calc.}}$	$(O-C)_{j\varphi + \frac{\varphi}{2}}$
P' 9	+ 5,564	+ 38°	+ 0,78129	+ 0,78252	+ 38°02'	— 02'
8	+ 4,720	+ 34	+ 0,67451	+ 0,67083	+ 33 51	+ 09
7	+ 4,123	+ 30	+ 0,57735	— 0,57742	+ 30 00	00
6	+ 3,581	+ 26	+ 0,48773	+ 0,49042	+ 26 07	— 07
5	+ 3,041	+ 22	+ 0,40403	+ 0,40570	+ 22 05	— 05
4	+ 2,504	+ 18	+ 0,32492	+ 0,32519	+ 18 01	— 01
3	+ 1,968	+ 14	+ 0,24933	+ 0,24916	+ 13 59	+ 01
2	+ 1,412	+ 10	+ 0,17633	+ 0,17493	+ 9 55	+ 05
1	+ 0,8444	+ 6	+ 0,10510	+ 0,10288	+ 5 52	+ 08
P' 0	+ 0,2776	+ 2	+ 0,03492	+ 0,03335	+ 1 54	+ 06
P'' 0	— 0,2776	— 2	— 0,03492	— 0,03400	— 1 57	— 03
1	— 0,8474	— 6	— 0,10510	— 0,10391	— 5 56	— 04
2	— 1,405	— 10	— 0,17632	— 0,17461	— 9 54	— 06
3	— 1,959	— 14	— 0,24933	— 0,24805	— 13 56	— 04
4	— 2,503	— 18	— 0,32492	— 0,32437	— 17 58	— 02
5	— 3,039	— 22	— 0,40403	— 0,40439	— 22 01	+ 01
6	— 3,577	— 26	— 0,48773	— 0,48983	— 26 06	+ 06
7	— 4,113	— 30	— 0,57735	— 0,58103	— 30 10	+ 10
8	— 4,623	— 34	— 0,67451	— 0,67382	— 33 58	— 02
9	— 5,144	— 38	— 0,78129	— 0,77594	— 37 49	— 11
P'' 10	— 5,734	— 42	— 0,90040	— 0,90284	— 42 05	+ 05
temporale						

$$\begin{aligned}
 f(y) &= -3,6385871 \times 10^{-7} y^7 - 3,3467756 \times 10^{-6} \\
 &\quad y^6 + 7,473274 \times 10^{-6} y^5 + 3,7225220 \times 10^{-4} \\
 y^4 - 1,18940 \times 10^{-5} y^3 + 0,060589970 y^2 - 0,0003247 \\
 y - 0,0036923 &= x.
 \end{aligned}$$

nasale	$y$	$x$ oss.	$f(y) = x$ calc.	$(O - C)_x$
	+ 5,564	+ 2,102	+ 2,106	- 0,004
P' 9	+ 4,720	+ 1,489	+ 1,490	- 0,001
7	+ 4,123	+ 1,115	+ 1,117	- 0,002
6	+ 3,580	+ 0,8269	+ 0,8272	- 0,0003
5	+ 3,041	+ 0,5867	+ 0,5856	+ 0,0011
4	+ 2,504	+ 0,3914	+ 0,3897	+ 0,0017
3	+ 1,968	+ 0,2375	+ 0,2358	+ 0,0017
2	+ 1,412	+ 0,1194	+ 0,1181	+ 0,0013
1	+ 0,8444	+ 0,0396	+ 0,0394	+ 0,0002
P <sub>0</sub>	+ 0,2776	0,0000	+ 0,0009	- 0,0009
P'' <sub>0</sub>	- 0,2776	0,0000	+ 0,0011	- 0,0011
1	- 0,8474	+ 0,0398	+ 0,0403	- 0,0005
2	- 1,405	+ 0,1183	+ 0,1179	+ 0,0004
3	- 1,959	+ 0,2359	+ 0,2347	+ 0,0012
4	- 2,503	+ 0,3919	+ 0,3901	+ 0,0018
5	- 3,039	+ 0,5872	+ 0,5854	+ 0,0018
6	- 3,577	+ 0,8265	+ 0,8255	+ 0,0010
7	- 4,113	+ 1,112	+ 1,113	- 0,001
8	- 4,623	+ 1,430	+ 1,432	- 0,002
9	- 5,144	+ 1,808	+ 1,809	- 0,001
P'' 10	- 5,734	+ 2,304	+ 2,304	0,000
temporale				

Giova avvertire che delle cifre dei coefficienti del polinomio solo le prime hanno un effettivo valore fisico mentre le ultime sono cifre di calcolo.

Per gli angoli i massimi degli  $O - C$  sono + 10' e - 11' e lo scostamento medio è  $\pm 5'$ . Questi risultati sono confrontabili con quelli delle misure effettuate, come pure lo sono gli  $O - C$  delle  $x$ , per i quali i massimi  $O - C$  sono + 0,002 e - 0,002 mm., eccezione fatta per il punto P<sub>j</sub>, che è un punto estremo della curva e lo scarto medio è di  $\pm 0,0014$  mm.

## BIBLIOGRAFIA.

- AEPLY J., *Zur Frage der Gestalt der vorderen Hornhautfläche*, «Z. Entwmech.», LIII, 223 (1922).
- BERG Fr., *Undersökningar öfver främre hornhinneytans form.*, Göteborg 1927. Akad. Afh. Upsala.
- HELMHOLTZ H. v., *Handbuch der physiologischen Optik*, III. Aufl. Leipzig 1909.
- DE LEONIBUS F., *Ricerche sull'astigmatismo del cristallino nell'occhio umano*, «Ann. d'Ottalm. e Clin. Ocul.», LXXI, 129 (1943).
- LO CASCIO G., *Studi di ottalmometria*, «Ann. d'Ottalm. e Clin. Ocul.», LXIX, 449, (1941).
- MATHIESSEN L., *Über aplanatische Brechung und Spiegelung in Oberflächen zweiter Ordnung und die Hornhautrefraktion*, «Pflügers Arch.», XCI, 295 (1902).
- NORDENSON J. W., *Über die Form der Linsenflächen im menschlichen Auge*, «Nord. med. Ark. Afd.», II, 1913, Häfte I, 11.
- NORDENSON J. W., *Annäherungskurven für Schnitte der vorderen Hornhautfläche*, «Graefes Archiv für Ophth.», CLVII, 528 (1956).

## NECROLOGI

## GIUSEPPE ALBENGA (\*)

(*Cenni Commemorativi* del Socio GUSTAVO COLONNETTI)

Nella storia della Scienza delle Costruzioni la figura di Giuseppe Albenga, scienziato e maestro, si inserisce con caratteristiche inconfondibili e strettamente aderenti a quelle che furono le caratteristiche dell'Uomo.

Di carattere mite ed alieno da ogni posizione che potesse turbare l'equilibrio dei suoi rapporti umani, dotato di una cultura vasta ed eclettica e di una squisita sensibilità alla intima bellezza ed al misterioso fascino che su le menti più elette esercita ogni qualsiasi anche piccola conquista del pensiero, Giuseppe Albenga aveva la mentalità dello storico e l'acutezza del critico.

Quand'Egli iniziò la sua carriera di docente i principii fondamentali della teoria dell'elasticità erano stati tutti scoperti, ed il campo delle loro possibili applicazioni al calcolo delle costruzioni era ormai delineato con sufficiente chiarezza. Tutto quello che poteva essere veramente determinante nella teoria classica era stato detto.

Camillo Guidi stava elaborando e perfezionando quell'opera di inquadramento dei principii e di esposizione sistematica dei metodi di calcolo che doveva portare gli uni e gli altri a conoscenza delle nuove generazioni di Ingegneri italiani attraverso una sintesi didatticamente efficace.

(\*) Socio corrispondente dal 15 luglio 1948 al 19 gennaio 1957.



Nella grande sala del Castello del Valentimo in cui si svolgeva l'attività di sperimentatore del Guidi - accanto al tavolo attorno a cui il Maestro raccoglieva i suoi collaboratori - Giuseppe Albenga occupò per molti anni il suo posto di assistente portando un suo personale e prezioso contributo alla elaborazione in atto.

Sempre pronto a prestare attenzione ai pensieri altrui, sempre pronto a mettere a disposizione altrui la sua vasta erudizione storica e l'acume del suo spirito critico, approvava ed incoraggiava ogni anche modesto tentativo di meglio approfondire un concetto od un procedimento di lavoro. Se poi gli accadeva di trovarsi di fronte ad iniziative od a posizioni di pensiero che, nella sua prudenza, giudicava troppo ardite, si limitava ad esprimere i suoi dubbi od i suoi dissensi nella forma più benevola, con un sorriso ed un atteggiamento del volto appena velato da una lieve punta di garbata ironia.

Sempre amichevole e cordiale coi Colleghi, paterno e comprensivo coi giovani, trasmetteva a tutti un senso di equilibrio e di serenità attraverso il quale tutti riconoscevano volentieri l'altezza non comune della sua preparazione scientifica e la superiorità della sua formazione di pensiero.

I diversi suoi allievi e collaboratori hanno già, negli scorsi mesi, in altre sedi, ampiamente illustrati i vari aspetti ed i successivi momenti della sua opera scientifica.

Non possono peraltro esser qui passati sotto silenzio:

gli studi sul calcolo della resistenza degli aeroplani, suggeriti dalle immediate esigenze della prima guerra mondiale durante la quale Egli prestò servizio come ufficiale della appena costituita Arma Aerea del Genio Aeronautico;

le brevi Note in cui, con sottili giochi di ingegnosi artifizi, come Egli stesso li chiamava, veniva segnalando qualche proposizione scientifica degna di attenzione, nel dichiarato proposito di inserirla nel quadro generale della teoria classica, e in modo particolare, nel quadro, più ristretto ma a lui particolarmente caro, degli sviluppi a cui può dar luogo il celebre teorema di Betti;

e ancora, i suoi numerosi contributi alla regolamentazione tecnica in Italia: regolamentazione del cemento armato ordinario e precompresso, delle costruzioni aeronautiche, delle dighe, delle costruzioni metalliche, dei ponti, degli organi di sollevamento e di trasporto, delle prove sui materiali da costruzione, ecc.

Né potrebbe essere passata sotto silenzio la sua attività di sperimentatore e la perizia con cui seppe affrontare i difficili problemi della sperimentazione in cantiere, su strutture già realizzate.

Ma la sua opera essenziale è il trattato sui « Ponti » in cui appaiono chiaramente in luce così la sua erudizione sulla storia delle strutture che, con questo nome, hanno segnate le successive tappe della civiltà dai più remoti tempi ai giorni nostri, come la profondità della sua dottrina e la lucidità della sua esposizione dei più moderni metodi di calcolo.

L'Accademia Nazionale dei Lincei – che dal 1948 lo annoverava tra i suoi Soci Corrispondenti – lo ricorda e lo commemora oggi con profondo rimpianto.

Profondo rimpianto che è unanimemente condiviso dai singoli Colleghi che nello esercizio dell'insegnamento o della professione hanno avute tante occasioni di apprezzarne le doti preclare, e dai numerosissimi allievi che del Maestro serbano in cuore un grato ed incancellabile ricordo.

Profondo rimpianto con cui noi tutti ci inchiniamo riverenti al dolore della famiglia che Egli dilesse con quella pienezza e delicatezza di sentimenti che caratterizzò tutta la sua vita esemplare.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica la dolorosa notizia della morte dei Soci Nazionali: Giuseppe De Lorenzo, della Categoria IV – Sezione Geologia – deceduto il 27 giugno c. a.; Quirino Majorana, della Categoria III – Sezione Fisica – deceduto il 31 luglio c. a.; Giovanni Silva, della Categoria II – Sezione Astronomia – deceduto il 20 ottobre c. a. Sono inoltre scomparsi il Socio Corrispondente Vittorio Gori, della Categoria I – Sezione Meccanica – deceduto il 2 settembre c. a., e il Socio Straniero Johannes Stark, della Categoria III (Fisica, Chimica e Applicazioni), deceduto il 21 giugno c. a.

Alla memoria degli illustri Colleghi, il prof. Giordani eleva un pensiero di affettuoso e reverente omaggio, a nome dell'Accademia e suo personale.

Il Presidente informa la Classe che hanno ringraziato, per la nomina, i Soci Nazionali Giulio De Marchi (Cat. I – Sezione Meccanica); Vincenzo Caglioti (Cat. III – Sezione Chimica); Alessandro Trotter (Cat. V – Sezione Botanica); Guido Grandi (Cat. V – Sezione Zoologia); Luigi Califano (Cat. V – Sezione Patologia); i Soci Corrispondenti Eugenio Togliatti e Giovanni Ricci (Cat. I – Sezione Matematica); Giulio Supino (Cat. I – Sezione Meccanica); Enrico Ciaranfi (Cat. V – Sezione Patologia) e il Socio Straniero Augusto Kopff (Cat. II – Astronomia, Geodesia, Geofisica e Applicazioni).

Il Presidente rivolge un cordiale saluto al prof. Albert Defant, della Università di Innsbruck, presente alla seduta, e quindi formula un sincero augurio di pronta e felice guarigione per il Collega Severi, il quale, a causa delle sue condizioni di salute, non è potuto intervenire a questa prima adunanza.

Il prof. Giordani informa la Classe che i Colleghi Finzi, D'Erasmus, Signorini, Imbò, Chiarugi, Chisini e Penta hanno già predisposto le necrologie dei Soci Umberto Cisotti, Giuseppe Checchia Rispoli, Emilio Almansi, Antonino Lo Surdo, Biagio Longo, Michele De Franchis e Alberto Pelloux. Comu-

nica poi che i Colleghi G. Levi, Califano, Crocco, Carrelli, Picone, Semerano e Cambi, hanno accettato l'incarico di commemorare rispettivamente i compianti Soci Nello Beccari, Carmelo Ciaccio, Modesto Panetti, Giancarlo Vallauri, Guido Ascoli, Arturo Miolati e Angelo Menozzi.

Per la commemorazione dei Soci Albenga, Quagliariello e Silva, sono stati interpellati i Colleghi Colonnetti, Rossi-Fanelli e Zagar. Per quella del Socio Fantappiè, il Presidente aveva rivolto preghiera al Collega Severi, il quale però, costretto a rinunciare all'incarico perché ancora malato, ha fatto il nome del prof. Scorza Dragoni, che la Presidenza ha subito interpellato.

Rimangono ancora sospese le commemorazioni dei Soci De Lorenzo, Majorana e Gori, e il Presidente invita la Classe a fare proposte al riguardo.

Si decide di affidare la commemorazione del prof. Gori al Socio Graffi, che accetta, e di interpellare, per quella del prof. Majorana, il Socio Perucca non appena sarà rientrato dall'estero.

Per quanto riguarda la rievocazione del prof. De Lorenzo, il Presidente, considerando che il defunto Collega è stato, oltre che un insigne geologo, anche un valoroso umanista, si riserva di interpellare la Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche per una eventuale commemorazione a Classi riunite.

## PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta i seguenti plichi suggellati:

I. Plico del Socio Andreatta, pervenuto alla Cancelleria in data 8 giugno 1957;

II. Plico del dott. Ugo De Tschudi, dal titolo «Sommario dell'opera in corso di coordinamento sistematico intitolata «Introduzione alla meccanica attuale», consegnato alla Cancelleria il 16 luglio 1957;

III. Plico del dott. Cesare Buratti dal titolo «Relazioni fra elettricità e calore – Variazioni del potenziale elettrico di corpi isolati originate dalle variazioni del loro stato fisico», pervenuto alla Cancelleria in data 30 luglio 1957.

La Classe, constatata l'integrità dei suggelli, delibera che i suddetti plichi siano trasmessi all'archivio accademico ove saranno conservati a disposizione degli autori.

## COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente dà notizia di una comunicazione del Comitato Nazionale per la Produttività, riguardante una richiesta di esperti per l'ONU e per l'UNESCO che avranno il compito di instradare le popolazioni di Paesi sottosviluppati a tecniche poco conosciute nei Paesi stessi. Se i Soci vorranno segnalare qualche nome al riguardo, potranno rivolgersi alla Cancel-

leria che, a sua volta, si metterà in rapporto con il Comitato Nazionale della Produttività.

Il prof. Giordani informa poi i Colleghi di una inchiesta nazionale riguardante la diffusione e utilizzazione dei Servizi di documentazione tecnica nel nostro Paese, promossa dal Dott. Giovanni Coppa Zuccari.

Il Presidente ritiene opportuno comunicare inoltre che dal 21 novembre a tutto gennaio sarà tenuta, a Milano, per iniziativa dell'Ente Manifestazioni Milanesi, la Mostra storica della scienza italiana, intesa ad illustrare i principali momenti dello sviluppo storico del pensiero scientifico in Italia. La Mostra, che inizia dal periodo in cui si formarono le prime Scuole ed Università del Medioevo, giunge fino alle ultime scoperte di Enrico Fermi e, seguendo lo sviluppo storico della formazione della scienza moderna, illustra, attraverso l'esposizione di libri, strumenti e cimeli, l'opera dei più grandi scienziati, in relazione all'epoca storica nella quale vissero e rispetto al graduale processo generale del sapere. Vi saranno sale dedicate a Galileo, a Volta e anche una riservata all'Accademia dei Lincei.

Il prof. Giordani conclude con un ringraziamento al dott. Luigi Morandi, Presidente dell'Ente Manifestazioni Milanesi, e al Collega Polvani che ha attivamente collaborato all'organizzazione della Mostra.

Il Presidente comunica quindi che è giunto, questo pomeriggio, all'Accademia, da parte del Sindaco di Colmar, un invito per le giornate celebrative dell'opera scientifica del Premio Nobel Gustave Adolphe Hirn, che avranno luogo, appunto a Colmar, oggi e domani 10 novembre.

La Classe dà mandato al Presidente di inviare un messaggio di adesione.

Il Socio Gortani, riferendosi alla grande impresa del traforo del Monte Bianco, richiama l'attenzione dei Colleghi sull'importanza che i lavori del suddetto traforo potranno avere per le ricerche geologiche e geofisiche e crede che l'Italia non possa né debba trascurare questa preziosa occasione. Sarebbe quindi opportuno che l'Accademia, d'intesa con il Consiglio Nazionale delle Ricerche, incaricasse un'apposita Commissione di seguire i lavori della galleria e di predisporre le indagini scientifiche più convenienti. Poiché la realizzazione di tale programma richiederebbe la disponibilità di adeguati fondi, il Socio Gortani formula il voto che il Consiglio Nazionale delle Ricerche voglia munificamente stanziare le somme necessarie.

Il Presidente Giordani risponde che il Consiglio delle Ricerche sarà lieto, come del resto lo è sempre stato, di unirsi all'Accademia in una impresa indubbiamente di notevole interesse scientifico, ma osserva, in linea pregiudiziale, che prima di poter adottare qualsiasi decisione al riguardo, è necessario che si proceda a predisporre e a sottoporre al C.N.R., un concreto programma di ricerche.

Il Socio Gortani ringrazia il Presidente per la risposta in linea di massima favorevole e prega i Colleghi geologi e geofisici di volersi riunire per uno scambio di idee, al termine della presente seduta.



## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Polvani offre in omaggio, a nome della Domus Galilaeana di Pisa e del Museo di Storia della Scienza di Firenze, un volume contenente la riproduzione fotolitografica dell'opera «Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento sotto la protezione del Serenissimo Principe Leopoldo di Toscana e descritte dal Segretario di essa Accademia», nonché una presentazione, curata dalla dott.ssa Maria Luisa Bonelli, degli strumenti suppellettili della citata Accademia conservati presso il Museo di Storia della Scienza di Firenze.

Il Socio Polvani, dopo aver premesso che i «Saggi» furono licenziati dai torchi nell'ottobre del 1667, quantunque alcune copie rechino, nel frontespizio la data del 1666, ricorda che numerose furono le ristampe, come pure le traduzioni e compendi in altre lingue, ma che non risultava essere stata fatta, fino ad oggi, una riproduzione fedele della prima edizione. Ora, nella ricorrenza del tricentenario della prima riunione dell'Accademia del Cimento, celebrata il 19 giugno c. a., la Domus Galilaeana di Pisa e il Museo della Storia della Scienza di Firenze, giovandosi dell'aiuto finanziario generosamente dato dal Consiglio Nazionale delle Ricerche, al quale esprimono la loro gratitudine, hanno provveduto alla ristampa fotolitografica dei «Saggi», dedotta dall'esemplare con la data del 1667, posseduto dalla Domus, ed hanno aggiunto ad essa la presentazione, curata dalla dott.ssa Maria Luisa Bonelli, degli strumenti e delle suppellettili dell'Accademia.

Il Presidente Giordani ringrazia il Collega Polvani e si rallegra vivamente con lui per l'importanza dell'opera che costituisce una mirabile documentazione dei grandissimi contributi dati alla scienza dalla gloriosa scuola galileiana e dall'Accademia del Cimento.

Il Socio G. Sansone presenta all'Accademia alcune pubblicazioni edita dalla Unione Matematica Italiana (U.M.I.). Egli così dice:

«Nel 1957 l'U.M.I. oltre ai primi grossi fascicoli del suo «Bollettino» trimestrale ha dato alle stampe i seguenti volumi:

1) G. Ricci Curbastro, vol. II. *Note e Memorie, Teoria matematica dell'elasticità*, pp. 576;

2) G. Fubini, *Opere scelte*, vol. I, pp. 368;

3) C. Segre, *Opere*, vol. I, pp. 458;

4) G. Peano, *Opere scelte*, vol. I, *Analisi matematica, Calcolo numerico*, pp. 530;

5) L. Bianchi, *Opere*, vol. V, *Trasformazioni delle superficie e delle curve*, pp. 538; vol. VI, *Congruenze di rette e di sfere e loro deformazioni*, pp. 326;

6) Bibliografia matematica italiana, vol. VI (1955), pp. 131;

7) Convegno italo-francese di algebra astratta, pp. 71.

«I volumi di G. Ricci Curbastro, di G. Fubini e di Corrado Segre saranno presentati all'Accademia, per conto dell'U.M.I., rispettivamente dai Soci

Angelo Tonolo, Alessandro Terracini ed Eugenio Giuseppe Togliatti; pertanto io ho l'onore di riferire brevemente sugli altri.

« Il volume delle *Opere Scelte* di G. Peano compare dopo venticinque anni dalla Sua morte. La figura di questo insigne analista, sempre attuale nella letteratura matematica, balza attraverso alcune celebri Memorie contenute in questo volume come quella sul teorema di esistenza delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie che inizia lo studio in grande, nel campo reale, di queste equazioni, e quella sulla curva continua che riempie un quadrato collegata ai così detti continui peaniani. Ad Ugo Cassina che con devozione di discepolo e con grande competenza ha curato la stampa del volume e che si accinge all'edizione del secondo e del terzo, va il sentito grazie dei matematici.

« L'edizione nazionale delle *Opere* di L. Bianchi sulla quale ho avuto l'onore di trattenermi ripetutamente negli anni accademici decorsi si è arricchita di due nuovi volumi, il quinto e il sesto della edizione.

« Il quinto che si apre con una commossa ed affettuosa introduzione del differenzialista palermitano Pietro Tortorici, contiene le ricerche del Bianchi sulla trasformazione delle curve e delle superficie e particolarmente quelle sulla teoria della trasformazione delle superficie a curvatura costante, campo nel quale « il Bianchi è stato un creatore di metodi nuovi e fecondi che hanno dato alla Geometria risultati di indiscussa importanza e assai suggestivi ».

« Le Memorie contenute nel sesto volume sono state riviste con meticolosa scrupolosità da Vittorio Strazzeri, pure palermitano, e decano dei geometri differenzialisti viventi.

« Le congruenze di rette, di sfere e le loro deformazioni, lo studio delle congruenze normali, delle isotrope, delle congruenze  $W$ , delle congruenze rettilinee stratificabili scoperte dal Nostro porgono a lui uno dei tanti strumenti per collegare tra loro vastissime classi di superficie.

« Passo infine alla Bibliografia e agli Atti del Convegno di Padova.

« La « Bibliografia Matematica Italiana » è da sei anni redatta da Alfredo Perna, con grande passione ed estrema precisione.

« Alla collana dell'U.M.I. sui Congressi e sui Convegni si è aggiunto questo anno il volumetto sul Convegno italo-francese di Algebra astratta di Padova organizzato nel 1956 da Ugo Morin e Guido Zappa, due dei più attivi cultori della moderna algebra in Italia.

« In complesso l'U.M.I., grazie all'aiuto morale e finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche e all'opera disinteressata di professori e assistenti di alcune scuole matematiche, ha presentato al pubblico ben nove volumi i quali attestano con quale fede i matematici operano a servizio della scienza.

« Un cordiale grazie va pure all'Editore Paolo Cremonese per l'interesse che egli porta alla stampa matematica italiana ».

Il Socio Chiarugi offre in omaggio una « Carta geobotanica dell'Africa Orientale » con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare all'Accademia *Una carta geobotanica dell'Africa Orientale (Eritrea, Etiopia, Somalia)* alla scala di 1 : 5.000.000, redatta dal

prof. Rodolfo Pichi-Sermolli, e pubblicata dall'Erbario Coloniale di Firenze in «Webbia», vol. XIII, pp. 15-132 (1957), sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

«Essa trae origine dalla combinazione e dal completamento degli originali redatti dallo stesso autore alla stessa scala: 1° per la carta delle regioni aride e semi-aride dell'Africa Orientale (Etiopia, Somalia, Kenia, Tanganika) commissionata all'Erbario Coloniale di Firenze dal Comitato dell'Unesco per le Ricerche sulle Zone Aride e pubblicata molto semplificata alla scala di 1 : 14.300.000 <sup>(1)</sup>, 2° per la carta dell'Eritrea, Etiopia e Somalia, commissionata all'Erbario Coloniale di Firenze dall'Association pour l'Etude Taxonomique de la Flore d'Afrique Tropicale (A.E.T.F.A.T.) per l'allestimento della Carta della vegetazione dell'Africa a sud del Tropico del Cancro, in corso di pubblicazione anch'essa semplificata alla scala di 1 : 10.000.000 <sup>(2)</sup>.

«La scala 1 : 5.000.000 è stata scelta perché permette una rappresentazione cartografica abbastanza precisa anche dei territori montuosi compatibilmente allo stato attuale delle conoscenze geobotaniche di quel vasto territorio, e per collaborare all'Atlante Botanico dell'Africa patrocinato alla scala di 1 : 5.000.000 dal Conseil Scientifique pour l'Afrique au Sud du Sahara (C.S.A.) <sup>(3)</sup>.

«La carta è corredata da un ampio commento, nel quale dopo alcune notizie sulla delimitazione del territorio, sulla sua geomorfologia, geologia, pedologia e climatologia, e sulle precedenti carte geobotaniche vengono distinti 24 diversi tipi fondamentali di vegetazione, per ciascuno dei quali è fornita: una succinta descrizione della fisionomia dei consorzii più caratteristici; l'elenco delle piante principali che li costituiscono e ragguagli sulle loro condizioni ecologiche; le fonti bibliografiche che hanno servito a individuarli e a cartografarli; e infine una scelta iconografica di una ventina di fotografie a grande formato che illustrano gli aspetti paesistici di alcuni tipi di vegetazione.

«I 24 tipi di vegetazione cartografati sono i seguenti: 1° Deserto; 2° Steppa graminosa, perennierbosa e suffrutescente; 3° Steppa arbustata; 4° Fruticeto subdesertico; 5° Fruticeto subdesertico succulento alberato; 6° Boscaglia xerofila rada; 7° Boscaglia xerofila; 8° Boscaglia a bambù (*Oxytenanthera*); 9° Boscaglia sempreverde planiziale; 10° Boscaglia e fruticeto sempreverdi montani; 11° Savana (vari tipi); 12° Savana montana; 13° Bo-

(1) R. PICHI-SERMOLLI, *Tropical East Africa (Ethiopia, Somaliland, Kenia, Tanganyika)*. Unesco, Arid Zone Research. VI: Plant Ecology. Review of Research, pp. 302-360 Paris (1955).

(2) A. AUBREVILLE, P. DUVIGNEAUD, A. C. HOYLE, R.W.I. KEAY, F. A. MENDONÇA, R. PICHI-SERMOLLI, *Vegetation Map of Africa south of the tropic of Cancer*. Clarendon Press, Oxford (1957) (in corso di stampa).

(3) C.S.A. (CONSEIL SCIENTIFIQUE POUR L'AFRIQUE AU SUD DU SAHARA), *Phyto-Geography. C.A.S. Specialist Meeting on Phyto-Geography. Yangambi 28th July-8th August 1956*. London and Bukavu, Commission de Coopération Technique en Afrique au Sud du Sahara (1957).

sco caducifolio; 14° Foresta secca sempreverde planiziale; 15° Foresta secca sempreverde montana; 16° Foresta umida sempreverde planiziale; 17° Foresta umida sempreverde montana; 18° Foresta a bambù (*Arundinaria*); 19° Fruticeto e steppa altimontani; 20° Formazioni afroalpine; 21° Formazioni costiere; 22° Mangrovieta; 23° Formazioni riparie; 24° Formazioni palustri.

« Particolare rilievo acquista la documentazione della vegetazione afroalpina, di cui il Pichi-Sermolli ha potuto affermare l'esistenza anche in Africa Orientale, essendo egli l'unico botanico che ha contemporaneamente visitato le più alte montagne etiopiche del Semièn e le più alte equatoriali del Keli-mangiaro, e ha potuto per diretta esperienza rilevare l'affinità dei caratteri della loro flora.

« La carta geobotanica ora pubblicata rappresenta un sensibile progresso sulle precedenti, e valorizza l'immenso lavoro esplorativo compiuto dai nostri pionieri e dai nostri scienziati nel vasto territorio dell'Africa Orientale.

« Nella mia qualifica di Direttore dell'Erbario Coloniale di Firenze, sono particolarmente lieto di presentare all'Accademia dei Lincei questa pubblicazione perchè essa documenta come l'Erbario Coloniale non sia affatto un organismo in liquidazione o da liquidare in conseguenza delle disgraziate vicende politiche dell'ultima guerra, ma sia invece un organismo la cui attività è sempre attuale e in continua espansione nel concerto delle istituzioni similari degli altri stati, e che esso contribuisce efficacemente a mantenere all'Italia la posizione che le compete nel concerto delle altre nazioni europee interessate alla valorizzazione del continente africano a sud del Sahara, e a rendere più saldi i legami ideali di pacifica collaborazione scientifica e tecnica che ancora sussistono e sempre più sussisteranno nel futuro fra il nostro Paese e quelle terre la cui Storia ha così largamente interferito con la nostra ».

Il Socio Ghiarugi presenta anche un lavoro di Guidetta Roti-Michelozzi, dal titolo « *Adumbratio florum Aethiopicarum. 6. Caesalpiniaceae (Excl. gen. Cassia)* », pubblicato in « *Webbia* » vol. XIII, n. 1, pp. 133-228 (1957).

Il Socio Togliatti, presenta il 1° volume delle Opere di Corrado Segre, con le seguenti parole:

« A nome dell'Unione Matematica Italiana, presento all'Accademia il primo volume delle « Opere » di Corrado Segre, pubblicato a cura dell'Unione stessa e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Il volume appartiene alla collezione delle « Opere » dei grandi matematici italiani che l'Unione Matematica Italiana va pubblicando da alcuni anni. Questo primo volume contiene i lavori dell'Autore dedicati alla geometria algebrica; ad esso ne seguiranno altri tre, uno dei quali è attualmente in corso di stampa ».

Il Socio E. Bompiani presenta un volume del prof. S. Cherubino dal titolo: « *Calcolo delle matrici* », apparso nella Collezione di Monografie matematiche del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

La teoria delle matrici, che interessa non solo la geometria e l'analisi ma la meccanica celeste, la fisica teorica, l'elettrotecnica, l'aerodinamica, lo



studio dei fenomeni biologici ed economici, non aveva ancora trovato una esposizione in Italia. Il volume del Cherubino provvede a riempire, almeno per la parte teorica, questa lacuna. L'Editore Cremonese, che tante benemeritenze ha acquistato nel campo delle pubblicazioni matematiche ad alto livello scientifico, ha dato all'opera una ottima veste tipografica.

Il Socio Vardabasso presenta la «Carta delle permeabilità della Sardegna», da lui rilevata e realizzata grazie al munifico interessamento della Cassa per il Mezzogiorno. Dopo aver messo in evidenza l'importanza del problema dei rifornimenti idrici delle regioni del Sud, che implicano un vasto problema di sondaggi preparatori e di ricerche geofisiche, il Socio Vardabasso desidera ricordare il fondamentale contributo che la Cassa per il Mezzogiorno dà a questa opera e conclude comunicando che già quattro squadre geofisiche sono al lavoro in Sardegna.

Il prof. Giordani propone di inviare un messaggio, a nome dell'Accademia, al Presidente della Cassa per il Mezzogiorno, auspicando che la «Carta delle permeabilità della Sardegna» possa essere adeguatamente corredata da una Memoria illustrativa.

La proposta è approvata all'unanimità.

Il Presidente comunica quindi che il Collega Carnera, impossibilitato per ragioni di salute ad intervenire alla seduta, ha inviato in omaggio all'Accademia il volume IX, da lui curato, dei «Risultati del Servizio Internazionale delle Latitudini dal 1935 al 1941», edito dall'Unione Internazionale Astronomica e dall'Associazione Geodetica Internazionale e stampato con l'aiuto finanziario dell'UNESCO. Il prof. Giordani prega quindi il Collega Dore di voler illustrare brevemente il suddetto volume.

Il Socio Dore richiama l'attenzione della Classe sull'importanza scientifica di primissimo piano dell'opera, destinata a far conoscere i risultati delle osservazioni, eseguite nelle Stazioni internazionali di latitudine nel periodo compreso dal gennaio 1935 al gennaio 1941. Essa contiene pertanto, con i valori delle latitudini locali istantanee, trovati dalle 60 e più mila osservazioni, e delle loro conseguenti variazioni, con le coordinate ortogonali dei punti in cui è venuto a trovarsi successivamente il piede dell'asse istantaneo di rotazione della terra, la linea della Polodia.

Il prof. Dore conclude mettendo in evidenza gli altissimi meriti del Collega Carnera che, continuando ben degnamente la nobile tradizione dell'astronomia geodetica, si è dedicato per lunghi anni e queste osservazioni con una abnegazione veramente mirabile. Propone, infine, di inviare al Socio Carnera un messaggio di compiacimento e di augurio per l'opera compiuta e per quella che si accinge ad intraprendere nei prossimi anni.

La proposta del Socio Dore, a cui si associa il Presidente, è approvata all'unanimità.

Il prof. Giordani ringrazia il Collega Dore e, con lui, tutti i Soci che hanno presentato pubblicazioni.

Il Segretario Accademico illustra le opere inviate in omaggio all'Accademia.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Segre (anche a nome del Collega Severi), Tonzig, Cotronei, Margaria, Bonino, E. Bompiani, Grandi, Boaga, Montalenti, Armellini, Califano, Puntoni, Graffi, Picone e Giordani.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

BIOCCA E. e FERRETTI G. — *Archeostromylus italicus* gen. nov. et sp. nov. nuovo nematode borsato parassita di *Hystrix cristata* in Italia Centrale (pres. dal Socio V. PUNTONI).

BIOCCA E. e LE ROUX L. P. — Suddivisione del genere *Ancylostoma* (Dubini, 1843) (pres. dal Socio V. PUNTONI).

GAETA F. — Sull'equazione canonica di un complesso  $C_{n-d-1}^g$  di sottospazi  $S_d$  di  $S_n$  (pres. dal Socio F. SEVERI).

GAETA F. — Sul calcolo effettivo della forma associata  $F(W_{\alpha+\beta-u}^{gl})$  all'intersezione di due cicli effettivi puri  $U_\alpha^g, V_\beta^l$  di  $S$  in funzione delle  $F(U_\alpha^g), F(V_\beta^l)$  relative ai cicli secanti. Nota I (pres. dal Socio F. SEVERI).

GIANNUZZI M. A. — Sopra una nota di P.J.D. Gething sulla variazione dei diametri solari osservati a Greenwich (pres. del Socio G. ARMELLINI).

MANDAHL-BARTH G. — La validità di *Bulinus* (Physopsis) *abyssinicus* (Martens), l'ospite intermedio di *Schistosoma haematobium* in Somalia (pres. dal Socio V. PUNTONI).

MARRÈ E. e ARRIGONI O. — Reazioni metaboliche all'auxina. — IV. Su di una possibile base enzimatica dell'inibizione della crescita da parte di concentrazioni sopraottimali in auxina (pres. dal Socio S. TONZIG).

PONTIERI G. e FALCONE G. — Sulla biosintesi indotta di penicillinasi in spore batteriche nel corso del germogliamento (pres. dal Socio L. CALIFANO).

PUCCI C. — Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico. Nota I (pres. dal Socio M. PICONE).

PUCCI C. — Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico. Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 9 novembre 1957*

- ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMINE.  
BAZA DE CERCETARI ŞTIINŢIFICE. TIMIŞOARA. — *Lucrările Consfăţuirii de geometrie diferenţială din 9-12 iunie 1955*. Timişoara, Editura Academiei, 1956. Pp. 368, in-8°.
- ALBERTI Jacinto. — *Síntesis de la nueva hipótesis del origen, desarrollo y evolución biológica del sistema cosmogónico y atómico de la materia-energía*. S. n. t. Pp. 27 (In ciclostile).
- AMALDI Paolo. — Vedi: PIERACCINI Gaetano, AMALDI Paolo e MORI Antonio.
- AMMINISTRAZIONE PROVINCIALE DI VERCELLI. — *Primo decennio dalla fondazione e di funzionamento dell'Istituto Tecnico Agrario di Vercelli per le culture irrigue e la zootecnia*. Pubblicazione documentaria dell'attività sviluppata dall'anno scolastico 1946-47 all'anno 1955-56. Vercelli, 1956. Pp. 144, in-4°, con figg.
- BIANCHI Luigi. — *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. V: *Trasformazioni delle superficie e delle curve*. Roma, Ed. Cremonese, 1957. Pp. 538, n 8°.
- *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. VI: *Congruenze di rette e di sfere e loro deformazioni*. Roma, Ed. Cremonese, 1957. Pp. 329, in 8°.
- CARNERA Luigi. — Vedi: UNIONE INTERNAZIONALE ASTRONOMICA. ASSOCIAZIONE GEODETICA INTERNAZIONALE.
- CHERUBINO Salvatore. — *Calcolo delle matrici*. Roma, Ed. Cremonese, 1957. Pp. VI-322, in 8° (Consiglio Nazionale delle Ricerche. Monografie Matematiche, 4).
- CINTI Dino. — *Biblioteca Galileiana raccolta dal Principe Giampaolo Rocco di Torrepadula*. Firenze, Sansoni Antiquariato, 1957. Pp. 394, in-8°, con tavv. (Contributi alla Biblioteca Bibliografica Italiana, n. 15).
- CONGRESUL NAŢIONAL DE ŞIINŢE MEDICALE. — *Index bibliografic. 23 august 1944-31 decembrie 1955*. Bucureşti, Editura Medicala, 1956. Pp. 749, in-4°.
- Convegno Italo-Francese di Algebra astratta*. Padova, 16-19 aprile 1956. Roma, Ed. Cremonese, 1957. Pp. VI-73, in-8°, con figg.
- DITSCHKE Richard. — *Arbeit und Energie*. Braunschardt bei Weiterstadt, 1955. Pp. 19, in-8°, con figg.
- *Entwicklung und Gesetz im Weltall*. Eine übersichtliche Darstellung. Braunschardt bei Weiterstadt, 1957. Pp. 42, in-8°, con figg.
- *Die Wahrheit über die Kreisbewegung. Die theorie und ihre Prüfung an der Bewegung der Erdschse*. Braunschardt bei Weiterstadt, 1955. Pp. 20, in-8°, con figg.
- DOMUS GALILAEANA. PISA. — Vedi: *Saggi (I) di naturali esperienze fatte nella Accademia del Cimento...*
- Economia dell'energia atomica*. Rassegna bibliografica e di documentazione. Luglio 1957. Roma, Banca Nazionale del Lavoro, s. d. Pp. 38, in-8°.
- Enciclopedia Medica Italiana*. Vol. IX: *Str-Z*. Firenze, Sansoni, 1957. Pp. XII, col. 2267, in-4°, con figg. e tavv.
- ERUGIN N. P. — *Nejadnye funcii*. Leningrad, Universitet imeni A. A. Ždanova, 1956. Pp. 59, in-8°.
- FINLAY-FREUNDLICH E. — *On the Empirical Foundation of the General Theory of Relativity*. Estr. da «Vistas in Astronomy», vol. I.
- *University Observatory. St. Andrews*. Estr. da «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society», vol. CXV, 1955, n. 2.
- Géants d'acier sur la terre noire*. Berlin, Association pour les Relations Culturelles avec l'Étranger, 1957. Pp. 46, in-8°, con figg.
- GHIA Ferruccio. — *L'Universo. Atomi ed astri, l'uomo ed il pensiero dalla preistoria ad oggi*. Roma, 1957. Pp. 230, in-8°.

- GIGAS E. F. — *La Mesure Interférométrique des Distances*. Présentation du Géodimètre. Conférence donnée à la Société Belge de Photogrammétrie le 22 mars 1956. Estr. da « Bulletin de la Société Belge de Photogrammétrie », 1956, n. 45.
- GOLDRING Mary. — *L'economia dell'industria atomica nell'esperienza della Gran Bretagna*. Traduzione compilata e coordinata da Aldo Cassuto. Roma, Banca Nazionale del Lavoro, 1957. Pp. XII-244, in-8°, con figg. e tavv.
- GORSKOV G. V. — *Gammaizlučenie radioaktivnyh tel*. Leningrad, Universitet imeni A.A. Ždanova, 1956. Pp. 139, in-8°, con figg.
- GROSSU Alexandru C. — *Gastropoda, proso-branchia și opisthobranchia*. București, Academia Republicii Populare Romîne, 1956. Pp. 220, in-8°, con figg. (Fauna Republicii Populare Romîne. Mollusca, vol. III, asc. 2).
- GUTENBERG Beno. — *Earthquake energy released at various depths*. (Estratto). S.n.t. — *Effects of ground on earthquake motion*. Estr. da « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XLVII, 1957, n. 3.
- Kukuruza v BSSR. Sbornik Statej. Minsk, Akademija Nauk Belorusskoj SSR, 1957. Pp. 412, in-8°.
- MACHADO BANDEIRA DE MELLO Lydio. — *Os caracteres de divisibilidade por qualquer número inteiro em todas as aritméticas de base inteira possíveis*. Belo Horizonte, Oficinas Gráficas da Faculdade de Direito de Minas Gerais, 1957. Pp. 105 in-8°.
- *Quadrados mágicos*. Belo Horizonte, Oficinas Gráficas da Faculdade de Direito da Universidade de Minas Gerais, 1957. Pp. 143, in 8°.
- MANDEL Roberto. — *L'universo razionale*. Xilografie originali di Gabriele Mandel. Milano, Relations Latines, 1957. Pp. 143, in-8°, con figg.
- MENEGAZZI Guido. — *Ricordando Luigi Fantappiè: la sintropia nel rinnovamento delle scienze sociali*. Estr. da « Atti e Relazioni dell'Accademia Pugliese delle Scienze », Classe di Scienze Morali, voll. V, VI-VII, 1953-56.
- MORI Antonio. — Vedi: PIERACCINI Gaetano, AMALDI Paolo e MORI Antonio.
- MUHLJA A. V. — *Osnovy geologii i mineralogii*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Kazahskij Sel' skohozjajstvennyj Institut, 1957. Pp. 206, in-8°, con tavv.
- Nauki Humanistyczno Społeczne. N. 5,6. Łódź, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1957. Voll. 2, in-8° (Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Łódzkiego, seria I).
- NITTO Sotaro. — *The fundamental study of Mathematics*. Tokyo, Maruzen, 1956. Pp. 83, in-8°.
- PAL'GOV N. N. — *Lednikovye reki hrebta Zajlijskij Alatau*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1948. Pp. 140, in-8°, con figg. e tavv.
- PEANO Giuseppe. — *Opere scelte*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. I: *Analisi Matematica — Calcolo Numerico*. Roma, Ed. Cremonese, 1957. Pp. VII-530, in-8°.
- PICHI-SERMOLLI Rodolfo E. G. — *Una carta geobotanica dell'Africa Orientale (Eritrea, Etiopia, Somalia)*. Firenze, Istituto Botanico dell'Università, 1957. Pp. 118, in-8°, con figg. e tavv. (Herbarium Coloniale Florentinum).
- PIERACCINI Gaetano, AMALDI Paolo e MORI Antonio. — *La vecchiaia tarda lenta sana serena. Igiene individuale e previdenza sociale*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1957. Pp. 321, in-8°, con tavv.
- POLSKA AKADEMIA NAUK. — *Budowa antygenowa bakterii chorobotwórczych*. Wrocław-Warszawa, Zakład Ossolińskich, 1957. Pp. 417, in-8°, con figg. (Zeszyty Problenowe Nauki Polskiej, X).
- *Drgania mechaniczne i elektryczne w technice*. Wrocław-Warszawa, Zakład im Ossolińskich, 1957. Pp. 215, in-8°, con figg. e tavv. (Zeszyty Problenowe Nauki Polskiej, XI).
- PRESS Frank. — *Antartic seismology*. Estr. da « Engineering and Science Monthly », 1957, giugno.
- *Determination of crustal structure from phase velocity of rayleigh waves*. P. II: *San Francisco Bay region*. Estr. da « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XLVII, 1957, n. 2.
- *A seismic model study of the phase velocity method of exploration*. Estr. da « Geophysics », vol. XXII, 1957, n. 2.
- Problemi attinenti alla coagulazione del sangue*. Atti del II Simposio sui problemi



- attinenti alla coagulazione del sangue. Firenze, novembre 1956. Milano, Prodotti Roche, S. P. A., 1957. Pp. xv-300, in-8°, con figg.
- Produzione scientifica e tecnica di Vincenzo Rivera*. Estr. da «Annali di Botanica», vol. XXIV, fasc. 3 (Appendice).
- PROFILI Ulderico. — *Perché i farmaci attuali non guariscono la tubercolosi. Possibilità di debellarla con l'endezima specifico*. Roma, Tip. Meloni, 1957. Pp. 12, in-8°, con figg.
- Progress Report. Seismological Laboratory California Institute of Technology*, 1956. Estr. da «Transactions of the American Geophysical Union», vol. XXXVIII, 1957, n. 2.
- PUNTONI Vittorio. — *Le tossinfezioni alimentari*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1957. Pp. 63, in-8°, con tavv. (Manuali di Divulgazione e Guide Pratiche, 1).
- QUAGLIA G. Battista. — *Fluidi fisici e terapia*. Estr. da «Metapsichica», 1957, fasc. 1.
- *Precisazione sull'atomo psicobiofisico*. Relazione al C. S. M. Estr. da «Metapsichica», vol. II, 1957.
- RABENAU Albercht. — *Perowskit- und Fluoritphasen in den Systemen  $ZrO_2-LaO_{1,5}-MgO$  und  $ZrO_2-LaO_{1,5}-CaO$* . Estr. da «Zeitschrift für Anorganische und Allgemeine Chemie», vol. CCLXXXVIII, 1956, n. 3-4.
- RADČENKO G. A. — Vedi: SEPELEV S. F. i RADČENKO G. A.
- Rektoratsübergabe 13. november 1956 und Immatrikulationsfeier 20. november 1956*. Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, s. d. Pp. 42, in-8°, con tavv.
- Reports of the Swedish Deep-Sea Expedition 1947-1948*. Vol. I; vol. II, fasc. 3; vol. VI, fasc. 3; vol. IX, fasc. 1. Göteborg, Kungl. Vetenskaps- och Vitterhets-Samhälle, 1957. Fasc. 4, in-4°, con tavv.
- RIVERA Vincenzo. — Vedi: *Produzione scientifica e tecnica di Vincenzo Rivera*.
- ROCHLITZ Carlos. — *Tiefere Zusammenhänge der Erscheinungen...* Pp. 63 (dattiloscritte).
- ROTI-MICHELOZZI Guidetta. — *Adumbratio florum Aethiopicarum. 6: Caesalpiniaceae* (Excl. Gem. Cassia). Firenze, Istituto Botanico dell'Università, 1957. Pp. 96, in-8°, con figg. e tavv. (Herbarium Coloniale Florentinum).
- ŠABUNINA M. M. — Vedi: SKOROPANOV S. G. i ŠABUNINA M. M.
- Saggi (I) di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento e strumenti e suppellettili della medesima Accademia conservati presso il Museo di Storia della Scienza di Firenze*. Pubblicati a cura della Domus Galilaeana di Pisa e del suddetto Museo. Pisa, Domus Galilaeana, 1957. Paginaz. varia, in-4° (Riproduzione in facsimile dei «Saggi», nell'ed. 1667, sia nel frontespizio sia nella dedica).
- SAMSONOV M. T. — *Iz opyta geologorazvedochnykh rabot v Karagandinskom ugol'nom bassejne*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1957. Pp. 95, in-8°, con figg.
- ŠČERBA G. N. — *Geologija Narymskogo massiva granitoidov na Južnom Altae*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Altajskij Institut i Institut Geologičeskikh Nauk, 1957. Pp. 216, in-8°, con figg.
- SEGRE Corrado. — *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. I. Roma, Ed. Cremonese, 1957. Pp. XII-445, in-8°.
- ŠEPELEV S. F. i RADČENKO G. A. — *Ustanovlenie norm rashoda vozduha dlja provetrvanija vyrabotok na silikozoopasnykh rudnikah*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Gornogo Dela, 1957. Pp. 123, in-8°, con figg. e tavv.
- SIRCHIA Antonino. — *Le terre rare nella classificazione periodica e la disposizione degli elettroni attorno al nucleo*. Trapani, Arti Grafiche G. Corrao, 1957. Pp. 114, in-8°, con tavv.
- SKOROPANOV S. G. i ŠABUNINA M. M. — *Agrotehničeskaja rol'mnogoletnih trav na torfjano-bolotnykh počvach*. Minsk, Akademija Nauk Belorusskoj SSR, 1957. Pp. 115, in-16°, con figg.
- SMITH E. A. — *Problems behind the wave equation*. Estr. da «Revista de Ciencias», a. LVI, 1955, nn. 491-494.
- TAKASU Tsurusaburo. — *Die endgültige kugelgeometrische Relativitätstheorie, welche als eine Faserbündelgeometrie aufgefasst ist*. Estr. da «The Yokohama Mathematical Journal», vol. IV, 1956.
- UGGA Arvid Hj. — *Linnaeus*. Translated from the Swedish by Alan Blair. Stockholm, Swedish Institute, 1957. Pp. 18, in 8°, con tavv.

- UNIONE INTERNAZIONALE ASTRONOMICA.  
ASSOCIAZIONE GEODETICA INTERNAZIONALE. — *Risultati del servizio internazionale delle latitudini dal 1935.0 al 1940.0*. Vol. IX. A cura di Luigi Carnera. Sanca-sciano, Off. Gr. Fratelli Stianti, 1957. Pp. 263, in-4°, con tavv.
- UNIONE MATEMATICA ITALIANA. — *Bibliografia Matematica Italiana*. Vol. VI: Anno 1955. Roma, Ed. Cremonese, 1957. Pp. XIII-131, in-8°.
- UNIVERSITAS BELGICA. — *Inventaire des Ressources Scientifiques Belges*. III: *Sciences pures et appliquées*, chap. 5: *Sciences géographiques et minérales*; chap. 6: *Sciences biologiques*; chap. 7: *Éducation physique et hygiène* (1.X.1956). Bruxelles, 1956. Pp. 252, in-8°.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 14 dicembre 1957*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Analisi matematica.** — *Sullo spettro in un parametro da cui dipendono certe equazioni integrali lineari.* Nota (\*) del Socio MAURO PICONE (\*\*).

Indicherò con  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,  $n$  insiemi misurabili di punti, rispettivamente di spazi euclidei a  $r_1, r_2, \dots, r_n$  dimensioni, con  $x_i$  e  $y_i$  punti di  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), con  $K(\lambda)$  una matrice quadrata d'ordine  $n$ , i cui elementi  $K_{ij}(x_i, y_j, \lambda)$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) sono funzioni, reali o complesse, quasi continue, per qualsivoglia valore, reale o complesso, del parametro  $\lambda$ , rispettivamente, negli insiemi  $(A_i, A_j)$ , prodotti topologici di  $A_i$  per  $A_j$ , con  $\varphi$  un vettore di  $n$  componenti  $\varphi_i(x_i)$  funzioni, reali o complesse, quasi continue, rispettivamente, negli insiemi  $A_i$ , con  $C$  una classe di matrici  $K$  e con  $\Gamma$  una classe di vettori  $\varphi$ , tali che gl'integrali

$$\int_{A_j} K_{ij}(x_i, y_j, \lambda) \varphi_j(y_j) dy_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

abbiano senso per quasi tutti i punti  $x_i$  di  $A_i$ . Considerata per  $K$  in  $C$  e  $\varphi$  in  $\Gamma$ , l'equazione integrale, lineare e omogenea, di prima specie, nel vettore  $\varphi$ , dipendente dal parametro  $\lambda$ ,

$$(1') \quad K(\lambda) * \varphi = 0,$$

(\*) Compilata nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Presentata nella seduta del 14 dicembre 1957.



cioè <sup>(1)</sup> il sistema, di prima specie, di  $n$  equazioni integrali lineari e omogenee, nel vettore  $\varphi$ ,

$$(I') \quad \sum_{j=1}^n \int_{A_j} K_{ij}(x_i, y_j, \lambda) \varphi_j(y_j) dy_j = 0 \quad (\text{quasi ovunque in } A_i, i = 1, 2, \dots, n)$$

oppure l'equazione integrale lineare omogenea di seconda specie, nel vettore  $\varphi$ ,

$$(I'') \quad \varphi = K(\lambda) * \varphi$$

$$(I'') \quad \varphi_i(x_i) = \sum_{j=1}^n \int_{A_j} K_{ij}(x_i, y_j, \lambda) \varphi_j(y_j) dy_j$$

(quasi ovunque in  $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ )

si dice che  $\lambda$  è un *autovalore* per l'equazione se esiste un vettore  $\varphi$  non nullo che la soddisfa, il quale, a sua volta, chiamasi *autosoluzione* dell'equazione, competente a quell'autovalore. Lo *spettro*, nel parametro  $\lambda$ , per l'equazione, è l'insieme dei punti del piano complesso  $\lambda$  luogo degli autovalori  $\lambda$ .

Con questa Nota mi permetto di indicare esempi particolari di equazioni (I') o (I'') per i quali si può determinare un cerchio del piano  $\lambda$ , con centro nell'origine, privo di autovalori.

Una funzione  $f(x)$ , reale e complessa, sarà detta *pseudolimitata* in un insieme  $A$  di punti  $x$ , se esiste in  $A$ , un insieme  $N$ , di misura nulla, tale che  $|f(x)|$  riesca limitata in  $A - N$  ed allora, l'estremo superiore di  $|f(x)|$  in  $A - N$ , sarà detto lo *pseudoestremo superiore* di  $|f(x)|$  in  $A$  e indicato con la scrittura

$$\text{p. e. s. } |f(x)| \text{ in } A.$$

Per una funzione  $f(x)$ , quasi continua e pseudolimitata in un insieme  $A$ , supposto misurabile, si porrà, per definizione,

$$\left( \int_A |f(x)|^{+\infty} dx \right)^{1/+\infty} = \text{p. e. s. } |f(x)| \text{ in } A.$$

Designando  $p$  un numero positivo, dirò che una funzione  $f(x)$ , reale o complessa, quasi continua in un insieme misurabile  $A$ , appartiene alla classe  $C_p(A)$  se  $|f(x)|^p$  riesce sommabile in  $A$ , alla classe  $C_\infty(A)$ , se essa è pseudolimitata in  $A$ .

Con  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) indicherò  $n$  numeri reali non inferiori a uno o l'infinito positivo, con  $q_i$ , il numero per cui risulti

$$\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

se  $p_i > 1$ , l'infinito positivo se  $p_i = 1$ .

(1) Adotto le notazioni del mio libro *Appunti d'Analisi Superiore* (Rondinella, Napoli, 190), pp. 629-630.

1. La matrice  $H$ , quadrata d'ordine  $n$ , abbia gli elementi  $H_{ij}(x_i, y_j)$ , indipendenti dal parametro  $\lambda$ , funzioni reali o complesse, quasi continue, rispettivamente, negli insiemi  $(A_i, A_j)$ , dirò che essa appartiene alla classe  $C_{p_1 p_2 \dots p_n}$ , se, per quasi tutti i punti  $x_i$ , di  $A_i$ , il suo elemento  $H_{ij}$  è funzione di  $y_j$  appartenente alla classe  $C_{p_j}(A_j)$  e la funzione

$$\left( \int_{A_j} |H_{ij}(x_i, y_j)|^{p_j} dy_j \right)^{1/p_j},$$

appartiene alla classe  $C_{p_i}(A_i)$ .

Dirò che il vettore  $\varphi$  appartiene alla classe  $\Gamma_{p_1 p_2 \dots p_n}$  se la sua componente  $\varphi_i(x_i)$  appartiene alla classe  $C_{p_i}(A_i)$ .

Ciò posto, sussistono i teoremi seguenti.

I. — Se la matrice  $H$  appartiene alla classe  $C_{p_1 p_2 \dots p_n}$ , è hermitiana, si ha cioè

$$\bar{H}_{ij}(x_i, y_j) \equiv H_{ji}(y_j, x_i),$$

e, per ogni vettore  $\varphi$  della classe  $\Gamma_{p_1 p_2 \dots p_n}$ , è definita positiva, si ha cioè, per ogni tale vettore non nullo,

$$\bar{\varphi} * H * \varphi \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{A_i} \bar{\varphi}_i(x_i) dx_i \int_{A_j} H_{ij}(x_i, y_j) \varphi_j(y_j) dy_j > 0,$$

allora, se è

$$(2') \quad K_{ij}(x_i, y_j, \lambda) \begin{cases} = H_{ij}(x_i, y_j), & \text{per } i \geq j, \\ = \lambda H_{ij}(x_i, y_j), & \text{per } i < j, \end{cases}$$

oppure

$$(2'') \quad K_{ij}(x_i, y_j, \lambda) \begin{cases} = \lambda H_{ij}(x_i, y_j), & \text{per } i > j, \\ = H_{ij}(x_i, y_j), & \text{per } i \leq j, \end{cases}$$

lo spettro, nel parametro  $\lambda$ , per l'equazione (1'), supposti la matrice  $H$  e il vettore  $\varphi$  delle classi ora dette, è, se esiste, reale ed esterno all'intervallo  $(-1, 1)$ .

In virtù delle ipotesi, ha, intanto, senso l'equazione (1') e  $\bar{\varphi} * H * \varphi$  ha un valore reale, determinato e finito. Se  $\lambda$  e  $\varphi$  sono autovalore e auto-soluzione per l'equazione (1'), si ha, supposte, per esempio, verificate le (2'),

$$(3) \quad 0 = \bar{\varphi} * K(\lambda) * \varphi = \alpha + \lambda\beta + \bar{\beta},$$

essendo

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \bar{\varphi}_i(x_i) dx_i \int_{A_i} H_{ii}(x_i, y_i) \varphi_i(y_i) dy_i,$$

$$\beta = \sum_{j=1}^n \int_{A_j} \bar{\varphi}_i(x_i) dx_i \int_{A_j} H_{ij}(x_i, y_j) \varphi_j(y_j) dy_j.$$

Si ha, d'altra parte, per ipotesi,

$$(4) \quad 0 < \bar{\varphi} * H * \varphi = \bar{\varphi} * K(1) * \varphi = \alpha + \beta + \bar{\beta},$$

donde, sottraendo la (4), dalla (3),  $(1 - \lambda) \beta > 0$ , e quindi  $\lambda \neq 1$  e, detto  $\mu$  un numero positivo,  $\beta = \mu/(1 - \lambda)$ . Posto, tale valore di  $\beta$ , nella (3), si trova

$$\alpha + \mu \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} = 0,$$

e quindi, per essere  $\alpha > 0$ , che  $(1 + \lambda)/(1 - \lambda)$  è un numero reale negativo. Sarà pertanto,  $\lambda = \bar{\lambda}$ , oppure  $\lambda = -\bar{\lambda}$ . La seconda alternativa si esclude perché se  $\lambda$  fosse immaginario puro, si avrebbe  $(1 + \lambda)/(1 - \lambda) = 1 > 0$ . È dunque  $\lambda = \bar{\lambda}$ , cioè  $\lambda$  reale e per essere  $(1 + \lambda)/(1 - \lambda) < 0$ , di modulo maggiore di uno.

II. - Nelle stesse ipotesi dell'esempio precedente, se, detto  $p$  un numero naturale minore di  $n$ , è

$$(5) \quad K_{ij}(x_i, y_j, \lambda) \begin{cases} = H_{ij}(x_i, y_j) & \text{per } i \leq p \text{ e } j \leq p \text{ o per } i \geq p \text{ e } j \geq p, \\ = \lambda H_{ij}(x_i, y_j) & \text{per } i \leq p \text{ e } j > p \text{ o per } i > p \text{ e } j \leq p, \end{cases}$$

l'eventuale spettro nel parametro  $\lambda$  per la (1') è reale, esterno all'intervallo  $(-1, 1)$  ed ha per centro l'origine.

Intanto è subito verificato che se  $\lambda$  è autovalore e il vettore, di componenti

$$\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_p(x_p), \quad \varphi_{p+1}(x_{p+1}), \dots, \varphi_n(x_n)$$

è un'autosoluzione che gli compete,  $-\lambda$  e il vettore di componenti

$$-\varphi_1(x_1), \dots, -\varphi_p(x_p), \quad \varphi_{p+1}(x_{p+1}), \dots, \varphi_n(x_n),$$

sono un autovalore e una competente autosoluzione. Il teorema sarà perciò dimostrato, se stabiliremo che gli autovalori sono reali e quelli non negativi maggiori di uno. Ora, se  $\lambda$  è un autovalore e il vettore  $\varphi$  un'autosoluzione che gli compete, si deduce dalle (1'), in virtù delle (5)

$$(6) \quad 0 = \bar{\varphi} * K(\lambda) * \varphi = \alpha + \lambda\beta,$$

mentre è, per ipotesi

$$(7) \quad 0 < \bar{\varphi} * K(1) * \varphi = \bar{\varphi} * H * \varphi = \alpha + \beta,$$

avendo posto

$$\alpha = \left( \sum_{i,j}^{1,p} + \sum_{i,j}^{p+1,n} \right) \int_{\bar{A}_i} \bar{\varphi}_i(x_i) dx_i \int_{\bar{A}_j} H_{ij}(x_i, y_j) \varphi_j(y_j) dy_j,$$

$$\beta = \left( \sum_{i=1}^p \sum_{j=p+1}^n + \sum_{i=p+1}^n \sum_{j=1}^p \right) \int_{\bar{A}_i} \varphi_i(x_i) dx_i \int_{\bar{A}_j} H_{ij}(x_i, y_j) \varphi_j(y_j) dy_j.$$

Si osservi che  $\alpha$  e  $\beta$  sono reali a  $\alpha$  positivo. Dalla (6) si deduce che  $\beta$  non è nullo e quindi che  $\lambda$  è reale. Sottraendo la (6) dalla (7) si ricava  $(1 - \lambda \beta > 0$  e quindi che  $1 - \lambda \neq 0$  e, indicando con  $\mu$  un numero reale positivo,  $\beta = \mu/(1 - \lambda)$ . Introdotto tale valore di  $B$  nella (6) si trova

$$\alpha + \mu \frac{\lambda}{1 - \lambda} = 0,$$

e quindi, essendo  $\lambda$  non negativo,  $\lambda > 1$  <sup>(2)</sup>.

2. Indicheremo sempre con  $H$  una matrice quadrata d'ordine  $n$  indipendente da  $\lambda$ , i cui elementi  $H_{ij}(x_i, y_j)$  sono funzioni quasi continue, rispettivamente, negli insiemi  $(A_i, A_j)$  e con  $\varphi$  un vettore le cui  $n$  componenti  $\varphi_i(x_i)$  sono funzioni quasi continue, rispettivamente, negli insiemi  $A_i$ . Siano:

I)  $C^{(1)}$  la classe di matrici  $H$ , il cui elemento  $H_{ij}$ , per quasi tutti i punti  $x_i$  di  $A_i$ , è funzione di  $y_j$ , di norma sommabile in  $A_j$ , appartenente cioè alla classe  $C_2(A_j)$ , e  $\Gamma^{(1)}$  la classe di vettori  $\varphi$  la cui componente  $\varphi_i$  è di norma sommabile in  $A_i$ ;

II)  $C_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(2)}$  la classe di matrici  $H$ , il cui elemento  $H_{ij}$ , per quasi tutti i punti  $x_i$  di  $A_i$ , è funzione di  $y_j$  appartenente alla classe  $C_{p_j}(A_j)$  e  $\Gamma_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(2)}$  la classe, già considerata, di vettori  $\varphi$  la cui componente  $\varphi_i$  appartiene alla classe  $C_{q_i}(A_i)$ ;

III)  $C^{(3)}$  la classe di matrici  $H$ , il cui elemento  $H_{ij}$ , per quasi tutti i punti  $x_j$  di  $A_i$ , è funzione di  $y_j$  appartenente alla classe  $C_\infty(A_j)$  e  $\Gamma^{(3)}$  la classe di vettori  $\varphi$  la cui componente  $\varphi_i$  è di modulo sommabile in  $A_i$ , appartiene cioè alla classe  $C_1(A_i)$ .

Porremo, nel primo caso.

$$(8) \quad |H| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{A_i} dx_i \int_{A_j} |H_{ij}(x_i, y_j)|^2 dy_j},$$

$$|\varphi| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{A_i} |\varphi_i(x_i)|^2 dx_i},$$

nel secondo,

$$(9) \quad |H| = \max \left\{ \int_{A_i} \left[ \sum_{j=1}^n \left( \int_{A_j} |H_{ij}(x_i, y_j)|^{p_j} dy_j \right)^{1/p_j} \right]^{q_i} dx_i \right\}^{1/q_i},$$

$$|\varphi| = \max \left( \int_{A_i} |\varphi_i(x_i)|^{q_i} dx_i \right)^{1/q_i},$$

(2) Se

$$K_{ij}(x_i, y_j, \lambda) \begin{cases} = H_{ij}(x_i, y_j), & \text{per } i = j, \\ = \lambda H_{ij}(x_i, y_j), & \text{per } i \neq j, \end{cases}$$

un ragionamento simile prova soltanto, per  $n > 2$ , che lo spettro nel parametro  $\lambda$  per la  $(1')$  è reale ed esterno all'intervallo  $(0, 1)$ .



per  $i = 1, 2, \dots, n$ ; nel terzo

$$(10) \quad |H| = \max \left( \text{p. e. s.} \sum_{i=1}^n \int_{A_i} |H_{ij}(x_i, y_j)| dx_i, \text{ in } A_j \right),$$

per  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$|\varphi| = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} |\varphi_i(x_i)| dx_i.$$

Posto

$$K(\lambda) = \lambda H$$

ha senso, per  $H$  in  $C$  e  $\varphi$  in  $\Gamma$ , in ciascuno dei tre casi ora considerati, la equazione integrale omogenea di seconda specie ( $I''$ ), per la quale vogliamo, in ciascuno dei casi medesimi, determinare un campo circolare, con centro nell'origine del piano  $\lambda$ , privo di autovalori.

Osserviamo, anzitutto, che, se  $|H| < +\infty$ , posto

$$\psi = H * \varphi,$$

il vettore  $\psi$  è della stessa classe  $\Gamma$  a cui appartiene  $\varphi$  e risulta

$$|\psi| \leq |H| |\varphi|.$$

Ciò è ben noto nel primo caso <sup>(3)</sup>, nel secondo risulta dalle limitazioni

$$\begin{aligned} |\psi_i(x_i)| &\leq \sum_{j=1}^n \left( \int_{A_j} |H_{ij}(x_i, y_j)|^{p_j} dy_j \right)^{1/p_j} \left( \int_{A_j} |\varphi_j(y_j)|^{q_j} dy_j \right)^{1/q_j} \leq \\ &|\varphi| \sum_{j=1}^n \left( \int_{A_j} |H_{ij}(x_i, y_j)|^{p_j} dy_j \right)^{1/p_j}, \\ \left( \int_{A_i} |\psi_i(x_i)|^{q_i} dx_i \right)^{1/q_i} &\leq |\varphi| \left\{ \int_{A_i} \left[ \sum_{j=1}^n \left( \int_{A_j} |H_{ij}(x_i, y_j)|^{p_j} dy_j \right)^{1/p_j} \right]^{q_i} dx_i \right\}^{1/q_i}, \end{aligned}$$

e nel terzo dalle seguenti

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{A_i} |\varphi_i(x_i)| dx_i &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{A_i} dx_i \int_{A_j} |H_{ij}(x_i, y_j)| |\varphi_j(y_j)| dy_j = \\ &\sum_{j=1}^n \int_{A_j} |\varphi_j(y_j)| dy_j \sum_{i=1}^n \int_{A_i} |H_{ij}(x_i, y_j)| dx_i. \end{aligned}$$

Soddisfatta la ( $I''$ ), postovi  $K(\lambda) = \lambda H$ , da un vettore  $\varphi$  non nullo, ne segue

$$1 \leq |\lambda| |H|,$$

donde il teorema, noto nel primo caso <sup>(4)</sup>:

(3) Cfr. PICONE, loc. cit. <sup>(1)</sup>, p. 637.

(4) Cfr. PICONE, loc. cit. <sup>(1)</sup>, p. 637.

III. — Se  $|H| < +\infty$ , il campo circolare del piano  $\lambda$ , con centro nell'origine e raggio  $1/|H|$ , è privo di autovalori.

Osserviamo che, per una data equazione integrale (I''), postovi  $K(\lambda) = \lambda H$ , si ottengono, applicandole questo teorema, tante determinazioni dell'indicato campo circolare, quante sono le possibili  $n$ -ple di numeri  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , per le quali le classi  $C$  e  $\Gamma$  sono contenute, rispettivamente, nelle classi  $C_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(2)}$  e  $\Gamma_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(2)}$ , oppure nelle  $C_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(1)} C_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(2)}$  e  $\Gamma_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(1)} \Gamma_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(2)}$ , o nelle  $C_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(3)} C_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(2)}$  e  $\Gamma_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(3)} \Gamma_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(2)}$ , o nelle  $C_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(1)} C_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(3)} C_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(2)}$  e  $\Gamma_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(1)} \Gamma_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(3)} \Gamma_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(2)}$ , a seconda che si assuma per  $|H|$  la (9), oppure la (8) o la (10). Se  $C$  è contenuta in  $C^{(1)} C^{(3)}$  e  $\Gamma$  in  $\Gamma^{(1)} \Gamma^{(3)}$ , si ottengono due diverse determinazioni del campo medesimo a seconda che si assuma per  $|H|$  la (8) o la (10).

Ovviamente, gioverà nelle applicazioni scegliere, fra le dette determinazioni, quelle che forniscono i più bassi valori di  $|H|$ .

Osserviamo, inoltre, che se la matrice  $H$  è hermitiana e appartiene alla classe  $C_{p_1 p_2 \dots p_n}$  (già considerata nel n. 1, contenuta nella  $C_{p_1 p_2 \dots p_n}^{(2)}$ ) e il vettore  $\varphi$  alla classe  $\Gamma_{p_1 p_2 \dots p_n}$ , lo spettro nel parametro  $\lambda$  per la (I''), postovi  $K(\lambda) = \lambda H$ , è reale, poiché, per  $\lambda$  e  $\varphi$  autovalore e autosoluzione, risulta, allora,

$$\sum_{i=1}^n \int_{A_i} |\varphi_i(x_i)|^2 dx_i = \lambda (\bar{\varphi} * H * \varphi).$$

Se, dunque, in tali ipotesi, che ha di conseguenza l'appartenenza dell'auto-soluzione  $\varphi$  alla classe  $\Gamma_{22\dots 2}$ , la quantità  $|H|$  data dalla (9) è finita, come avverrebbe quando, essendo  $q_i \leq p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), gl'insiemi  $A_i$ , per i valori dell'indice  $i$  per i quali  $q_i$  è minore di  $p_i$ , avessero misura finita, il detto spettro è reale e disgiunto dall'intervallo aperto  $(-1/|H|, 1/|H|)$ . Questo risultato è noto nel caso in cui sia  $p_i = q_i = 2$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), nel quale è superfluo supporre finite le misure degli insiemi  $A_i$ .

Nel primo caso, poniamo

$$H * H * \varphi = H^2 * \varphi, \quad H * H^2 * \varphi = H^3 * \varphi, \dots$$

Si dimostra che, se  $|H| < +\infty$ , la matrice  $H^r$ , con  $r$  numero naturale qualsivoglia, appartiene alla classe  $C^{(1)}$  e risulta  $|H^r| \leq |H|^r$ . Dalla (I''), postovi  $K(\lambda) = \lambda H$ , segue  $\varphi = \lambda^r H^r * \varphi$  e quindi  $|\varphi| \leq |\lambda|^r |H^r| |\varphi|$  e pertanto, se  $\varphi$  non è nullo,

$$1 \leq |\lambda|^r |H^r|,$$

donde il teorema:

IV. — Nel primo caso, se  $|H| < +\infty$ , tutti i campi circolari del piano  $\lambda$ , con centro nell'origine e raggio  $|H^r|^{-1/r}$  sono, comunque si assuma il numero naturale  $r$ , privi di autovalori per l'equazione (I''), postovi  $K(\lambda) = \lambda H$ .

Supponiamo che la matrice  $H$ , della classe  $C^{(1)}$ , con  $0 < |H| < +\infty$ , sia hermitiana; esiste allora per l'equazione (I''), postovi  $K(\lambda) = \lambda H$ , lo spettro nel parametro  $\lambda$  ed è reale e, com'è dimostrato a p. 647 dei citati

miei « *Appunti di Analisi Superiore* », ma non esplicitamente osservato, per il valore assoluto  $m$  dell'autovalore  $\lambda$  di minimo valore assoluto, si ha:

$$(11) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} |H^r|^{-1/r} = m. \quad (5)$$

È colà dimostrato ed esplicitamente osservato che  $m$  non supera  $|H^r|/|H^{r+1}|$  e risulta

$$(12) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} (|H^r|/|H^{r+1}|) = m,$$

onde possiamo enunciare il notevole teorema:

V. - *Nel primo caso, se la matrice  $H$  è hermitiana, ed è  $0 < |H| < +\infty$ , per il valore assoluto  $m$  dell'autovalore  $\lambda$  di minimo valore assoluto, nella (1''), postovi  $K(\lambda) = \lambda H$ , sussiste, per qualsivogliano numeri naturali  $r$  e  $s$ , la limitazione*

$$|H^r|^{-1/r} \leq m \leq |H^s|/|H^{s+1}|,$$

dove per il calcolo di  $m$ , fornito dalle (11) e (12), si è in grado di migliorare l'errore di approssimazione.

3. Se il contenuto del numero precedente ha un interesse, questo consiste, oltreché nel teorema V, nell'esservi assegnato, in ciascuno dei casi considerati, un numero non superato dal modulo della trasformazione  $\psi = H * \varphi$ , nell'ipotesi  $|H| < +\infty$ . È ben noto, peraltro <sup>(6)</sup> che se una qualsivoglia trasformazione distributiva  $\psi = H(\varphi)$ , di un elemento  $\varphi$ , di uno spazio di Banach completo, in un elemento  $\psi$  dello stesso spazio, è dotata di modulo, è cioè lineare, come sono quelle considerate nel numero precedente, e, detto  $\|H\|$  tal modulo, è  $|\lambda| \cdot \|H\| < 1$ , la trasformazione  $\psi = \varphi - \lambda H(\varphi)$  possiede l'inversa, essa pure lineare, avente un modulo non superiore a  $1/(1 - |\lambda| \cdot \|H\|)$ .

(5) L'eguaglianza

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|H^r\|^{-1/r} = m,$$

posteriormente data - in una più estesa accezione di spettro - da I. GELFAND, per la più generale trasformazione lineare  $\psi = H(\varphi)$  [cfr. F. RIESZ e S. NAGY, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, Académie des Sciences de Hongrie (1952), p. 414], designando  $\|H\|$  il modulo della trasformazione, è, in questo caso, banale, per essere, in tal caso,  $\|H^r\| = 1/m^r$ . D'altronde si deve osservare che, essendo  $\|H\|$  l'estremo superiore di

$$\|H(\varphi)\|/\|\varphi\|,$$

al variare di  $\varphi$  nello spazio considerato, il ricordato teorema di Gelfand fa, in generale, dipendere il calcolo di  $m$ , dalla risoluzione di un difficile problema di estremo. È certo di grande interesse, per una data trasformazione lineare  $\psi = H(\varphi)$ , associarle un numero positivo  $\rho(H)$ , di facile calcolo, per cui riesca

$$\rho(H^r) \geq \|H^r\| \quad , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \|H^r\|^{1/r} = \lim_{r \rightarrow \infty} [\rho(H^r)]^{1/r}.$$

Nel caso particolare, considerato nel testo, si è appunto trovato che un tal numero  $\rho(H)$  è dato da  $|H|$ , definito dalla (8).

(6) Cfr., per esempio, J. WEISSINGER, *Verallgemeinerungen des Seidelschen Iterationsverfahrens* (Zamm, 1953).

**Chimica.** — *Spettro I. R. e costanti di forza interne dello ione complesso  $\text{Cr}(\text{CN})_6^{3-}$*  <sup>(\*)</sup>. Nota di VINCENZO CAGLIOTI, GUIDO SARTORI e MARISA SCROCCO, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio V. CAGLIOTI.

Come già comunicato in una Nota precedente <sup>(1)</sup>, è stato studiato lo spettro I.R. del  $\text{Cr}(\text{CN})_6^{3-}$  nel tentativo di cercare relazioni tra lo spettro vibrazionale di alcuni cianuri complessi e la struttura elettronica dello ione centrale.

Lo ione  $\text{Cr}^{3+}$  ha una struttura elettronica  $3d^3$ . All'atto della formazione del complesso i 5 livelli degeneri  $d$  si suddividono nel sottolivello  $d_e$  a simmetria  $T_{2g}$  e nel sottolivello  $d_y$  a simmetria  $E_g$ .

Come è noto, il livello  $d_e$  è non legante, nel senso che la sua simmetria spaziale non lo rende atto a formare legami con i gruppi complessati, ma può dare luogo a legami  $\pi$  quando i suoi tre orbitali  $d_{xy}$ ,  $d_{xz}$  e  $d_{yz}$  possono combinarsi con opportuni orbitali  $p$  dei ligandi.

Ne segue che, a parità di *ligandi*, la massima possibilità di dare legami si riscontra in ioni a struttura elettronica  $d^6$  come  $\text{Fe}^{+2}$  e  $\text{Mn}^{+2}$ , mentre detta proprietà diminuirà per gli ioni a struttura  $d^5$ ,  $d^4$  e  $d^3$ .

Il caso dello ione  $\text{C}^{3+}$  è interessante in quanto le sue proprietà magnetiche indicano che i tre elettroni  $d^3$  sono tutti disaccoppiati; quindi esso non possiede alcun orbitale a simmetria  $T_{2g}$  saturo e di conseguenza la sua capacità a dare doppi legami è minima.

Questo comporta una bassa frequenza per il legame  $\text{Cr}-\text{C}$  e una alta frequenza per il legame  $\text{C}-\text{N}$ , in quanto è noto che il legame  $\text{C}-\text{N}$  può risuonare tra le forme limiti  $\text{C}=\text{N}$  e  $\text{C}\equiv\text{N}$ .

Questi risultati sono stati già indicati nel lavoro precedente, ove si nota che la frequenza  $\nu_6$  corrispondente allo *stretching*  $\text{C}-\text{N}$  è la più alta nel gruppo dei complessi esaminati.

La Tabella I riporta le frequenze dei composti da noi studiati accanto a quelle dello ione  $\text{CN}^-$  e del gruppo  $\text{CN}$  non perturbato quale si può ritenere si trovi in  $\text{RCN}$  <sup>(2)</sup>.

Dalla tabella risulta che complessi contenenti metalli diversi ma allo stesso stato di ossidazione (III) presentano all'incirca la stessa frequenza  $2130 \pm 5$ ; risulta anche la grande influenza che ha sulla frequenza lo stato di ossidazione di uno stesso metallo.

In questa Nota viene fatto un tentativo di assegnazione più completa per tutte le altre bande riscontrabili nello spettro di  $[\text{Cr}(\text{CN})_6] \text{K}_3$  solido.

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Generale dell'Università di Roma, e Centro di Chimica Generale del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta dell'8 giugno 1957.

(1) V. CAGLIOTI, G. SARTORI e M. SCROCCO, Questi « Rendiconti », 22, 266 (1957).

(2) Nel nostro lavoro precedente, la frequenza  $2213 \text{ cm}^{-1}$  è stata per una svista attribuita ad  $\text{HCN}$ , mentre appartiene ad un  $\text{RCN}$ .



TABELLA I.

Composto	Struttura elettronica	Frequenza CN	Frequenza Me-C
KCN . . . . .		2080	
$\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ . . . . .	$d^5$	2125	505
$\text{Mn}(\text{CN})_6^{3-}$ . . . . .	$d^4$	2125	514
$\text{Cr}(\text{CN})_6^{3-}$ . . . . .	$d^3$	2127	462
RCN . . . . .		2213-2250	—
$\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ . . . . .	$d^5$	2125	505
$\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$ . . . . .	$d^6$	2047	584
$\text{Mn}(\text{CN})_6^{3-}$ . . . . .	$d^4$	2125	514
$\text{Mn}(\text{CN})_6^{4-}$ . . . . .	$d^5$	2060	—
$\text{Mn}(\text{CN})_6^{5-}$ . . . . .	$d^6$	2048	—

Lo spettro da noi rilevato è presentato nella Tabella II, dove per confronto sono riportate le assegnazioni fatte da Hawkins e coll. <sup>(3)</sup> per lo spettro del  $\text{Cr}(\text{CO})_6$ .

La fondatezza del confronto è basata sulle seguenti considerazioni: il cromo-carbonile possiede, come molecola isolata, la stessa simmetria  $O_h$  del cromaticianuro; il legame  $\text{Cr}-\text{C}$ , nel carbonile, è parzialmente del tipo  $\sigma$  e parzialmente del tipo  $\pi$ ; nel cianuro partecipa più del tipo  $\sigma$ ; il legame  $\text{C}-\text{O}$  partecipa del tipo doppio e triplo; lo stesso vale per il legame  $\text{C}-\text{N}$ .

Infatti, la frequenza del  $\text{CO}$  gas è  $2155 \text{ cm}^{-1}$ ; quella del  $\text{CO}$  chetonico  $1710 \text{ cm}^{-1}$ . Tutte le frequenze misurate per metalli carbonili <sup>(4)</sup>, <sup>(5)</sup> sono comprese tra questi due valori limiti.

Per la frequenza CN sorge il problema della scelta del termine di confronto: occorrerebbe infatti assumere come base la frequenza di un CN non perturbato.

A tale scopo si potrebbe pensare a riferirsi o alla frequenza CN di un nitrile alifatico oppure a quella dello ione cianidrico.

Per la frequenza RCN si hanno dei valori superiori a  $2200 \text{ cm}^{-1}$ .

Per lo ione  $\text{CN}^-$  dei cianuri alcalini la frequenza è compresa tra  $2080$  e  $2085 \text{ cm}^{-1}$ ; ma appena si passa a composti non dissociabili e perciò a legame

(3) N. J. HAWKINS, H. C. MATTRAW, W. W. SABOT and D. R. CARPENTER, « J. Chem. Phys. », 23, 2422 (1955).

(4) R. K. SHELINE, « J.A.C.S. », 72, 5761 (1950).

(5) G. J. CABLE, R. S. NYHOLM and R. K. SHELINE, « J.A.C.S. », 74, 3373 (1954).

meno ionico, la frequenza cresce come è dimostrato oltre che dai nostri valori, anche dai seguenti citati da Kohlrausch <sup>(6)</sup>:

$\text{Hg}(\text{CN})_2 = 2197$  ;  $\text{KHg}(\text{CN})_2 = 2130$  ;  $\text{K}_2\text{Hg}(\text{CN})_4 = 2150$  ;  $\text{K}_2\text{Cu}(\text{CN})_4 = 2095$ .

TABELLA II.

$\text{Cr}(\text{CN})_6^{3-}$		$\text{Cr}(\text{CO})_6$	
2518 <i>d</i>	$\nu_3 + \nu_8$	2688 <i>d</i>	$\nu_3 + \nu_7$
2500 <i>d</i>	$\nu_6 + \nu_2$	2556 <i>d</i>	$\nu_1 + \nu_4, \nu_5 + \nu_6$
2127 <i>f</i>	$\nu_6$	2466 <i>m</i>	$\nu_3 + \nu_8$
2106 <i>dd</i>		2392 <i>f</i>	$\nu_2 + \nu_6$
2100 <i>d</i>		2336	$\nu_4 + \nu_6, \nu_3 + \nu_{12}$
2085 <i>d</i>	$3 \nu_7$	2212 <i>d</i>	$\nu_6 + \nu_{10}, \nu_1 + \nu_9$
2066 <i>dd</i>		2174 <i>d</i>	
2042 <i>d</i>		2121 <i>f</i>	$\nu_3 + \nu_9$
2018 <i>dd</i>	$\nu_1 - \nu_9, \nu_6 - \nu_{11}$	2090 <i>f</i>	$\nu_6 + \nu_{11}, \nu_3 + \nu_{13}$
1030 <i>dd</i>	$\nu_4 + \nu_7$	2033	$\nu_1 - \nu_9$
993 <i>m</i>	$\nu_5 + \nu_8$	2000 <i>ff</i>	$\nu_6$
921 <i>dd</i>	$\nu_7 + \nu_{10}$	1970	$3 \nu_7$
852 <i>d</i>	$\nu_5 + \nu_{12}$	1912 <i>m</i>	$\nu_3 + \nu_9$
833 <i>f</i>	$\nu_2 + \nu_8$	1613 <i>d</i>	$\nu_6 + \nu_4$
798 <i>dd</i>	$\nu_7 + \nu_{11}, \nu_4 + \nu_8$	1196 <i>f</i>	$\nu_5 + \nu_7$
694 <i>m</i>	$\nu_7$	1055	$\nu_2 + \nu_7$
544 <i>d</i>	$\nu_{10} + \nu_{12}$	1032 <i>f</i>	$\nu_4 + \nu_7$
460 <i>m</i>	$\nu_4 + \nu_9$	963 <i>m</i>	$\nu_5 + \nu_8$
457 <i>f</i>	$\nu_8$	875 <i>f</i>	$\nu_7 + \nu_{10}$
		811 <i>f</i>	$\nu_4 + \nu_8, \nu_2 + \nu_3$
		755 <i>m</i>	$\nu_7 + \nu_{11}$
		673	$\nu_4 + \nu_{12}$
		661 <i>ff</i>	$\nu_7$
		635 <i>f</i>	$\nu_5 + \nu_4$
		595	
		522	$\nu_8 + \nu_{11}, \nu_{10} + \nu_{12}$
		513 <i>m</i>	$\nu_2 + \nu_9$
		477 <i>m</i>	$\nu_4 + \nu_9$
		465 <i>d</i>	
		449 <i>d</i>	$\nu_4 + \nu_{13}$
		436 <i>f</i>	$\nu_8$

(6) KOHLRAUSCH, *Smekal Raman Effekt*, p. 321 (1931).

Nella Tabella III è riportato il quadro delle assegnazioni da noi attribuite a  $K_3[Cr(CN)_6]$ , confrontate con quelle relative a  $Cr(CO)_6$  (l. c.)

TABELLA III.

$Cr(CO)_6$				$Cr(CN)_6^{3-}$		
$\nu_1$	$A_{1g}$	R	2108	2137	stretching	C—N
* $\nu_2$	$A_{1g}$	R	393	374	»	M—C
$\nu_3$	$E_g$	R	2019	2063	»	C—N
* $\nu_4$	$E_g$	R	373	336	»	M—C
$\nu_5$	$F_{1g}$	I	539	536	clutch	
$\nu_6$	$F_{1u}$	IR	2000	2127	stretching	C—N
$\nu_7$	$F_{1u}$	IR	661	694	bending	C—N
* $\nu_8$	$F_{1u}$	IR	436	457	stretching	M—C
* $\nu_9$	$F_{1u}$	IR	102	124	bending	M—C
$\nu_{10}$	$F_{2g}$	R	213	227	»	C—N
* $\nu_{11}$	$F_{2g}$	R	90	106	»	M—C
$\nu_{12}$	$F_{2u}$	I	310	317	»	C—N
$\nu_{13}$	$F_{2u}$	I	80	(110)	»	M—C

I criteri che ci hanno guidato nel tentativo di assegnazione sono ancora le analogie con lo spettro del cromocarbonile e la premessa teorica che sono le matrici F e G che determinano le frequenze e quindi anche i rapporti reciproci di grandezza.

Da un confronto dei due spettri, sono state assegnate come primo tentativo tre delle frequenze attive in I. R. e precisamente  $\nu_6 = 2127$ ,  $\nu_7 = 694$  e  $\nu_8 = 457$ . Per quanto riguarda la  $\nu_8$  notiamo che essa potrebbe corrispondere alla frequenza  $\nu_8 = 587$  trovata da Bonino e coll. (7) per il ferrocianuro potassico. In questo caso, la struttura  $d^6$  implica un forte doppio legame metallo-carbonio, e quindi un valore più elevato della frequenza; per lo ione ferricianidrico (struttura  $d^5$ ) abbiamo trovato  $505\text{ cm}^{-1}$  e pertanto la sequenza  $d^6 = 587$ ,  $d^5 = 505$ ,  $d^4 = 457$  sembra confermare le nostre assegnazioni.

Se queste assegnazioni sono accettate, molte delle frequenze residue possono essere interpretate come bande di combinazione, tenendo presenti le regole di selezione che del resto sono eguali per i due complessi.

Così la 2518 può essere interpretata come  $\nu_3 + \nu_8$  con  $\nu_3 = 2061\text{ cm}^{-1}$ .

La 2500 può assegnarsi alla combinazione  $\nu_6 + \nu_2$  con  $\nu_2 = 373\text{ cm}^{-1}$ .

Il valore di  $\nu_2$  trova una buona conferma nella combinazione  $833 = \nu_2 + \nu_8$  da cui  $\nu_2 = 376\text{ cm}^{-1}$ .

Ammettendo per la 1030 la combinazione  $\nu_4 + \nu_7$  si ha per  $\nu_4$  il valore di  $336\text{ cm}^{-1}$  inferiore alla  $\nu_2$ , come è da aspettarsi per le ragioni dette.

La 993 può essere una  $\nu_5 + \nu_8$  con  $\nu_5 = 536\text{ cm}^{-1}$  in accordo con la  $\nu_5 = 533$  del cromocarbonile.

(7) G. B. BONINO, « Rend. Acc. Lincei », XX, 419 (1956).

Analogamente la  $921$  può essere  $\nu_7 + \nu_{10}$  con  $\nu_{10} = 227$ , ben compatibile con la  $\nu_{10} = 213$  del carbonile.

La  $798$  sarebbe  $\nu_7 + \nu_{11}$  con  $\nu_{11} = 104$  analogamente al  $\nu_{11} = 90$  del carbonile.

La  $544 = \nu_{10} + \nu_{12}$  con  $\nu_{12} = 317$  anche analoga alla  $\nu_{12} = 310$  del carbonile.

Finalmente la  $460 = \nu_4 + \nu_9$  dà per  $\nu_9$  il valore  $124 \text{ cm}^{-1}$  confrontabile con il  $\nu_9 = 102$  del carbonile.

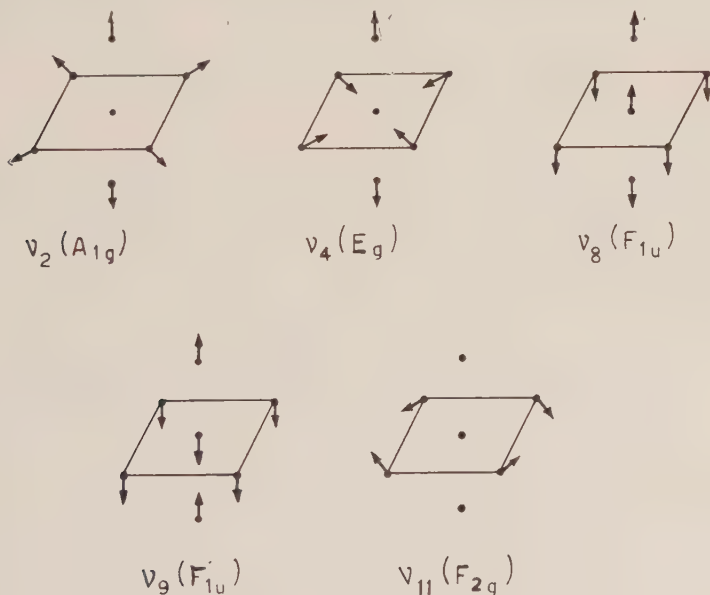
Resta a parlare del gruppo di bande comprese tra la  $\nu_6$  a  $2125$  e la  $\nu_4 + \nu_7$  a  $1030 \text{ cm}^{-1}$ . Se esse non sono dovute a diminuzione di degenerescenza per effetto cristallino, qualcuna si può classificare.

La  $2085$  potrebbe essere, analogamente al caso del cromocarbonile,  $3 \nu_7 = 2082$  e la  $2018 \nu_1 - \nu_9 = 2013$  o  $\nu_6 - \nu_{11} = 2023$ .

Considerando ora le frequenze dello *stretching* M—C e in particolar modo la  $\nu_2$  e la  $\nu_4$  attive in Raman e la  $\nu_8$  attiva in I.R. si può istituire un confronto con le analoghe del cromocarbonile.

Cr—C—N	Cr—C—O
$\nu_2 = 374$	$\nu_2 = 393$
$\nu_4 = 336$	$\nu_4 = 373$
$\nu_8 = 457$	$\nu_8 = 436$
$\nu_9 = 124$	$\nu_9 = 102$
$\nu_{11} = 106$	$\nu_{11} = 90$

I cinque modi di vibrazione sono così rappresentati:



Dalla figura si vede che la frequenza  $\nu_2$  corrispondente ad una vibrazione in cui tutti i sei gruppi C—N si allontanano contemporaneamente dall'atomo centrale, è la più indicativa tra le tre dello *stretching* M—C. Orbene questa frequenza è nel cianuro più bassa che nel cromo-carbonile, il che sarebbe in accordo con la minore percentuale di doppio legame del primo composto. Anche la frequenza  $\nu_4$  è più piccola nel cianuro, trattandosi di una vibrazione in cui quattro gruppi C—N si avvicinano mentre due si allontanano.

Nella  $\nu_8$  invece, la vibrazione è più complessa e quindi il confronto diretto non ha molto significato.



## DISCUSSIONE.

Dalla tabella delle nostre assegnazioni prendiamo in considerazione le vibrazioni interne perché meno deformabili per azione del campo cristallino e precisamente i valori  $\nu_2, \nu_4, \nu_8, \nu_9, \nu_{11}$ .

Il sistema ottaedrico  $XY_6$ , con  $Y=CN$ , può essere descritto con 6 coordinate interne, corrispondenti alle sei distanze  $Cr-C$  e 12 angoli  $C-Cr-C$ . Sono quindi in tutto 18 coordinate interne, per determinare le 15 vibrazioni proprie della molecola.


Se si esamina la simmetria di queste coordinate, risulta subito evidente che la rappresentazione delle distanze di legame corrisponde alle specie  $A_{1g} + F_{2g} + F_{1u}$ , mentre gli angoli di valenza corrispondono alle specie  $F_{1u} + F_{2g} + F_{2u}$ . Con queste premesse si possono allora descrivere le coordinate di simmetria, definite come combinazioni lineari delle coordinate interne.

$$R_j = \sum_k U_{jk} r_k$$

ove  $R_j$  è la coordinata di simmetria,  $U_{jk}$  è il coefficiente della coordinata interna  $r_k$ , e la somma è estesa a tutte le coordinate interne equivalenti.

Perché il sistema di coordinate di simmetria risulti ortonormalizzato deve essere

$$\sum_k (U_{jk})^2 = 1 \quad \text{e} \quad \sum_k (U_{jk} U_{ik}) = 0.$$

Rappresentando l'ottaedro con i simboli seguenti:  si ottiene per le coordinate di simmetria la seguente rappresentazione:

classe  $A_{1g}$ :

$$R_2 = (\Delta d_1 + \Delta d_2 + \Delta d_3 + \Delta d_4 + \Delta d_5 + \Delta d_6) \frac{1}{\sqrt{6}}$$

classe  $E_g$  doppiamente degeneri:

$$R_{4a} = (2 \Delta d_1 - \Delta d_3 - \Delta d_4 - \Delta d_5 - \Delta d_6 + 2 \Delta d_2) \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$R_{4b} = (\Delta d_3 - \Delta d_4 + \Delta d_5 - \Delta d_6) \frac{1}{2}.$$

Per le due  $F_{1u}$  triplamente degeneri:

$$R_{8a} = (\Delta d_1 - \Delta d_2) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R_{8b} = (\Delta d_3 - \Delta d_5) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R_{8c} = (\Delta d_6 - \Delta d_4) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R_{9a} = (\Delta\alpha_{23} + \Delta\alpha_{24} + \Delta\alpha_{25} + \Delta\alpha_{26} - \Delta\alpha_{13} - \Delta\alpha_{14} - \Delta\alpha_{15} - \Delta\alpha_{16}) \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$R_{9b} = (\Delta\alpha_{15} + \Delta\alpha_{25} + \Delta\alpha_{45} + \Delta\alpha_{65} - \Delta\alpha_{13} - \Delta\alpha_{23} - \Delta\alpha_{43} - \Delta\alpha_{63}) \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$R_{9c} = (\Delta\alpha_{14} + \Delta\alpha_{24} + \Delta\alpha_{34} + \Delta\alpha_{54} - \Delta\alpha_{16} - \Delta\alpha_{26} - \Delta\alpha_{36} - \Delta\alpha_{56}) \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Per la  $F_{2g}$  triplamente degenera:

$$R_{11a} = (\Delta\alpha_{34} + \Delta\alpha_{56} - \Delta\alpha_{45} - \Delta\alpha_{36}) \frac{1}{2}$$

$$R_{11b} = (\Delta\alpha_{24} + \Delta\alpha_{16} - \Delta\alpha_{26} - \Delta\alpha_{14}) \frac{1}{2}$$

$$R_{11c} = (\Delta\alpha_{23} + \Delta\alpha_{15} - \Delta\alpha_{25} - \Delta\alpha_{13}) \frac{1}{2}.$$

La  $F_{2u}$  non viene presa in considerazione, in quanto la vibrazione  $\nu_{13}$  è troppo incerta.

Siccome rileviamo dallo spettro cinque valori di frequenza, potremo scrivere una espressione per l'energia potenziale comprendente al massimo cinque termini. La funzione da noi scelta è:

$$2V = f_d \sum_{i=1}^6 (\Delta d_i)^2 + f_\alpha \sum_{i=1}^{12} (\Delta\alpha_i)^2 + 2f_{\alpha\alpha} \sum_{i,j=1}^{12} (\Delta\alpha_i)(\Delta\alpha_j) + \\ + 2f_{dd} \sum_{i,j=1}^6 (\Delta d_i)(\Delta d_j) + 2f_{\alpha d} \sum_{i,j=1}^{i=6, j=12} (\Delta d_i)(\Delta\alpha_j).$$

In cui  $f_d$  rappresenta la costante di forza della vibrazione *stretching* Cr—C,  $f_\alpha$  è la costante di forza della vibrazione *bending* C—Cr—C,  $f_{dd}$  l'interazione tra due *stretching*,  $f_{\alpha\alpha}$  l'interazione fra due *bending* e  $f_{\alpha d}$  l'interazione *stretching-bending*.

Usando il metodo di Wilson abbiamo calcolati i valori delle matrici F per l'energia potenziale e gl'inversi delle matrici G per l'energia cinetica.

Noti questi valori, la relazione tra frequenza e costante di forza per ciascun tipo di coordinate di simmetria è data dalla equazione:

$$\lambda = 4\pi^2 c^2 \nu^2 = |F||G|$$

Dai coefficienti delle coordinate interne nelle espressioni delle coordinate di simmetria si deducono i seguenti valori per le matrici F della energia potenziale.

$$\begin{array}{ll} A_{1g} & F_{22} = f_d + 4f_{dd} \\ E_g & F_{44} = f_d - 2f_{dd} \\ F_{1u} & F_{88} = f_d \\ & F_{89} = F_{98} = -2df_{\alpha d} \\ & F_{99} = d^2(f_\alpha + 2f_{\alpha\alpha}) \\ F_{2g} & F_{11,11} = d^2(f_\alpha - 2f_{\alpha\alpha}). \end{array}$$

Le corrispondenti matrici  $G$  per l'energia cinetica sono:

$$\begin{aligned} A_{1g} \quad G_{22} &= \mu_{Cr} + \mu_{CN} \\ E_g \quad G_{44} &= \mu_{Cr} + \mu_{CN} \\ F_{1u} \quad G_{88} &= \mu_{Cr} + \mu_{CN} \\ &G_{89} = G_{98} = 2 \mu_{Cr}/d \\ &G_{99} = (2 \mu_{CN} + 4 \mu_{Cr})/d^2 \\ F_{2g} \quad G_{11,11} &= 2 \mu_{CN}/d^2. \end{aligned}$$

Calcolate queste grandezze, si ha immediatamente la relazione tra costanti di forza e frequenze, e precisamente per le singole vibrazioni:

$$\begin{aligned} A_{1g} \quad \lambda_2 &= 4 \pi^2 c^2 \nu_2^2 = F_{22} \cdot G_{22} \\ E_g \quad \lambda_4 &= 4 \pi^2 c^2 \nu_4^2 = F_{44} \cdot G_{44} \\ F_{1u} \quad \lambda_8 + \lambda_9 &= 4 \pi^2 c^2 (\nu_8^2 + \nu_9^2) = F_{88} G_{88} + 2 F_{89} G_{89} + F_{99} G_{99} \\ &\lambda_8 \lambda_9 = 16 \pi^4 c^4 \nu_8^2 \nu_9^2 = \begin{vmatrix} F_{88} & F_{89} \\ F_{98} & F_{99} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} G_{88} & G_{89} \\ G_{98} & G_{99} \end{vmatrix} \\ F_{2g} \quad \lambda_{11} &= 4 \pi^2 c^2 \nu_{11}^2 = F_{11} \cdot G_{11}. \end{aligned}$$

Per la risoluzione numerica, si può osservare che  $f_d$  e  $f_{dd}$  si possono ricavare dai due valori di  $\nu_2$  e  $\nu_4$ . Dalle due equazioni corrispondenti alla  $F_{1u}$  e da quella corrispondente alla  $F_{2g}$  si possono dedurre le altre tre costanti di forza.

Nella Tabella IV che segue sono esposti i dati relativi alle costanti di forza calcolate come sopra, per il complesso  $Cr(CN)_6^{3-}$ ; accanto ad esse sono indicate le costanti di forza per il  $Cr(CO)_6$ .

TABELLA IV.

$Cr(CN)_6^{3-}$	$Cr(CO)_6$
$f_d = 1,234 \cdot 10^5$ dine $cm^{-1}$	$f_d = 1,544 \cdot 10^5$ dine $cm^{-1}$
$f_{dd} = 0,041 \cdot 10^5$	$f_{dd} = 0,029 \cdot 10^5$
$f_a = 0,155 \cdot 10^5$	$f_a = 0,148 \cdot 10^5$
$f_{aa} = 0,036 \cdot 10^5$	$f_{aa} = 0,041 \cdot 10^5$
$f_{ad} = -0,168 \cdot 10^5$	$f_{ad} = -0,233 \cdot 10^5$

Per  $Cr(CO)_6$ , le costanti sono state da noi calcolate impiegando per le  $F_{1u}$  le coordinate di simmetria di Venkateswarlu e Sundaram <sup>(8)</sup> più semplici delle nostre.

Risulta evidente dal confronto tra questi valori ed i nostri che essi si corrispondono tutti nell'ordine di grandezza per le diverse specie.

(8) K. VENKATESWARLU and S. SUNDARAM, «Z. Physik Chem.», 9, 174 (1956).

Per ulteriore confronto abbiamo calcolato la costante  $f_d$  con il metodo di Hearsh e Linnet <sup>(9)</sup> del campo delle forze orbitali. Gli autori danno per  $\lambda_2$  e  $\lambda_4$  le seguenti espressioni:

$$\lambda_2 = (K_1 + 8A)/m_2$$

$$\lambda_4 = \left( K_1 - \frac{8}{3} \frac{B}{R} + \frac{8}{3} A \right) / m_2$$

in cui  $K_1$  corrisponde alla nostra  $f_d$ ,  $R$  è la distanza di equilibrio,  $A = (1/2)(\partial^2 V/\partial R^2)$  e  $B = -\partial V/\partial R$  rappresentano la repulsione per gli atomi dei gruppi non legati.

Con questo metodo di calcolo si trova per:

$$\text{Cr(CO)}_6 \quad K_1 = 2,196 \cdot 10^5 \quad A = 0,044 \cdot 10^5$$

$$\frac{B}{R} = 0,0068$$

$$\text{Cr(CN)}_6^{3-} \quad K_1 = 1,566 \cdot 10^5 \quad A = 0,072 \cdot 10^5$$

$$\frac{B}{R} = 0,0111.$$

Deriva quindi un'ulteriore conferma del valore più piccolo della costante di forza del cianuro rispetto al carbonile.

**Chimica.** — *Sulla struttura cristallina del polibutadiene 1-2 isotattico* <sup>(\*)</sup>. Nota di GIULIO NATTA, PAOLO CORRADINI e IVANO WALTER BASSI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. NATTA.

Nel corso di ricerche eseguite nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano sui nuovi procedimenti catalitici di polimerizzazione stereoselettiva, basati sull'impiego di catalizzatori ottenibili per azione di metallalchili su composti di metalli di transizione, è stato possibile sintetizzare tutti e 4 gli stereoisomeri cristallini del polibutadiene e precisamente i polibutadieni a concatenamento 1-4 trans e 1-4 cis ed i polibutadieni a concatenamento 1-2 rispettivamente isotattico e sindiotattico. Sulla loro preparazione, già coperta da brevetti [1], sarà riferito da uno di noi (G. N.) in collaborazione con L. Porri in altra sede. Nella fig. 1 sono riportati gli spettri tipici ai Raggi X di questi polimeri registrati con un contatore di Geiger.

(9) «Trans. Farad. Soc.», 45, 264 (1949).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Società Montecatini.

(\*\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.



Abbiamo delineato in precedenti lavori le principali caratteristiche configurazionali delle catene di tali polimeri allo stato cristallino, completate da una indagine strutturistica accurata per quanto riguardava il polibutadiene 1-2 sindiotattico ed il polibutadiene 1-4 cis [2].

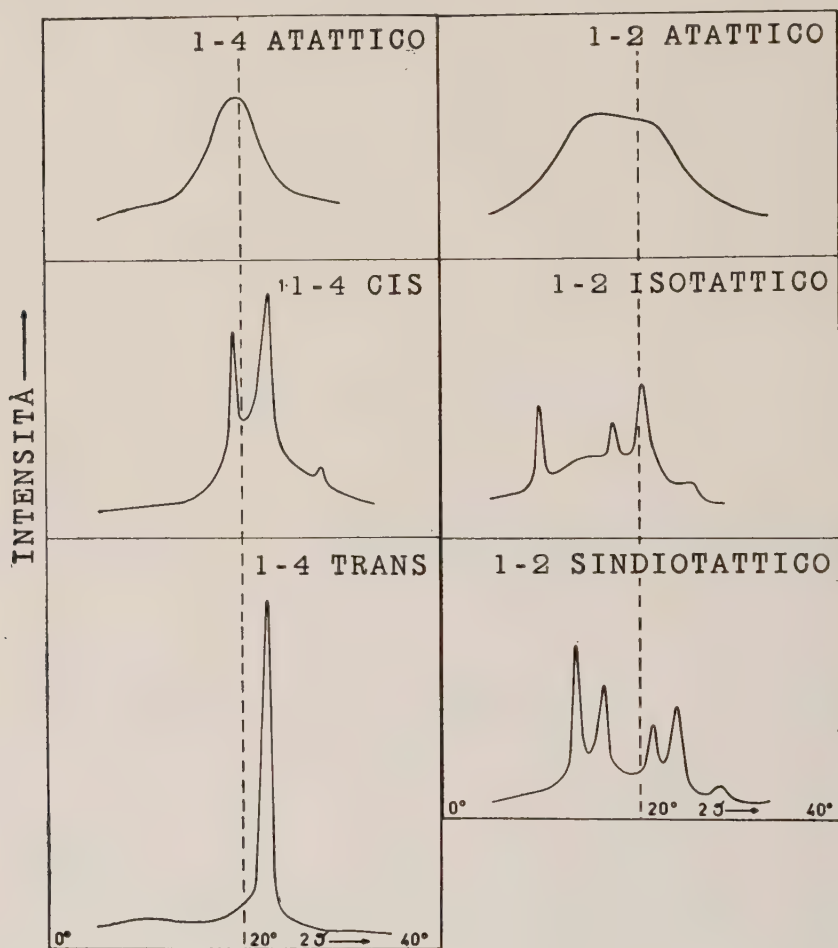


Fig. 1. - Spettri registrati ai raggi X degli stereoisomeri cristallini del polibutadiene (Cu  $K\alpha$ ).

La forma delle catene risultanti è mostrata in fig. 2. È interessante rilevare come anche per composti contenenti doppi legami sia possibile applicare il principio del massimo allontanamento dei legami semplici (con piccole deviazioni quando esso porterebbe ad accostamenti tra atomi di idrogeno a distanze di Van der Waals, inferiori a  $2,0 \text{ \AA}$ , come si verifica nel polibutadiene 1-4 cis). Tale principio trova probabilmente la sua origine nella barriera di potenziale che incontra un legame semplice carbonio-carbonio nel ruotare intorno ad un altro legame semplice adiacente (fig. 3). Già in un nostro lavoro precedente, nel quale avevamo messo in evidenza le strette

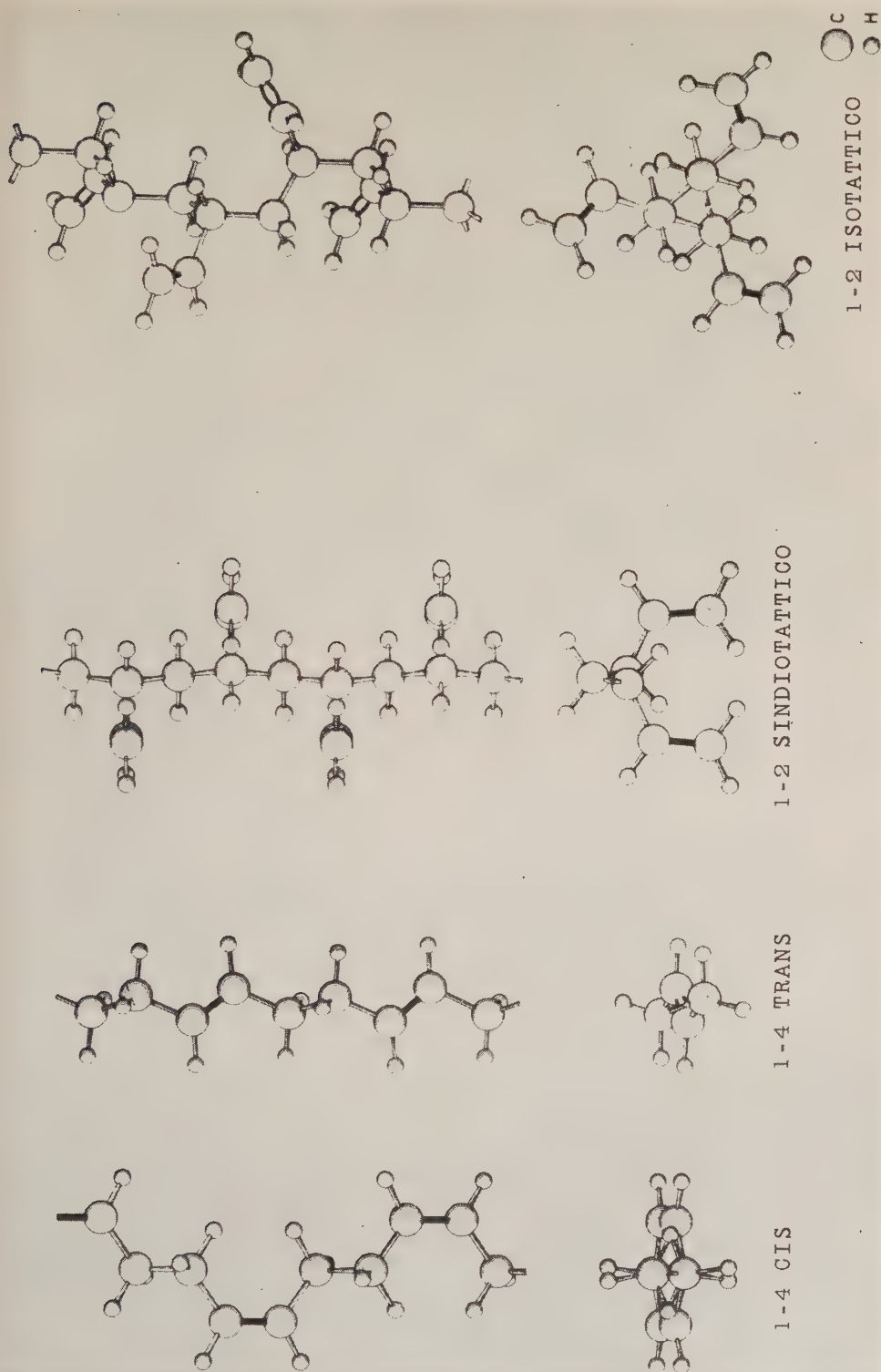


Fig. 2. - Modelli delle catene degli stereoisomeri cristallini del polibutadiene.

analogie strutturali tra il polibutadiene ed il polialfabutene isotattico, avevamo supposto che tale principio si verificasse. Esso determina un orientamento diverso del vinile laterale rispetto a quello dell'etile nel polialfabutene già da noi studiato [3] (fig. 4). Ciò è stato recentemente confermato con una più accurata indagine strutturale.

Il polibutadiene isotattico cristallizza nel gruppo spaziale  $R \bar{3}c$  come il polialfabutene ed ha costanti  $a = 17,3 \text{ \AA}$ ,  $c = 6,5 \text{ \AA}$  da confrontare con

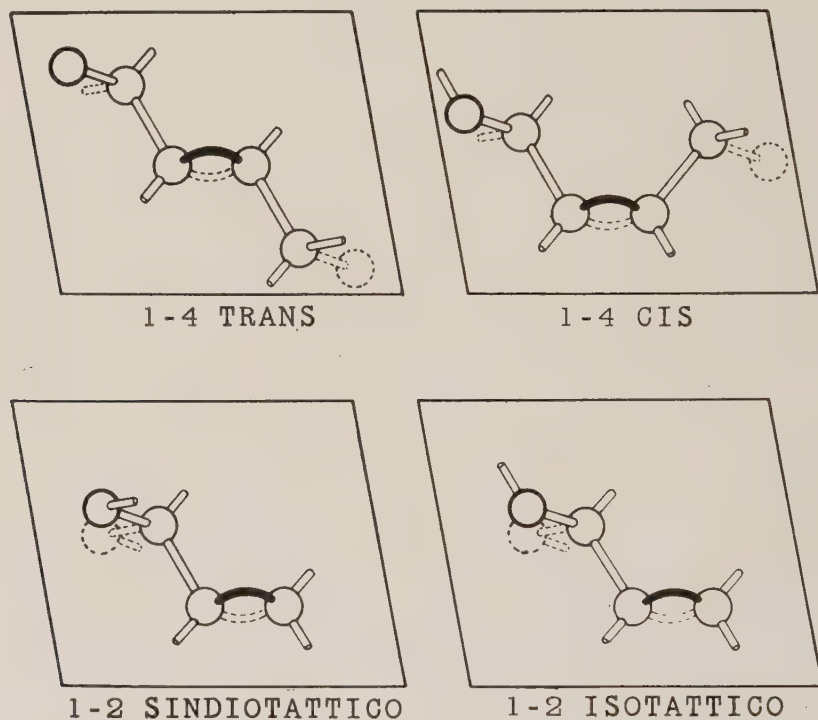


Fig. 3. - Conformazione di sequenze di legami semplici adiacenti ad un doppio legame negli stereoisomeri cristallini del polibutadiene.

$a = 17,7 \text{ \AA}$ ,  $c = 6,5 \text{ \AA}$  del polialfabutene. La densità risultante (0,96), è praticamente uguale a quella del polibutadiene sindiotattico ed a quella del polialfabutene. Intorno ad ogni asse ternario elicogiro si avvolge una catena spiraleforme; ogni macromolecola a configurazione destra è affacciata ad una macromolecola a configurazione sinistra. Attorno ad ogni asse ternario elicogiro è possibile sistemare, analogamente a quanto già trovato per il polialfabutene, molecole ruotate di  $180^\circ$  intorno ad una retta normale all'asse  $z$ . Si vicariano quindi statisticamente nello stesso sito macromolecole isomorfe coi legami CH-vinile o tutti rivolti in basso o tutti rivolti in alto rispetto ad una direzione prefissata dell'asse  $c$ .

I riflessi  $h k 0$  hanno intensità molto simili per il poli-alfabutene e per il polibutadiene perché sono poco sensibili alla diversa orientazione del

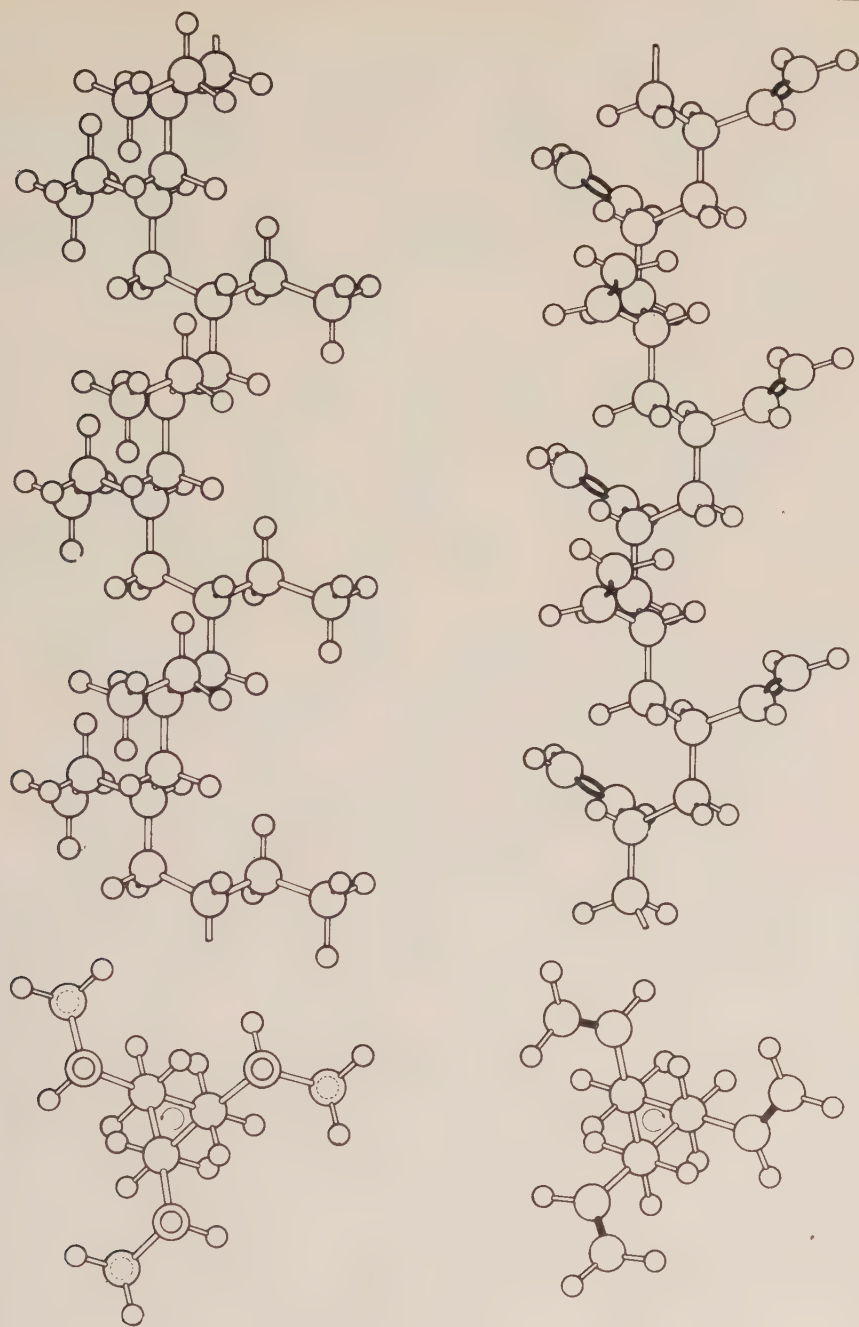


Fig. 4. — Confronto di modelli delle catene del polialfabutene isotattico del polibutadiene 1,2 isotattico e allo stato cristallino.

gruppo laterale; infatti le proiezioni sul piano  $00l$  del contenuto delle due celle elementari sono praticamente identiche (fig. 5).

Benché le proiezioni delle due catene polimeriche su di un piano parallelo all'asse della fibra siano invece alquanto differenti, anche per i riflessi



$h k i l$  non si hanno delle differenze molto forti: sufficientemente sensibili tuttavia per permettere di definire l'orientamento del gruppo vinilico laterale. Per esempio, il riflesso  $3\bar{1}\bar{4}\bar{1}$  del polibutadiene, come è rilevabile anche dagli spettri eseguiti con contatore Geiger (per cui possono essere differenziati coi raggi X in analisi di routine i due prodotti) è molto più intenso del corrispondente riflesso  $3\bar{1}\bar{4}\bar{1}$  del polialfabutene.

In base al principio del massimo allontanamento dei legami semplici ed a considerazioni di accostamento fra le catene polimeriche adiacenti

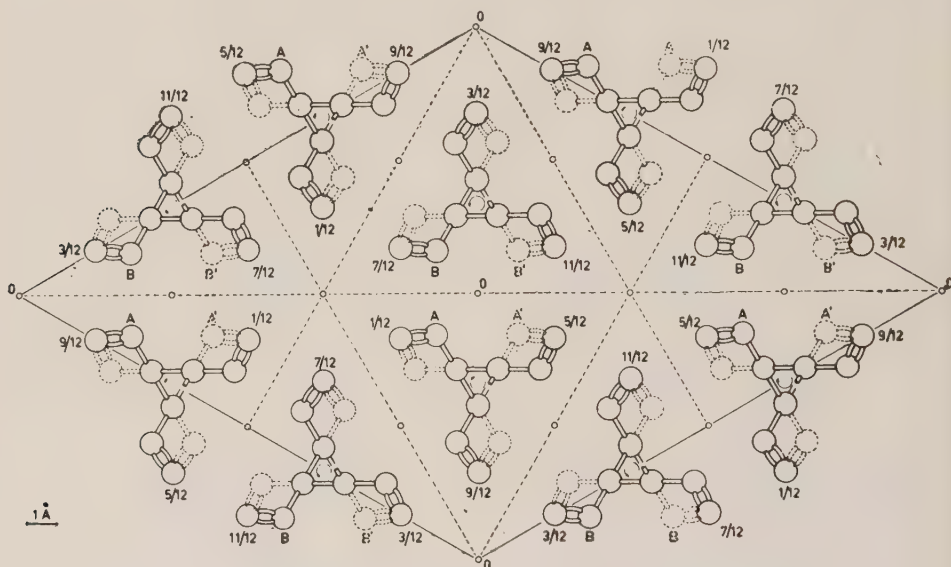


Fig. 5. - Proiezione sul piano (001) del contenuto della cella elementare del polibutadiene isotattico. Attorno ad ogni asse ternario elicogiro possono essere presenti statisticamente molecole anticline tra loro.

onde avere il miglior impacchettamento (distanze tra carboni non legati superiori ai 4 Å), abbiamo dedotto per gli atomi di carbonio di una unità monomerica di polibutadiene 1-2 isotattico le coordinate seguenti:

	$x$	$y$	$z$
catena polimerica	$C_1$ 0,284	0,286	0,833
	$C_2$ 0,284	0,286	0,068
vinile laterale	$C_3$ 0,234	0,189	0,143
	$C_4$ 0,160	0,160	0,250

Esse sono state confermate dai risultati dei calcoli da noi eseguiti riportati nella Tabella I, in cui i valori delle intensità osservate e calcolate per il polibutadiene isotattico sono confrontati con quelli del polialfabutene [4].

TABELLA I.

Confronto fra le intensità calcolate ed osservate del polibutadiene 1-2 isotattico e del polialfabutene per gli strati 0 ed I dello spettro di fibra (le intensità calcolate sono in scala relativa e di esse non sono stati riportati i valori  $< 4$ ;  $B = 8 \text{ \AA}^2$ ).

$h k l$	I. calc.	I. oss.	I. calc. polialfabutene	I. oss. polialfabutene	$h k l$	I. calc.	I. oss.	I. calc. polialfabutene	I. oss. polialfabutene
1 1 $\bar{2}$ 0	1897	ff	1327	ff	2 1 $\bar{3}$ 1	1182	f+	4110	ff
3 0 $\bar{3}$ 0	967	f	1336	ff	3 1 $\bar{4}$ $\bar{1}$	1112	f	162	m
2 2 $\bar{4}$ 0	1604	f+	1620	ff	3 2 $\bar{5}$ 1	178	m	29	md
4 1 $\bar{5}$ 0	—	—	14	ddd	4 2 $\bar{6}$ $\bar{1}$	—	—	52	d
3 3 $\bar{6}$ 0	4	—	4	—	5 1 $\bar{6}$ 1	132	mf	318	f
6 0 $\bar{6}$ 0	186	m	144	mf	4 3 $\bar{7}$ 1	64	d	—	—
5 2 $\bar{7}$ 0	55	dd	76	md	6 1 $\bar{7}$ $\bar{1}$	—	—	—	—
4 4 $\bar{8}$ 0	—	—	—	—	5 3 $\bar{8}$ $\bar{1}$	16	—	12	—
7 1 $\bar{8}$ 0	30	d	68	md	6 2 $\bar{8}$ 1	48	md	86	m
6 3 $\bar{9}$ 0	8	—	—	—	5 4 $\bar{9}$ 1	18	—	—	—
5 5 $\bar{10}$ 0	23	—	34	dd	7 2 $\bar{9}$ $\bar{1}$	11	—	—	—
9 0 $\bar{9}$ 0	20	dd	—	—	8 1 $\bar{9}$ 1	—	—	57	md
8 2 $\bar{10}$ 0	—	—	—	—	6 4 $\bar{10}$ $\bar{1}$	20	d	—	—
7 4 $\bar{11}$ 0	56	d	22	dd	7 3 $\bar{10}$ 1	8	—	—	—
6 6 $\bar{12}$ 0	—	—	9	ddd	6 5 $\bar{11}$ 1	4	—	64	d+
10 1 $\bar{11}$ 0	4	—	—	—	9 1 $\bar{10}$ $\bar{1}$				
9 3 $\bar{12}$ 0	24	d	24	dd	8 3 $\bar{11}$ $\bar{1}$	31	—	—	—
8 5 $\bar{13}$ 0	7	—	7	ddd	9 2 $\bar{11}$ 1	5	—	—	—
12 0 $\bar{12}$ 0	—	—	4	—	7 5 $\bar{12}$ $\bar{1}$	—	—	—	—
11 2 $\bar{13}$ 0	38	d	45	md	8 4 $\bar{12}$ 1	—	—	27	dd
7 7 $\bar{14}$ 0					10 2 $\bar{12}$ $\bar{1}$	—	—	—	—
10 4 $\bar{14}$ 0	4	—	8	ddd	7 6 $\bar{13}$ 1	—	—	—	—
9 6 $\bar{15}$ 0	6	—	—	—	11 1 $\bar{12}$ 1	—	—	22	d
					9 4 $\bar{13}$ $\bar{1}$				

I valori ottenuti ci indicano che sostanzialmente la struttura proposta pel polimero è esatta. Calcoli eseguiti infatti ammettendo che il vinile laterale fosse disposto in maniera diversa da quella da noi postulata ci hanno portato a delle incongruenze molto appariscenti con i dati sperimentali. La struttura della catena polimerica è da ritenersi perciò completamente descritta e giustificata; per quanto concerne invece la struttura completa del polimero, le coordinate degli atomi sono probabilmente suscettibili di un ulteriore affinamento, che intendiamo effettuare non appena ci sarà possibile ottenere dati sperimentali adatti ad uno studio della struttura mediante il metodo diretto delle sintesi Fourier. L'applicazione di tali metodi ci ha consentito infatti, nel caso del polialfabutene, pur lasciando invariata la sistemazione relativa e la forma delle macromolecole, di migliorare notevolmente l'accordo tra intensità calcolate e sperimentali attraverso leggeri spostamenti degli atomi, suggeriti dalle posizioni dei massimi Fourier nella corrispondente proiezione della densità elettronica sul piano  $a-b$ . Una struttura analoga a quella del polibutadiene e del polialfabutene presenta anche il polivinilmetilene, preparato secondo il metodo di Schildkecht e coll. in accordo con nostri precedenti studi sull'argomento [5].

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. NATTA, L. PORRI, G. MAZZANTI, Brev. it. 536631; G. NATTA, L. PORRI, Brev. it. 538453; G. NATTA, L. PORRI, A. PALVARINI, Brev. it., 563507; G. NATTA, L. PORRI, P. CORRADINI, Brev. it. 566940.
- [2] G. NATTA, P. CORRADINI, « J. Pol. Science », 20, 251 (1956); G. NATTA, P. CORRADINI, « Ang. Chem. », 68, 615 (1956).
- [3] G. NATTA, L. PORRI, P. CORRADINI, D. MORERO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XX, fasc. 5, p. 560 (1956).
- [4] G. NATTA, P. CORRADINI, I. W. BASSI, « Makr. Chem. », 21, 240 (1956).
- [5] G. NATTA, I. W. BASSI, P. CORRADINI, « Makr. Chem. », 18/19, 455 (1955).

#### NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi matematica.** — *Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico* (\*). Nota I di CARLO PUCCI, presentata (\*\*) dal Socio M. PICONE.

Una funzione armonica, se non è costante, non ha punti di massimo o di minimo interni al suo campo di definizione. Proprietà analoghe sono state provate per una più ampia classe di soluzioni di equazioni a derivate par-

(\*) Questa ricerca fu in parte finanziata dalla United States Air Force col contratto AF 18 (600) 573 - consigliato dallo Office of Scientific Research, Air Research and Development Command.

Lavoro eseguito nell'Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics della Università del Maryland. La bibliografia figurerà in fine alla Nota II.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

ziali del secondo ordine di tipo ellittico o parabolico. Indicato con  $T$  un insieme aperto limitato dello spazio euclideo  $R^m$ , con  $u$  una funzione di classe  $C^{(2)}$  in  $T$  e continua in  $\bar{T}$  ( $= T + \mathfrak{F}T$ ), consideriamo l'operatore differenziale

$$M(u) = \sum a_{ij} u_{ij} + \sum b_i u_i,$$

ove i coefficienti  $a_{ij}$ ,  $b_i$ , sono continui in  $\bar{T}$  e

$$\sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j \geq 0, \quad \text{in } T.$$

Se  $M(u) \leq 0$ ,  $a_{11} > 0$  in  $T$  la funzione  $u$  assume il suo valore minimo sulla frontiera di  $T$ . Su questo teorema vi è un'ampia letteratura. In forma generale esso è stato provato da E. Hopf [3] <sup>(1)</sup> nel caso ellittico (la forma quadratica  $\sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j$  è supposta definita positiva) e da M. Picone [8] per equazioni di tipo parabolico <sup>(2)</sup>. Inoltre Hopf ha provato nel caso ellittico che se  $M(u) \leq 0$  in  $T$  ed  $u$  assume il suo valore minimo in un punto di  $T$ ,  $u$  è costante. Un teorema analogo per le equazioni di tipo parabolico è stato provato da L. Nirenberg [7] e cioè che se  $M(u) \leq 0$  in  $T$  e se  $u$  assume il suo valore minimo in un punto di  $T$ ,  $u$  è costante in un particolare sottoinsieme di  $T$ .

G. Giraud in [2] e E. Hopf in [4] hanno investigato il comportamento delle soluzioni di una equazione di tipo ellittico nei punti di massimo e di minimo sulla frontiera. Essi hanno provato che se  $M(u) \leq 0$  in  $T$  ( $T$  è una ipersfera) e  $x^0$  è un punto della frontiera dove  $u$  assume il suo valore minimo, ed  $u$  non è costante, allora il limite inferiore del rapporto incrementale di  $u$  in  $x^0$  secondo la normale interna è positivo <sup>(3)</sup>.

Un teorema sostanzialmente analogo per le equazioni di tipo parabolico è stato dato da L. Nirenberg <sup>(4)</sup>. Nirenberg considera una funzione  $u$  di classe  $C^{(2)}$  in un insieme aperto  $T$  del piano  $x, t$  ed ivi tale che  $A u_{xx} + B u_{tt} + a u_x + b u_t \geq 0$ , con  $A, B, a, b$  continui in  $T$ ,  $A > 0$ ,  $B \geq 0$ . In tali ipotesi prova che se un cerchio chiuso  $C$  contenuto in  $T$  non possiede nel proprio interno punti di massimo per  $u$  ed un punto di massimo per  $u$  in  $T$  si trova sulla frontiera di  $C$ , allora l'ascissa di tale punto è uguale all'ascissa del centro del cerchio. Su questo teorema è basata la dimostrazione del risultato precedentemente indicato di Nirenberg.

In questa Memoria si studia dapprima il comportamento di una soluzione di una equazione di tipo ellittico-parabolico in un intorno di un punto di minimo o di massimo sulla frontiera provando un teorema nel quale rientra come caso particolare il teorema di Hopf in [4] e dal quale discende come immediato corollario il teorema di Nirenberg indicato in <sup>(4)</sup>. Le ipotesi qua-

(1) Alcune estensioni sono state date da M. PICONE [9] pp. 694-701. Un altro simile teorema è stato dato in [10].

(2) Nel caso parabolico M. PICONE ha provato pure che il massimo e il minimo devono essere assunti su particolari sottoinsiemi della frontiera.

(3) Teoremi simili a questo sono stati stabiliti da A. HUBER [5], D. GILBARG e M. SHIFFMAN [1], J. SERRIN [11] in relazione allo studio di correnti subsoniche.

(4) Lemma p. 168 [7].



considerate sono più generali anche per quanto riguarda i coefficienti che possono non essere limitati in  $T$ ; pertanto sono inclusi nella trattazione anche alcuni noti problemi di Cauchy singolari per equazioni di tipo ellittico. Le ipotesi del teorema sono separatamente discusse e ne è provato il loro carattere essenziale con vari esempi.

Con l'ausilio di tale teorema si prova il principio di massimo e minimo per le soluzioni di equazioni di tipo ellittico sotto ipotesi più generali di quelle considerate da Hopf. Infatti è ammessa l'esistenza, all'interno di  $T$ , di ipersuperfici di classe  $C^{(2)}$  sulle quali la equazione può diventare di tipo parabolico oppure su di esse le derivate seconde della soluzione possono non esistere e le derivate prime essere discontinue. Inoltre in un intorno di tali ipersuperfici i coefficienti  $b_i$  e  $c$  possono non essere limitati. Le ipotesi del teorema sono discusse provandone il loro carattere essenziale.

Nei due teoremi precedenti l'operatore differenziale considerato è  $M(u) + cu$  con  $c \leq 0$ . Si enunciano infine alcuni immediati corollari nella ipotesi  $c \equiv 0$ .

Osserviamo che con l'ausilio dello stesso teorema I si può facilmente dimostrare, seguendo sostanzialmente lo stesso procedimento di Nirenberg in [7] ma sotto ipotesi più generali, le analoghe proprietà di massimo e minimo per le soluzioni di equazioni di tipo parabolico.

I risultati sono estesi al caso di equazioni non lineari in un lavoro in corso di redazione.

# I. - MASSIMI E MINIMI SULLA FRONTIERA.

Indichiamo con  $S$  una ipersfera aperta di  $R^m$  con centro nel punto  $\eta$  e raggio  $r_0$ . Siano  $c, b_i, a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, m$ ) funzioni reali in  $S$ ; indicata con  $u$  una funzione reale di classe  $C^{(2)}$  in  $S$  poniamo

$$(I) \quad L(u) = \sum a_{ij} u_{ij} + \sum b_i u_i + cu, \quad \left( u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

Diciamo che i coefficienti  $a_{ij}$  soddisfano alla condizione (A) in un punto  $x^0$  della frontiera di  $S$  se

$$(A) \quad \lim'_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \in S}} \sum a_{ij}(x) (x_i - \eta_i) (x_j - \eta_j) > 0^{(5)}.$$

Diciamo che i coefficienti  $b_i$  e  $c$  soddisfano rispettivamente alle condizioni (B) e (C) in un punto  $x^0$  della frontiera di  $S$  se esiste una funzione po-

(5) Il simbolo  $\lim'$  indica limite inferiore e il simbolo  $\lim''$  indica limite superiore. Osserviamo che la condizione (A) è certamente soddisfatta se l'operatore  $L$  è fortemente ellittico in un intorno di  $x^0$ ; essa però può essere soddisfatta anche da operatori parabolici. Supposta la continuità dei coefficienti  $a_{ij}$  in  $x^0$  tale condizione significa che il vettore  $\eta$   $x^0$  non deve essere ortogonale a direzioni caratteristiche dell'operatore  $L$  in  $x^0$ .

sitiva  $B(\tau)$ , continua decrescente per  $0 < \tau < r_0$ , sommabile in  $(0, r_0)$  tale che, posto  $\tau = r_0 - x\eta$ ,

$$(B) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \in S}}'' \frac{b_i(x)}{B(\tau)} \frac{x_i - \eta_i}{x^0 \eta} < 1,$$

$$(C) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \in S}}' \frac{c(x)\tau}{B(\tau)} > -1^{(6)}.$$

Ciò posto stabiliamo il seguente teorema, estensione del già indicato risultato di Hopf in [4].

I. Sia  $u$  una funzione reale di classe  $C^{(2)}$  in  $S$ , continua in  $\bar{S}$ ; le funzioni  $a_{ij}$  siano limitate in  $S$  e sia

$$(2) \quad c \leq 0, \quad \Sigma a_{ij} \lambda_i \lambda_j \geq 0, \quad L(u) \leq 0, \quad x \in S.$$

Sia  $x^0$  un punto della frontiera di  $S$  e risulti  $u(x) > u(x^0)$  in  $S$  e  $u(x^0) \leq 0$ . Sia  $\lambda$  un segmento privato dei punti terminali, uno dei quali è  $x^0$ , e sia  $\lambda \subset S$ . Se  $a_{ij}, b_i, c$  soddisfano rispettivamente alle condizioni (A), (B), (C) in  $x^0$  si ha

$$(3) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \in \lambda}}' \frac{u(x) - u(x^0)}{x x^0} > 0^{(7)}.$$

Senza alterare la generalità della dimostrazione possiamo supporre  $u(x) > u(x^0)$  in  $\bar{S} - x^0$ . In caso contrario si può sostituire ad  $S$  un'altra ipersfera  $S'$  contenuta in  $S$  e ad essa tangente in  $x^0$ , per la quale tale condizione è soddisfatta. Le ipotesi del teorema, valide in  $S$ , sono verificate in  $S'$ , in particolare le condizioni (B) e (C) sono soddisfatte avendo supposto la decrescenza delle funzioni  $B(\tau)$  e risultando la distanza  $\tau$  di un punto  $x$  di  $S'$  dalla frontiera di  $S'$  minore o uguale della distanza di  $x$  dalla frontiera di  $S$ . Possiamo inoltre supporre che la funzione  $B(\tau)$  sia la stessa nella condizione (B) e (C) ed inoltre che  $B(\tau)$  sia divergente a  $+\infty$  per  $\tau \rightarrow 0$ .

Indichiamo con  $r$  la distanza di  $x$  da  $\eta$  e quindi  $\tau = r_0 - r$ . La dimostrazione è basata sull'impiego della seguente funzione ausiliaria:

$$(4) \quad h(x) = \int_0^\tau (\tau - t) B(t) dt + \frac{\alpha}{3m} \tau, \quad 0 \leq \tau \leq r_0,$$

ove  $\alpha$  è una costante positiva opportuna. Indichiamo con  $\delta$  e  $\sigma$  due costanti positive ( $\delta < r_0$ ) e con  $E_{\delta, \sigma}$  l'insieme dei punti  $x$  di  $S$  che distano dalla frontiera meno di  $\delta$  e tali che l'asse  $\eta x$  formi con l'asse  $\eta x^0$  un angolo minore di  $\sigma$ .

(6) Tali condizioni sono certamente soddisfatte se i coefficienti  $b_i$  e  $c$  sono limitati in un intorno di  $x^0$ . In caso contrario costituisce una limitazione del tipo di singolarità ammesse per tali coefficienti.

(7) Si può ottenere l'analogo teorema relativo ad un massimo alla frontiera sostituendo nell'enunciato ad  $u$  la funzione  $-v$ ; in tale caso si ha un massimo per  $v$ .

Vogliamo provare che per una scelta conveniente di  $\alpha, \delta, \sigma$  si ha

$$(5) \quad L(h) > 0, \quad x \in E_{\delta, \sigma}.$$

La funzione  $h$  è di classe  $C^{(2)}$  in  $S - \eta$  essendo due volte derivabile rispetto ad  $r$  per  $0 < r < r_0$ . Si ha

$$\begin{aligned} h_i(x) &= -\frac{x_i - \eta_i}{r} \int_0^\tau B(t) dt - \frac{\alpha}{3m} \frac{x_i - \eta_i}{r}, \\ h_{ij}(x) &= \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)}{r^3} \int_0^\tau B(t) dt - \frac{\delta_{ij}}{r} \int_0^\tau B(t) dt + \\ &+ \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)}{r^2} B(\tau) + \frac{\alpha}{3m} \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)}{r^3} - \frac{\alpha}{3m} \frac{\delta_{ij}}{r}, \end{aligned}$$

ove  $\delta_{ij}$  è il simbolo di Kronecker. Posto

$$\varepsilon(\tau) = \int_0^\tau B(t) dt,$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\alpha}{3m} + \varepsilon(\tau) \right] \left[ \sum a_{ij}(x) \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)}{r^2} - \sum a_{ii}(x) \right],$$

si ha in  $S - \eta$

$$\begin{aligned} (6) \quad L(h) &= B(\tau) \sum a_{ij}(x) \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)}{r^2} + \varphi(x) - \\ &- \left[ \frac{\alpha}{3m} + \varepsilon(\tau) \right] \sum b_i(x) \frac{x_i - \eta_i}{r} + c(x) h(x). \end{aligned}$$

Essendo soddisfatte le condizioni (A), (B) e (C) esistono tre costanti positive  $\alpha, \delta$  e  $\sigma$  tali che

$$\sum a_{ij}(x) \frac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)}{r^2} > \alpha, \quad x \in E_{\delta, \sigma},$$

$$\sum b_i(x) \frac{x_i - \eta_i}{r} < m B(\tau), \quad c(x) h(x) > -B(\tau) \left[ \frac{\alpha}{3m} + \varepsilon(\tau) \right], \quad x \in E_{\delta, \sigma}.$$

Si ha pertanto

$$L(h) > \frac{\alpha}{3m} B(\tau) - (m+1) B(\tau) \varepsilon(\tau) + \varphi(x), \quad x \in E_{\delta, \sigma}.$$

La funzione  $\varphi$  si mantiene limitata in  $E_{\delta, \sigma}$  e  $\varepsilon(\tau) \rightarrow 0$  per  $\tau \rightarrow 0$ ; pertanto per  $\delta$  sufficientemente piccolo sussiste la (5).

La funzione  $h$  è uguale a zero sulla frontiera di  $S$ , è limitata su  $\bar{S} E_{\delta, \sigma}$  (frontiera di  $E_{\delta, \sigma}$ ); avendo supposto  $u(x) > u(x^0)$  in  $\bar{S} - x^0$  esiste una costante positiva  $\mu$  tale che

$$(7) \quad v(x) = u(x) - u(x^0) - \mu h(x) \geq 0, \quad x \in \bar{S} E_{\delta, \sigma}.$$

Essendo  $L(u) \leq 0$ ,  $u(x^0) \leq 0$ ,  $c \leq 0$  si ha

$$L[u(x) - u(x^0)] \leq -c u(x^0) \leq 0, \quad x \in E_{\delta, \sigma},$$

e per la (5)

$$(8) \quad L(v) < 0, \quad x \in E_{\delta, \sigma}.$$

Dalle (2), (7), (8) segue da un noto teorema elementare <sup>(8)</sup>

$$v \geq 0, \quad x \in E_{\delta, \sigma},$$

ed essendo  $v(x^0) = 0$  si ha

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \in \lambda}} \frac{v(x) - v(x^0)}{xx^0} \geq 0,$$

cioè

$$(9) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \in \lambda}} \frac{u(x) - u(x^0)}{xx^0} \geq \mu \lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \in \lambda}} \frac{h(x) - h(x^0)}{xx^0}.$$

La funzione  $h$  è di classe  $C'$  in  $\bar{S} - \eta$ , nulla su  $\mathbb{S}$  e la sua derivata in  $x^0$  secondo la normale interna è positiva (è uguale ad  $\alpha/3m$ ); pertanto il secondo membro della disuguaglianza (9) è positivo e dalla (9) segue la (3).

**Analisi matematica.** — *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi di equazioni differenziali nel campo analitico.* Nota <sup>(\*)</sup> di VOLFANGO GRÖBNER, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio M. PICONE.

In questa Nota espongo un metodo per rappresentare generalmente le soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali mediante un nuovo tipo di serie, chiamate *serie di Lie*, essendo esse state indicate la prima volta da *Sophus Lie*. Il metodo seguito dà inoltre un teorema di esistenza per le soluzioni, indipendente dai teoremi noti, fondato sulla costruzione effettiva delle soluzioni.

Consideriamo un operatore differenziale lineare

$$(1) \quad D = \vartheta_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + \vartheta_2(z) \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + \vartheta_n(z) \frac{\partial}{\partial z_n}$$

in cui le  $\vartheta_i(z)$  significano funzioni delle variabili complesse  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , olomorfe in qualche dominio limitato  $\mathfrak{D}$ , dello spazio delle variabili  $z_i$ . Allora se  $F(z)$  è una funzione olomorfa in  $\mathfrak{D}$ , del resto arbitraria, converge assolutamente e uniformemente la serie

$$(2) \quad G(z; t) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v F(z) = F(z) + \frac{t}{1!} DF(z) + \frac{t^2}{2!} D^2 F(z) + \dots$$

(8) Cfr. ad esempio C. MIRANDA [6] p. 8.

(\*) Tratta da una conferenza tenuta dal prof. Gröbner il 5 dicembre 1957, all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.



per  $\{z_i\}$  in  $\mathfrak{D}$  e per  $|t| \leq T$ , essendo  $T$  un numero positivo <sup>(1)</sup>, e quindi rappresenta ivi una funzione  $G(z; t)$  olomorfa delle variabili complesse  $z_1, \dots, z_n, t$ .

Serie del tipo (2) si trovano nelle opere di Sophus Lie <sup>(2)</sup>. Tali serie godono di proprietà molto notevoli, finora non osservate, di cui una parte deriva dalle identità seguenti, facilmente verificabili <sup>(3)</sup>

$$(3) \quad \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v F_1(z) + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v F_2(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v [F_1(z) + F_2(z)],$$

$$(4) \quad \left[ \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v F_1(z) \right] \left[ \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v F_2(z) \right] = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v [F_1(z) F_2(z)].$$

Se introduciamo ora, ponendo, nelle serie (2),  $F(z) = z_i$ , le funzioni  $Z_i$ :

$$(5) \quad Z_i = \varphi_i(z; t) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

si dimostra facilmente il teorema: Se  $F(z)$  rappresenta una qualunque funzione olomorfa in  $\mathfrak{D}$ , introdotte le funzioni (5), e per valori complessi di  $t$  abbastanza piccoli, affinché anche la  $F(Z)$  rimanga olomorfa, vale la seguente relazione

$$(6) \quad F(Z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v F(z),$$

risultano cioè permutabili i simboli  $F$  e  $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v$ .

Infatti dalle (3) e (4) il teorema segue immediatamente per polinomi  $F(z)$ ; basta allora stabilire il fatto che la (6) resta valida quando si introduce una funzione olomorfa  $F(z)$  come limite di polinomi <sup>(4)</sup>.

Derivando le (5) rispetto alla variabile  $t$ , notando che  $Dz_i = \vartheta_i(z)$  e tenendo conto della (6), si ricavano le formole importanti:

$$(7) \quad \frac{dZ_i}{dt} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v (Dz_i) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v \vartheta_i(z) = \vartheta_i(Z), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Invertendo il ragionamento risulta dimostrato il *teorema fondamentale*:  
*Le soluzioni del sistema di equazioni differenziali*

$$(8) \quad \frac{dZ_i}{dt} = \vartheta_i(Z), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(1) Una dimostrazione dettagliata di questo teorema, mediante il metodo delle funzioni maggioranti di Cauchy, ho dato in un lavoro in corso di pubblicazione nello « Archiv der Mathematik »: *Darstellung der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen durch Lie'sche Reihen*. Ivi si riesce anche a valutare il numero  $T$  che dipende, evidentemente, dalle funzioni  $\vartheta_i(z)$ ,  $F(z)$  e dal dominio  $\mathfrak{D}$ .

(2) Si veda per esempio: S. LIE, *Theorie der Transformationsgruppen* I, Leipzig 1888, p. 51 sgg.

(3) Si veda la mia Nota sopracitata.

(4) Per la dimostrazione dettagliata si veda la mia Nota sopracitata.

soddisfacenti alle condizioni iniziali

$$(9) \quad (Z_i)_{t=0} = z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

supposte le  $\vartheta_i(Z)$  funzioni olomorfe nell'intorno del punto iniziale  $\{z_i\}$ , sono rappresentate dalle serie di Lie

$$(5) \quad Z_i = \varphi_i(z; t) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v z_i = z_i + t \vartheta_i(z) + \frac{t^2}{2!} D \vartheta_i(z) + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

formate con l'operatore  $D$  aggiunto al sistema (8), cioè contenendo le stesse funzioni  $\vartheta_i(z)$  che figurano nel secondo membro delle (8) (cambiate le variabili  $Z_i$  con le  $z_i$ ).

Una qualsiasi funzione olomorfa  $F(Z)$  delle soluzioni  $Z_i$  è essa pure rappresentata mediante una serie di Lie (6).

Le funzioni (5) soddisfano inoltre, supposti  $t_1, t_2$  e  $t_1 + t_2$  interni al cerchio di convergenza delle (5), alle seguenti identità <sup>(5)</sup>

$$(10) \quad \varphi_i(\varphi(z; t_1); t_2) = \varphi_i(z; t_1 + t_2), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Nei punti  $t_1 + t_2$  all'esterno del cerchio di convergenza le (10) valgono per il prolungamento analitico delle funzioni (5), le quali quindi possono essere prolungate nel piano complesso della variabile  $t$  finché rimangono regolari le funzioni  $\vartheta_i(z)$ , però, in generale, non sono uniformi.

Il teorema sopra enunciato può essere trasportato ai sistemi di equazioni alle derivate parziali nel modo seguente: Sia dato un sistema di equazioni a derivate parziali

$$(11) \quad \frac{\partial Z_i}{\partial t_k} = \vartheta_{ik}(Z), \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, m \end{array}$$

in cui le funzioni  $\vartheta_{ik}(Z)$  siano funzioni olomorfe delle variabili complesse  $Z_1, \dots, Z_n$ , nell'intorno del punto  $\{z_1, \dots, z_n\}$ , che soddisfano alle condizioni di integrabilità

$$(12) \quad \sum_{j=1}^n \vartheta_{jl}(Z) \frac{\partial \vartheta_{ik}(Z)}{\partial Z_j} = \sum_{j=1}^n \vartheta_{jk}(Z) \frac{\partial \vartheta_{il}(Z)}{\partial Z_j}, \quad k, l = 1, 2, \dots, m.$$

Allora le soluzioni del sistema (11), soddisfacenti alle condizioni iniziali

$$(13) \quad (Z_i)_{t_1=\dots=t_m=0} = z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

sono rappresentate dalle serie di Lie

$$(14) \quad \begin{aligned} Z_i &= \varphi_i(z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_m) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(t_1 D_1 + \dots + t_m D_m)^v}{v!} z_i = \\ &= \sum_{v_1=0}^{\infty} \dots \sum_{v_m=0}^{\infty} \frac{t_1^{v_1} \dots t_m^{v_m}}{v_1! \dots v_m!} D_1^{v_1} \dots D_m^{v_m} z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

(5) Per la dimostrazione si veda la mia Nota sopracitata.

formate con i seguenti operatori differenziali, permutabili fra di loro,

$$(15) \quad D_k = \vartheta_{1k}(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + \vartheta_{2k}(z) \frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + \vartheta_{nk}(z) \frac{\partial}{\partial z_n} \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Invero, calcolando il prodotto jacobiano di due operatori  $D_k, D_l$  si ricava, tenendo conto delle (12),

$$[D_k D_l] = D_k D_l - D_l D_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \vartheta_{jk} \frac{\partial \vartheta_{il}}{\partial z_j} - \vartheta_{jl} \frac{\partial \vartheta_{ik}}{\partial z_j} \right) \frac{\partial}{\partial z_i} = 0,$$

cioè

$$(16) \quad D_k D_l = D_l D_k, \quad k, l = 1, 2, \dots, m.$$

Le serie (14) le quali, vista la permutabilità degli operatori  $D$ , possono essere scritte anche nella maniera indicata come serie multiple, sono assolutamente e uniformemente convergenti entro certi limiti  $|t_i| < T_i$  ( $T_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ), e quindi determinano funzioni olomorfe  $\varphi_i(z; t)$  delle variabili complesse  $z_1, \dots, z_n; t_1, \dots, t_m$ , le quali, evidentemente, soddisfano alle condizioni (13). Derivando le (14) rispetto a  $t_k$ , e tenendo conto della (6), si ricavano, analogamente alle (7), le relazioni

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial Z_i}{\partial t_k} &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(t_1 D_1 + \cdots + t_m D_m)^v}{v!} D_k Z_i = \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(t_1 D_1 + \cdots + t_m D_m)^v}{v!} \vartheta_{ik}(z) = \vartheta_{ik}(Z), \end{aligned} \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, n \\ k &= 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

cioè le funzioni (14) soddisfano anche alle equazioni differenziali (11). Ma la (17) si può anche scrivere così

$$(18) \quad \frac{\partial Z_i}{\partial t_k} = D_k \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(t_1 D_1 + \cdots + t_m D_m)^v}{v!} Z_i = D_k Z_i,$$

da cui deriva il teorema: *Le funzioni (14) sono soluzioni delle m equazioni lineari alle derivate parziali*

$$(19) \quad \frac{\partial Z}{\partial t} - \vartheta_{1k}(z) \frac{\partial Z}{\partial z_1} - \cdots - \vartheta_{nk}(z) \frac{\partial Z}{\partial z_n} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Inversamente: *Date m equazioni lineari alle derivate parziali (19), i cui coefficienti  $\vartheta_{ik}(z)$  siano funzioni olomorfe delle variabili complesse  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , soddisfacenti alle condizioni (12); allora gli operatori  $D_k$ , definiti dalle (15), sono permutabili fra loro, e le serie di Lie (14), formate con tali operatori, convergono assolutamente e uniformemente in qualche dominio limitato delle variabili complesse  $z_1, \dots, z_n, t_1, \dots, t_m$ , e definiscono n funzioni olomorfe delle variabili stesse che sono soluzioni analiticamente indipendenti delle (19).*

L'indipendenza analitica vuol dire che non esiste alcuna relazione

$$(20) \quad G(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = 0$$

nella quale  $G$  significa una funzione olomorfa, esprimibile mediante una serie regolare di potenze con coefficienti indipendenti dalle variabili  $z_1, \dots, z_n, t_1, \dots, t_m$ . Difatti, per  $t_1 = t_2 = \dots = t_m = 0$ , la (20), tenendo conto delle (13), diventerebbe.

$$G(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

cioè una relazione assurda vista la indipendenza delle variabili  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .

In una Nota successiva mi propongo di illustrare l'efficacia del metodo qui esposto costruendo le soluzioni generali del problema degli  $n$  corpi le quali, fino ad ora, con altri metodi, non sono state costruite.

**Analisi matematica.** — *Sulla decomposizione dei sistemi differenziali.* Nota di MENDEL HAIMOVICI, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

Dato un sistema differenziale esterno, è talvolta possibile di scomporlo in due parti,  $S^{(1)}$  ed  $S^{(2)}$ , in modo che l'integrale generale di  $S$  possa essere trovato integrando prima  $S^{(1)}$  e poi, su un'integrale generico di questo,  $S^{(2)}$ . In tal modo si ottiene una semplificazione del problema dell'integrazione, in quanto i due sistemi che si debbono così integrare presentano difficoltà minori di quelle di  $S$ .

Noi presentiamo in questa Nota qualche proprietà delle decomposizioni di un sistema  $S$ . In altre Note, che seguiranno, ne dedurremo alcuni teoremi generali di cui faremo applicazioni a certi sistemi differenziali di tipo speciale.

## § I. — ALCUNE OSSERVAZIONI INTORNO AI SISTEMI DIFFERENZIALI. DECOMPOSIZIONE DI TALI SISTEMI. CARATTERI DEI COMPONENTI.

I. Sia  $S$  un sistema differenziale chiuso <sup>(1)</sup>, di genere  $p$ , e

$$s_0, s_1, \dots, s_p$$

i suoi caratteri; abbiamo

$$s_0 + s_1 + \dots + s_p + p = n,$$

dove  $n$  è il numero delle variabili di  $S$  (ved. il successivo n. 2). Noi supponiamo che i coefficienti nelle equazioni di  $S$  siano analitici, regolari, in un dominio  $D$  delle variabili, cosicché valgano in questo dominio i teoremi di esistenza e di unicità del Cartan.

(\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

(1) E. CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs*. Paris, Hermann, p. 50 (1945); E. KÄHLER, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*, Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, p. 34 (1934); J. A. SCHOUTEN and W. v. D. KULK, *Pfaff's Problem and its generalizations*, Oxford, Clarendon, p. 349 (1949).



2. Osserviamo che i caratteri introdotti dal Cartan, per i sistemi differenziali chiusi, possono essere definiti nello stesso modo per un sistema di equazioni algebriche esterne <sup>(2)</sup>. Dato un tale sistema  $C$ , ed un elemento piano  $E_k$  generico che lo verifichi, sia

$$t_0 + t_1 + \dots + t_k$$

il rango del sistema lineare cui deve soddisfare un elemento lineare  $E_r$  per essere associato ad  $E_k$ , cioè per formare con esso un  $E_{k+r}$  soluzione di  $C$ . Gli interi  $t_0, t_1, \dots$ , che si ottengono per una catena di elementi piani generici

$$E_0 \subset E_1 \subset \dots$$

soluzioni di  $C$ , sono i caratteri del sistema algebrico esterno.

Se esistono in quella catena elementi piani  $p$ -dimensionali  $E_p$ , e non esiste per un tale  $E_p$  generico un  $E_{p+1}$  soluzione, allora  $p$  è il genere del sistema ed abbiamo

$$t_0 + t_1 + \dots + t_p + p = m,$$

$m$  essendo il numero degli argomenti di  $C$  non sottoposti ad altre condizioni.

Se si tratta di un sistema differenziale chiuso, allora siamo nel caso del Cartan ed i caratteri  $t$ , presi in un punto generico, coincidono coi caratteri  $s$ . Ma possiamo avere un sistema differenziale non chiuso, anzi un sistema differenziale di cui i coefficienti dipendono, oltre che dalle variabili del sistema, da un certo numero di parametri. In questi casi, s'intende che considereremo i caratteri in un punto generico e per generici valori dei parametri.

3. Supponiamo ora di aver separato dal sistema  $S$  un sottosistema  $S^{(1)}$  chiuso, di genere  $r$  e di caratteri

$$\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r,$$

sicché

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_r + r = n.$$

Chiamiamo  $S^{(2)}$  il sistema delle equazioni di  $S$  che rimangono, in modo che nessuna equazione di  $S^{(2)}$  abbia il primo membro contenuto nell'ideale  $\mathfrak{J}^{(1)}$  definito da  $S^{(1)}$  <sup>(3)</sup>. Se  $S^{(2)}$  non è un sistema chiuso, allora la sua chiusura contiene equazioni i primi membri delle quali sono contenuti nell'ideale  $\mathfrak{J}$  definito da  $S$ .

4. Sia  $\mathcal{V}_r$  una varietà integrale regolare generica di  $S^{(1)}$ . Su questa varietà, il sistema  $S$  (o  $S^{(2)}$ ) diventa un sistema che denotiamo con  $S^{(2)'}$ , in  $r$  variabili. Questo sistema è chiuso, perché la sua chiusura è evidentemente contenuta in  $S$ , dunque in  $S^{(2)'}$ .

(2) WL. ŚLEBODZIŃSKI, *Formes extérieures et leurs applications*, I, Warszawa, p. 51 (1954).

(3) B. SEGREGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, vol. I. Roma, Docet, p. 89 (1951).

5. Per trovare i caratteri di  $S^{(2)'}$ , non è necessario – secondo quanto qui mostreremo – integrare effettivamente il sistema  $S^{(1)}$ .

Supponiamo che, su di un'elemento piano integrale regolare generico  $E_r$  di  $S^{(1)}$ , rimangano indipendenti le forme di Pfaff

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r.$$

Chiamando

$$\theta_{r+1}, \dots, \theta_n$$

un sistema comunque scelto di forme di Pfaff indipendenti fra loro e dalle  $\omega$ , le equazioni dell'elemento piano  $E_r$  possono scriversi nella forma

$$(1.1) \quad \theta_\alpha = l_{\alpha 1} \omega_1 + l_{\alpha 2} \omega_2 + \dots + l_{\alpha r} \omega_r,$$

dove i coefficienti  $l_{\alpha 1}, \dots$  verificano un sistema di relazioni algebriche <sup>(4)</sup>, che denotiamo con (A). Un sistema generico di valori dei parametri  $l$ , verificanti (A) in un punto  $P$  regolare generico per  $S$ , definisce un elemento piano integrale regolare  $E_r$  di  $S^{(1)}$ . Dato un  $E_r$  integrale regolare, definito da un sistema di valori degli  $l$ , esiste un intorno di questo sistema, in cui i valori di  $l$  (verificanti (A)) definiscono un  $E_r$  integrale regolare.

Sostituendo (1.1) in  $S^{(2)}$  troviamo un sistema di equazioni esterne  $S^{(2)'}$  in  $\omega_1, \dots, \omega_r$ , a coefficienti funzioni degli  $l$ . Considerando  $S^{(2)'}$  in un punto generico di  $S$  e per un generico sistema di valori degli  $l$ , soluzione di (A), siano  $\tau_0, \dots, \tau_q$  i suoi caratteri e  $\rho$  il genere. Questi sono rispettivamente uguali ai caratteri ed al genere del sistema  $S^{(2)'}$ , perché un sistema generico di valori degli  $l$  (verificanti (A)) può essere trovato partendo da una varietà integrale regolare di  $S^{(1)}$ . Abbiamo dunque:

$$\tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_q + \rho = r.$$

## § 2. DECOMPOSIZIONI REGOLARI DEL SISTEMA S. CRITERI PER LA REGOLARITÀ DI UNA DECOMPOSIZIONE.

6. Supponiamo ora che la decomposizione descritta nel § 1 abbia inoltre le seguenti proprietà:

a) una varietà integrale regolare  $\mathfrak{N}_\beta$  ( $\beta \leq \rho$ ) generica del sistema  $S$  sia sempre contenuta in una varietà regolare  $\mathfrak{N}_r$  del sistema  $S^{(1)}$ ;

b) questa  $\mathfrak{N}_\beta$  sia regolare per il sistema  $S^{(2)'}$  su  $\mathfrak{N}_r$ .

In questo caso, diciamo che la decomposizione è *regolare per varietà integrali  $\beta$ -dimensionali*. Se  $\beta = \rho = p$ , la chiamiamo una *decomposizione regolare completa*.

Con una decomposizione regolare, l'operazione di trovare gli integrali regolari  $\beta$ -dimensionali del sistema  $S$  si riduce all'integrazione successiva

(4) E. CARTAN, loc. cit., p. 88; E. KÄHLER, loc. cit., p. 40; E. CARTAN, *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, « Ann. de l'Ec. Norm. Sup. », T. 21, pp. 153-206; *Oeuvres Complètes*, Partie II, vol. 2, pp. 571-625.

dei sistemi  $S^{(1)}$  ed  $S^{(2)'}$ , rispettivamente di genere  $r$  e  $\rho$ . È particolarmente importante il problema di trovare le decomposizioni regolari complete, perché esse ci portano all'integrale generale  $p$ -dimensionale di  $S$  mediante l'integrazione di due sistemi più semplici.

Chiamiamo *essenziale* l'ultimo carattere diverso da zero di un sistema. Il *genere vero* <sup>(5)</sup> di questo è, secondo Cartan, uguale all'ordine del carattere essenziale aumentato di un'unità.

Una *decomposizione regolare* completa sarà detta *essenziale*, se il carattere essenziale di  $S^{(1)}$  è diverso da zero e minore del carattere essenziale di  $S$ .

7. Osserviamo ancora che le proprietà *a*) e *b*) sono equivalenti alle seguenti:

*a')* un elemento piano  $E_\beta$  integrale regolare generico di  $S$  sia sempre contenuto in un elemento piano regolare  $E_r$  di  $S^{(1)}$ ;

*b')* quest'elemento piano  $E_\beta$  sia regolare su  $E_r$ , cioè per  $S^{(2)''}$ , nel punto generico dato di  $S$  e per i valori degli  $l$  che definiscono l' $E_r$ .

Infatti dalle *a*), *b*) seguono le *a')*, *b')*, poiché ogni  $E_\rho$  ed  $E_r$ , integrali regolari, tali che  $E_\rho \subset E_r$ , sono contenuti in varietà integrali  $\mathcal{V}_\beta$  e  $\mathcal{V}_r$  tali che  $\mathcal{V}_\beta \subset \mathcal{V}_r$ . Viceversa, data una  $\mathcal{V}_\beta$  integrale regolare generica di  $S$ , i suoi  $E_\beta$  tangenti sono integrali regolari di  $S$  e, in conseguenza delle *a')*, *b')*, sono verificate le *a*), *b*) <sup>(6)</sup>.

8. Per sapere se una decomposizione è regolare, conviene tener conto di un certo numero di teoremi, che ora enunceremo e stabiliremo.

**TEOREMA I.** — *Supponiamo che, dal sistema  $S^{(2)''}$  e dalle (I.1) (i cui parametri  $l$  siano soluzioni generiche dalle relazioni (A)), non si possa dedurre alcuna relazione (R) fra i prodotti esterni di grado  $\leq \beta$  ( $\leq \rho$ ) dei differenziali  $dx$  indipendente dagli  $l$ , e non deducibile da  $S$  (tale cioè che esistano elementi piani  $E_\gamma$  ( $\gamma \leq \beta$ ), integrali regolari di  $S$ , che non verifichino (R)). Allora la decomposizione è regolare per varietà integrali  $\beta$ -dimensionali. Viceversa, se qualche siffatta relazione (R) esiste, la decomposizione non è regolare per varietà integrali  $\beta$ -dimensionali.*

*Dimostrazione.* — Cominciamo colla seconda parte del teorema. Sia  $T$  il sistema delle relazioni (R). Risulta che un elemento piano integrale regolare generico  $E_\beta$  del sistema  $S$ , contenuto in un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$ , verifica questo sistema  $T$ .

Consideriamo allora un  $E_\beta$  integrale regolare di  $S$ , non verificante  $T$ . Se la condizione *a')* è verificata, esiste un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$  per  $E_\beta$ . Su di  $E_r$ , esiste un  $E_\beta$  integrale regolare di  $S$ : ma questo non può essere regolare per  $S^{(2)}$ , poiché non verifica  $T$ . Dunque, se è verificata la condizione *a')*, non lo è la *b')*, e così la seconda parte del teorema è dimostrata.

(5) E. CARTAN, *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales*, « Ann. de l'Ec. Norm. Sup. », T. 18, pp. 241-311 (1901); *Oeuvres Complètes*, Partie II, vol. I, pp. 411-481.

(6) Questo fatto sarà dimostrato in un altro lavoro.

La dimostrazione della prima parte è altrettanto semplice. Sia un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$ , e su di esso un  $E_i$  integrale regolare di  $S^{(2)''}$ . Se questo non è regolare anche per  $S$ , vuol dire che le sue componenti, oltre alle equazioni di  $S$ , soddisfano ad un sistema di relazioni esprimenti la proprietà di singolarità. Ma queste relazioni non seguono per  $E_i$  dal fatto di essere questo situato su  $E_r$  e regolare per  $S^{(2)''}$ . Possiamo dunque prendere, vicino al dato, un  $E_i$  che sia regolare per  $S$ . Per questo  $E_i$ , troveremo un  $E_r$  vicino a quello preso inizialmente su cui  $E_i$  è regolare. Abbiamo così trovato un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$ , e su di esso un  $E_i$  regolare sia per  $S$  che per  $S^{(2)''}$ .

Supponiamo ora di aver trovato, su di un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$ , un  $E_\gamma$  ( $\gamma < \beta$ ) integrale regolare per  $S^{(2)''}$  e per  $S$ . Consideriamo su  $E_r$ , e per  $E_\gamma$ , un  $E_{\gamma+i}$  integrale regolare di  $S^{(2)''}$ . Se  $E_{\gamma+i}$  non è regolare per  $S$ , allora esiste per  $E_\gamma$  un altro  $E_{\gamma+i}$ , vicino al dato, regolare per  $S$ . Per quest'altro  $E_{\gamma+i}$  passa un  $E_r$  vicino al dato, perché secondo l'ipotesi, il fatto di esser situato su di un  $E_r$  regolare di  $S^{(1)}$  non implica alcuna condizione indipendente dall' $E_r$ . Abbiamo così trovato un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$  su cui v'è un  $E_{\gamma+i}$  integrale regolare sia per  $S$  che per  $S^{(2)''}$ .

Con questo metodo giungiamo ad un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$  contenente un  $E_\beta$  integrale regolare sia per  $S$  che per  $S^{(2)''}$ . Ne risulta che ogni  $E_r$ , in un certo intorno di quello, conterrà un  $E_\beta$  integrale regolare per  $S$  e per  $S^{(2)''}$ , e che ogni  $E_\beta$  in un intorno opportuno sarà contenuto in un  $E_r$ , integrale regolare di  $S^{(1)}$  e risulterà regolare sia per  $S$  che per  $S^{(2)''}$ . Così le condizioni  $a')$  e  $b')$  sono verificate, ed il teorema è dimostrato.

**TEOREMA II.** — *Supponiamo che per un  $E_\beta$  ( $\beta \leq \rho$ ) integrale regolare generico di  $S$  passi un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$ , che non soddisfi alcuna relazione (R), indipendente dall' $E_\beta$  considerato e non deducibile dalle equazioni di  $S^{(1)}$  (cioè tale che esistano elementi  $E_r$  integrali regolari di  $S^{(1)}$  che non verifichino (R)). Allora la decomposizione risulta regolare con  $\beta$  variabili indipendenti. Per contro, se una tale relazione (R) esiste, la decomposizione non risulta regolare con  $\beta$  variabili indipendenti.*

La dimostrazione è analoga a quella del teorema precedente. Essendo  $T$  il sistema delle relazioni (R), nel caso in cui tali relazioni esistono, consideriamo un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$ , non verificante  $T$ . In quest' $E_r$  non esiste un  $E_\beta$  integrale regolare di  $S$ , poiché, se questo esistesse,  $E_r$ , secondo l'ipotesi, verificherebbe  $T$ .

Se  $T$  non esiste, consideriamo un  $E_i$  integrale generico di  $S$  e per esso un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$ , sul quale i caratteri di  $S^{(2)''}$  siano  $\tau_0, \tau_1, \dots$ . Se  $E_i$  non è regolare su  $E_r$ , per  $S^{(2)''}$ , allora esiste su  $E_r$  un altro  $E_i$ , vicino al dato e regolare sia per  $S^{(2)''}$  che per  $S$ .

Supponiamo di aver trovato un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$ , e su di esso un  $E_\gamma$  ( $\gamma < \beta$ ) integrale regolare sia per  $S$  che per  $S^{(2)''}$ . Per  $E_\gamma$  passa un  $E_{\gamma+i}$  integrale regolare di  $S$  e per questo un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$ . Se questo  $E_{\gamma+i}$  non è regolare per  $S^{(2)''}$ , su detto  $E_r$ , esiste per  $E_\gamma$  un  $E_{\gamma+i}$  vicino a quello, regolare sia per  $S$  che per  $S^{(2)''}$ . Risulta così che esiste



un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$ , e su di esso un  $E_\beta$  integrale regolare di  $S$  e di  $S^{(2)''}$ .

TEOREMA III. - *Una decomposizione che sia regolare per varietà  $\beta$ -dimensionali, lo è anche per varietà  $\gamma$ -dimensionali se  $\gamma < \beta$ .*

Infatti, se gli  $E_\gamma$ , situati sugli  $E_r$  integrali regolari di  $S^{(1)}$ , fossero sottoposti a condizioni non dipendenti dall' $E_r$ , a tali condizioni sarebbero sottoposti anche gli  $E_\beta$ . Il teorema III segue pertanto in base al teorema I.

### § 3. DEDUZIONE DEI CARATTERI DI $S^{(2)''}$ .

ALTRI CRITERI PER LA REGULARITÀ DI UNA DECOMPOSIZIONE.

9. Supponiamo che  $S$  sia regolarmente decomponibile, e consideriamo su di un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$  una catena regolare di elementi piani:

$$(3.1) \quad E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_r.$$

Affinché un elemento lineare  $E_x$  sia associato nel sistema  $S^{(1)}$  ad un  $E_\beta$  ( $\beta < r$ ) di questa catena, occorre che le componenti  $\delta_x$  di  $E_x$  soddisfino ad un sistema di equazioni lineari,  $\Sigma_\beta$ , di rango

$$\nu_\beta = \sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_\beta.$$

Se invece abbiamo un elemento piano integrale di  $S^{(1)}$  - sia  $E_\beta^*$  - non necessariamente regolare, il sistema di equazioni lineari cui deve soddisfare  $E_x$  per essergli associato è di rango  $\nu_\beta^* \leq \nu_\beta$ . Sia  $\Sigma_\beta^*$  questo sistema, relativo a  $E_\beta^*$ .

Supponiamo ora che  $E_\beta^*$  sia un elemento piano integrale regolare di  $S$ , situato su di un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$ . (Quest'ipotesi è giustificata dalla condizione  $a'$ ). Affinché l'elemento lineare  $E_x$  sia associato ad  $E_\beta^*$  in  $S$ , occorre che le sue componenti  $\delta_x$  verifichino un sistema  $S_\beta$  di equazioni lineari, di rango

$$m_\beta = s_0 + s_1 + \dots + s_\beta.$$

Siccome  $E_\beta^*$  è stato supposto su  $E_r$ , le equazioni del sistema  $\Sigma_\beta^*$  fanno parte (o sono conseguenze) del sistema  $S_\beta$ .

Supponiamo che, in base alle equazioni  $\Sigma_\beta^*$ , il sistema  $\Sigma_r$  diventi  $\bar{\Sigma}_\beta^*$  (di rango uguale alla differenza dei ranghi dei due sistemi), e il sistema  $S_\beta$  diventi  $\bar{S}_\beta$  (di rango uguale alla differenza dei ranghi di  $S_\beta$  e  $\Sigma_\beta^*$ ). Denotiamo con  $f_\beta$  il numero di relazioni lineari indipendenti che intercedono fra i primi membri delle equazioni di  $\bar{S}_\beta$  e quelli delle equazioni di  $\bar{\Sigma}_\beta^*$  (in base alle equazioni di  $\Sigma_\beta^*$ ).

Affinché un elemento lineare  $E_x$  di  $E_r$  sia associato ad  $E_\beta^*$  in  $S$ , esso deve soddisfare, oltre a  $\Sigma_r$ , ad un sistema  $T_\beta$  di equazioni lineari, di rango

$$\mu_\beta = \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_\beta.$$

Abbiamo evidentemente

$$(3.2) \quad \nu_\beta^* + \mu_\beta + f_\beta = m_\beta.$$

Si vede subito che questa formula vale anche quando  $\beta = 0$ .

Mediante la (3.2), se conosciamo  $v_\beta^*$  e  $f_\beta$ , possiamo trovare  $\mu_\beta$  e così i caratteri di  $S^{(2)'} (e di  $S^{(2)''})$ .$

10. Supponiamo che la decomposizione di  $S$  in  $S^{(1)}$  ed  $S^{(2)}$  sia regolare con  $\beta$  variabili indipendenti, e cerchiamo la condizione perché lo sia con  $\beta + 1$  variabili indipendenti. Vale al riguardo il

TEOREMA IV. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché la decomposizione di  $S$  in  $S^{(1)}$  ed  $S^{(2)}$ , regolare con  $\beta$  variabili indipendenti, lo sia altresì con  $\beta + 1$  variabili indipendenti è che:*

$$1^\circ \quad v_\beta^* + f_\beta - \beta - m_\beta > r;$$

2° preso un  $E_r$  integrale generico di  $S^{(1)}$ , dai sistemi  $\Sigma_\beta^*$ ,  $\bar{\Sigma}_\beta^*$ ,  $\bar{S}_\beta$  in  $\delta_x$  non risulti alcuna relazione lineare in  $\delta_x$ , indipendente dai detti sistemi ed i cui coefficienti siano indipendenti dall' $E_r$ .

La condizione 1° segue immediatamente dalla (3.2), poiché al nostro fine occorre che  $S^{(2)''}$  sia di genere maggiore di  $\beta$ , cioè  $\mu_\beta + \beta < r$ .

La condizione 2° segue, come mostreremo, dal teorema I.

Infatti, secondo l'ipotesi, la condizione per un  $E_\beta$  di essere regolare per  $S^{(2)''}$  e contenuto in un  $E_r$  regolare di  $S^{(1)}$  non implica per  $E_\beta$  alcuna condizione indipendente dall' $E_r$  e non deducibile da  $S$ . La condizione 2° ci dice che questa proprietà è vera anche per  $E_{\beta+1}$ .

11. Possiamo altresì procedere diversamente. Consideriamo un  $E_{\beta+1}$  integrale regolare di  $S$  per  $E_\beta$ . Supponiamo che per  $E_{\beta+1}$  passi un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$ , e sia di nuovo  $\Sigma_\beta^*$  il sistema delle equazioni di  $\Sigma_r$  considerate in base a  $\Sigma_\beta^*$ . Abbiamo allora il

TEOREMA V. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché la decomposizione di  $S$  in  $S^{(1)}$  ed  $S^{(2)}$  (regolare con  $\beta$  variabili indipendenti) sia regolare con  $\beta + 1$  variabili indipendenti, è (oltre  $\mu_\beta + \beta < r$ ) che per ogni  $E_{\beta+1}$  integrale regolare di  $S$  passi un  $E_r$  integrale regolare di  $S^{(1)}$  e che il numero di relazioni lineari identiche fra  $\bar{\Sigma}_\gamma^*$  e  $\bar{S}_\gamma$  sia  $f_\gamma$  per ogni  $\gamma \leq \beta$ , quando l' $E_r$  contiene un  $E_{\beta+1}$  integrale regolare di  $S$ , contenente  $E_\beta$ .*

Per dimostrarlo, osserviamo che dall'ipotesi risulta anzitutto che la condizione a') è verificata per un  $E_{\beta+1}$  regolare di  $S$ .

Consideriamo poi un  $E_\gamma$  ( $\gamma \leq \beta$ ) integrale regolare generico di  $S$ , e per esso un  $E_r$  integrale regolare generico di  $S^{(1)}$ .  $E_\gamma$  è regolare per  $S^{(2)''}$  su  $E_r$ . Affinché un  $E_r$  sia associato ad  $E_\gamma$  per  $S^{(2)''}$ , esso deve soddisfare al sistema  $\bar{S}_\gamma$  di rango  $\mu_\gamma$ .

Se l' $E_r$  è sottoposto alla condizione di contenere un  $E_{\beta+1}$  integrale regolare di  $S$  contenente  $E_\gamma$ , allora il sistema potrebbe essere di rango minore. In questo caso la decomposizione non sarebbe regolare con  $\beta + 1$  variabili indipendenti.

Infatti, ove invece lo fosse, su di un  $E_r$  integrale regolare generico di  $S^{(1)}$  potremmo prendere un  $E_\gamma$  e per esso un  $E_{\beta+1}$ , entrambi regolari sia per  $S$  che per  $S^{(2)''}$ , ed il rango di  $\bar{S}_\gamma$  sarebbe  $\mu_\gamma$ .

Se il rango di  $\bar{S}_\gamma$  è  $\mu_\gamma$ , la decomposizione è regolare con  $\beta + 1$  variabili indipendenti.

Infatti, l'ipotesi implica che l'elemento  $E_\beta$ , integrale generico di  $S$ , è integrale regolare anche di  $S^{(2)''}$  su di un  $E_\gamma$  integrale regolare di  $S^{(1)}$  che contenga  $E_{\beta+1}$ . Ma allora possiamo prendere per  $E_\beta$  un  $E_{\beta+1}$  integrale regolare di  $S$  e di  $S^{(2)''}$ , ciò che dimostra l'asserto.

Ora, la condizione per  $\bar{S}_\gamma$  di essere di rango  $\mu_\gamma$  coincide con la condizione dell'enunciato del teorema. Infatti le quantità  $m_\gamma$  e  $v_\gamma^*$  non dipendono dall' $E_\gamma$  preso per  $E_\beta$ . Dunque, secondo la (3.2), se  $f_\gamma$  non cambia particolareggiando l' $E_\gamma$ , lo stesso avviene per  $\mu_\gamma$ .

**Analisi matematica.** — *Sulla minimizzazione di una funzione del prodotto di enti non commutativi* (\*). Nota di CORRADO BÖHM, presentata (\*\*) dal Socio M. PICONE.

Nelle attuali ricerche operative si pongono problemi analoghi al seguente di carattere industriale.

Un certo numero di prodotti  $A, B, \dots, N$  debbono subire un trattamento termico di modalità differente da un prodotto ad un altro. Sia nota la durata  $x_A$  della permanenza nei forni e la durata  $y_A$  del susseguente raffreddamento (all'aria) per il prodotto  $A$  e similmente per tutti gli altri. Si voglia determinare un ordine di successione nel forno dei prodotti tale che renda minima la durata globale del trattamento termico.

La soluzione di questo problema si ricava dal teorema 3 (più oltre dimostrato) facente parte della formulazione di un'algebra astratta, per quanto mi consta, non ancora introdotta.

Definiamo un generico ente  $A$  mediante la coppia di numeri  $x_A, y_A$  reali non negativi

$$(1) \quad A = (x_A, y_A)$$

dove

$$(1') \quad x_A, y_A \geq 0.$$

Definiamo un'operazione binaria che associa ad ogni coppia ordinata di enti  $AB$  un ente prodotto  $C$  definito da

$$(2) \quad C \equiv AB \equiv (x_C, y_C)$$

$$(3) \quad x_C = x_A + x_B$$

(\*) Lavoro eseguito all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. L'autore è grato al dott. W. Gross del detto Istituto per aver egli vagliato criticamente alcune dimostrazioni.

(\*\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

$$4) \quad y_C = y_B \cup (y_A - x_B) = \max(y_B, y_A - x_B) = \frac{1}{2} [y_B + y_A - x_B + |y_B - y_A + x_B|]^{(1)}.$$

Consideriamo l'insieme  $\Sigma$  formato da tutte le possibili coppie di numeri reali non negativi.

TEOREMA 1. — *L'insieme  $\Sigma$  forma, rispetto all'operazione di prodotto definita da (2), (3), (4), un semigruppò con unità.*

La proprietà associativa

$$(AB)C = A(BC)$$

è una conseguenza dell'identità

$$y_C \cup \{[y_B \cup (y_A - x_B)] - x_C\} \equiv [y_C \cup (y_B - x_C)] \cup (y_A - x_B - x_C)$$

evidente in quanto sia primo che secondo membro sono identici a

$$y_C \cup (y_B - x_C) \cup (y_A - x_B - x_C).$$

L'elemento unità è  $E \equiv (0,0)$  e soddisfa alle relazioni valide per ogni  $A$

$$AE = EA = A,$$

com'è facile verificare.

*Osservazione.* — Il prodotto  $AB$  non gode in generale della proprietà commutativa. Consideriamo le due componenti di  $A$  come due funzioni numeriche dell'elemento

$$x(A) = x_A$$

$$y(A) = y_A;$$

introduciamo anzi per comodità la notazione  $|A|$  al posto di  $y(A)$ .

È allora immediato il

TEOREMA 2. — *a)  $x(AB) = x(BA)$  evidente (vedi (3)); b) Condizione necessaria e sufficiente perché sia  $|AB| = |BA|$  è che sia  $|A| = |B|$  oppure  $x_B = 0$  e  $|A| \geq |B|$  oppure  $x_A = 0$  e  $|B| \geq |A|$ . Ciò risulta dal fatto che dei quattro casi formalmente possibili cui l'uguaglianza*

$$(5) \quad |B| \cup (|A| - x_B) = |A| \cup (|B| - x_A)$$

dà luogo, cioè

$$|B| = |A|, \quad |A| - x_B = |A|, \quad |B| = |B| - x_A, \quad |A| - x_B = |B| - x_A$$

soltanto l'ultimo con  $x_B, x_A \neq 0$  non può sussistere, in quanto il valore comune ai due membri della (5) deve essere

$$|B| \cup (|A| - x_B) \cup |A| \cup (|B| - x_A) = |B| \cup |A|$$

stante la (1').

(1) Sarà preferita in seguito la notazione  $\cup$  d'uso corrente nella teoria dei reticoli. In ogni caso le proprietà sfruttate in seguito si riducono alle seguenti:

$$a) \quad x \cup x = x$$

$$b) \quad x \cup y = y \cup x$$

$$c) \quad (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$$

$$d) \quad (y \cup z) - x = (y - x) \cup (z - x)$$

$$e) \quad (y - x) \cup y = y \quad \text{se} \quad x \geq 0 \quad f) \quad x \cup y = y \quad \text{equivalente a} \quad y \geq x.$$



Data la generale non commutatività del prodotto può risultare interessante il problema (denominato in seguito  $\pi$ ) di determinare, dati  $n$  elementi, una permutazione degli stessi che renda minima la  $y$  del loro prodotto.

TEOREMA 3. - *Siano  $A, B, C, \dots, M, N$  gli  $n$  elementi. Se  $|A| \geq |B| \geq |C| \geq \dots \geq |M| \geq |N|$  allora chiamando  $Z$  il prodotto degli  $n$  elementi in un ordine qualunque si ha*

$$|ABC \dots MN| \leq |Z|$$

*cioè una soluzione del problema  $\pi$  è fornita ordinando gli elementi in una successione monotona non crescente secondo il valore della loro seconda componente  $y$ .*

Per agevolare la dimostrazione è opportuno premettere alcuni lemmi.

LEMMA 3.1. - (Incondizionata invarianza a destra della monotonia).

Se  $|P| \geq |Q|$  per ogni  $R$  vale

$$(6) \quad |PR| \geq |QR|.$$

L'ipotesi e la tesi si possono scrivere

$$(7) \quad |P| \cup |Q| = |P|.$$

$$(8) \quad |PR| \cup |QR| = |PR|.$$

Calcoliamo il primo membro di (8). Si ha

$$|PR| \cup |QR| = |R \cup (P - x_R)| \cup |R \cup (Q - x_R)| = |R| \cup (|P| - x_R) = |PR|$$

in quanto dalla (7) si deduce

$$(|P| - x_R) \cup (|Q| - x_R) = |P| - x_R.$$

LEMMA 3.2. - (Condizionata invarianza a sinistra della monotonia).

Se  $|T| \geq |V|$  e  $x_V \geq x_T$  per ogni  $S$  è

$$(9) \quad |ST| \geq |SV|.$$

Le ipotesi si possono scrivere

$$(10) \quad |T| \cup |V| = |T|$$

$$(11) \quad (|S| - x_T) \cup (|S| - x_V) = |S| - x_T$$

dove, procedendo come per il lemma precedente, si dimostra l'asserto.

LEMMA 3.3. -

Se  $|F| \geq |G|$  allora  $|FG| \leq |GF|$ .

Procedendo similmente a quanto già visto si ottiene facilmente

$$|GF| = |F| \cup (|G| - x_F) = |F|$$

$$|FG| = |G| \cup (|F| - x_G) \leq |F|$$

c. d. d.

Per dimostrare ora il Teorema 3, basta osservare che è possibile ottenere la permutazione risolvante  $ABC \dots MN$  a partire da una permutazione qualsiasi mediante ripetute trasposizioni di elementi adiacenti. Più

precisamente, detti  $G, F$  due elementi generici adiacenti tali che  $|F| \geq |G|$  è possibile limitarsi a ripetere trasposizioni che dalla posizione  $GF$  portino alla posizione  $FG$ , in quanto con ripetuti scambi di questo tipo si può portare dapprima  $A$  in prima posizione, poi  $B$  in seconda e così di seguito. Il teorema quindi è dimostrato se, più generalmente per ogni  $S, R, F, G$  con  $|F| \geq |G|$  vale

$$(I_2) \quad |SGFR| \geq |SFG R|.$$

Applicando il lemma 3.3 dalle ipotesi consegue

$$(I_3) \quad |GF| \geq |FG|;$$

ponendo ora  $GF = T, FG = V$  ed essendo  $x_V = x_T$  si può applicare il lemma 3.2 ottenendo

$$(I_4) \quad |SGF| \geq |SFG|$$

da cui, ponendo  $SGF = P, SFG = Q$  ed applicando il lemma 3.1 si perviene appunto alla (I<sub>2</sub>).

**Geometria algebrica.** — *Sull'equazione canonica di un complesso  $\mathbf{C}_{n-d-1}^g$  di sottospazi  $S_d$  di  $S_n$ .* Nota di FEDERICO GAETA, presentata (\*) dal Socio F. SEVERI.

Un notevole teorema di Severi <sup>(1)</sup> afferma che ogni ciclo <sup>(2)</sup> puro di dimensione massima della grassmanniana  $\mathfrak{G}(d, n)$  degli  $S_d$  di  $S_n(K)$  ( $K$  corpo base commutativo di caratteristica zero), immagine di un complesso  $\mathbf{C}_{n-d-1}^g$  <sup>(3)</sup>

(\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati* . . . , « Ann. di mat. », ser. III, vol. 24, pp. 89-120 (1915), oppure *Memorie scelte*, Zuffi, Bologna, (1950) p. 404 od anche HODGE-PEDOE, *Methods of algebraic geometry*, Cambridge University Press, vol. II, Cap. XIV, p. 309.

(2) Adottiamo per brevità questa denominazione di WEYL, *Foundations of algebraic geometry*, « Amer. math. Soc. Coll. Publications », vol. XXIX, 1946, per le combinazioni lineari formali  $\sum \lambda_i I_d^{(i)}$  estese a tutte le varietà algebriche assolutamente irriducibili di dimensione  $d$  fissa ( $0 \leq d \leq n-1$ ), con  $\lambda_i$  intero  $\geq 0$  ed un numero finito di coefficienti non nulli. Notazione:  $\mathbf{U}_d, \mathbf{V}_d, \mathbf{W}_d$  (grassetto). Invece  $U, V, W, \dots$  indicheranno le varietà algebriche come semplici luoghi di punti (con coordinate omogenee appartenenti ad una qualsiasi estensione di  $K$ ). Per  $d = n-1$ , i cicli di  $S_n$  si chiameranno pure *quantiche* (quadriche, cubiche, quartiche, . . . ,  $g$ -iche). Per altre denominazioni, ved. SAMUEL, *Méthodes d'algèbre abstraite en Géométrie algébrique*, Ergebnisse der Math. Springer, Berlin, 1955.

(3) La notazione  $\mathbf{C}_{n-d-1}^g$  per i complessi d'ordine  $g$  di sottospazi  $S_d$  di  $S_n$  si giustifica dal fatto, che, nel caso particolare del complesso nucleato di nucleo  $\mathbf{V}_{n-d-1}^g$  (ciclo algebrico di dimensione duale  $n-d-1$ ) si verificano certe proprietà d'intersezione esprimibili mediante opportuni invarianti, che conservano un senso per  $\mathbf{C}$  affatto generico, in quanto che se  $\mathbf{V} = \sum \lambda_i I_d^{(i)}$  il complesso  $\mathbf{C}$  è del tipo  $\sum \lambda_i \mathbf{C}(I_d^{(i)})$  dove  $\mathbf{C}(I_d^{(i)})$  è il com-

d'ordine  $g$  è segabile mediante una  $g$ -ica <sup>(4)</sup> dello spazio ambiente grassmanniano  $\left[\binom{n+1}{d+1} - 1\right]$ . Per  $0 < d < n - 1$ ,  $g > 1$  questa  $g$ -ica non è unica. In questa Nota si dimostra l'esistenza di una  $g$ -ica secante individuata intrinsecamente da  $\mathbf{C}_{n-d-1}^g$  covariante per il gruppo di tutte le omografie non degeneri che mutano in sé  $\mathcal{S}$ . Questa  $g$ -ica notevole si chiamerà in seguito la  $g$ -ica canonica secante di  $\mathbf{C}$  e la sua equazione  $F(\dots, x^{i_0 i_1 i_2 \dots i_d}, \dots) = 0$  nelle coordinate grassmanniane puntuali sarà l'equazione canonica puntuale <sup>(5)</sup> richiamata nel titolo della Nota.


Il tensore omogeneo <sup>(6)</sup>  $\mathbf{T}$  dei coefficienti associato nel modo più naturale ad una  $g$ -ica canonica è caratterizzato dalla proprietà d'essere invariante per l'operatore di simmetria idempotente  $\mathbf{n}_a = \frac{1}{x} \sum_{c,f} \varepsilon_c \cdot cf$  costruito nel solito modo <sup>(7)</sup>

plesso assolutamente irriducibile degli  $\mathbf{S}_d$  appoggianti in  $\mathbf{I}_d^{(i)}$ . Per questa ragione giova spesso considerare ogni  $\mathbf{C}_{n-d-1}^g$  come simbolicamente nucleato. Cfr., per più dettagli le Note successive dell'A. in questi « Rendiconti », Sul calcolo effettivo della forma associata  $F(\mathbf{W}_{\alpha+\beta-n}^{gl})$  all'intersezione  $\mathbf{W}$  di due cicli effettivi puri  $\mathbf{U}_\alpha^g, \mathbf{V}_\beta^l$  di  $\mathbf{S}_n$  in funzione delle  $F(\mathbf{U}_\alpha^g), F(\mathbf{V}_\beta^l)$  relative ai cicli secanti.

(4) Ved. nota <sup>(2)</sup>.

(5) Si definisce dualmente, mediante le coordinate grassmanniane iperplanari un'equazione canonica iperplanare.

(6) Cioè, definito a meno di un fattore costante  $\lambda \neq 0$ .

(7) Il problema della decomposizione di un tensore in componenti di massima simmetria è ormai classico e risale ai lavori di YOUNG, FROBENIUS, SCHUR, WEYL ed altri in stretto rapporto con la teoria degli invarianti proiettivi qualora venga considerata come un capitolo della teoria delle rappresentazioni del gruppo lineare generale  $\text{GL}(n+1)(K)$ , Cfr. VAN DER WAERDEN, *Algebra*, II, Springer, Berlin, 1952; *Gruppen von linearen Transformationen*, Ergebnisse der Math. I Springer, Berlin, 1935, ma soprattutto, H. WEYL, *Classical groups*, Princeton math. series; LITTLEWOOD, *The theory of group characters and matrix representations of groups*, 2<sup>ed</sup> ed., Oxford, 1950; MURNAGHAN, *The theory of group representations*, Baltimore, 1938; BOERNER, *Darstellungen von Gruppen*, Springer, Berlin, 1955. Gli operatori di simmetria citati appartengono all'anello grupppale (Gruppenring)  $\mathbf{O}_m(K)$  costruito mediante il gruppo simmetrico  $\mathfrak{S}_m$  di sostituzioni tra  $m$  oggetti con coefficienti di  $K$ . Ricordiamo che la classe di « massima simmetria » (sottospazi invarianti « irriducibili » dal punto di vista delle rappresentazioni) dei tensori covarianti d'ordine  $m$  definiti sopra uno spazio vettoriale base  $\mathfrak{V}_{n+1}(K)$  vengono associate alle partizioni di  $m$ , ad esempio  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_r$  con  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r > 0$ . Ogni partizione  $(m_1 m_2 \dots m_r)$  siffatta individua una scacchiera di YOUNG ad  $r$  righe ed  $s (= m_1)$  colonne in cui la riga  $i$ -esima contiene  $m_i$  scacchi, in guisa che i numeri  $\mu_j$  di elementi della colonna  $j$ -esima  $j = 1, 2, \dots, s$  risultano pure ordinati:  $m = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$   $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_s$  secondo la *partizione coniugata*, ad esempio per  $m = 8 = 4 + 3 + 1 = 3 + 2 + 2 + 1$ : 

Gli oggetti sui quali agisce  $\mathfrak{S}_m$  si considerano inizialmente in una disposizione « naturale »: l'ordine naturale di lettura, nell'esempio precedente:  $\begin{matrix} & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & & & \\ & 8 & & & & \end{matrix}$ . Gli idempotenti fonda-

mentali si costruiscono mediante i sottogruppi  $\mathfrak{R}_{(m_1 m_2 \dots m_r)}, \mathfrak{C}_{(m_1 m_2 \dots m_r)}$  o semplicemente  $\mathfrak{R}, \mathfrak{C}$  quando non  $m_1, m_2, \dots, m_r$  siano fissi, caratterizzati dall'invarianza degli insiemi di elementi, che, nella posizione iniziale occupano una medesima riga od una medesima colonna, e sono rispettivamente  $\mathbf{s} = \frac{1}{\sigma} \sum_{r \in \mathfrak{R}} r, \mathbf{a} = \frac{1}{\alpha} \sum_{c \in \mathfrak{C}} \varepsilon_c \cdot c, \mathbf{n}_s = \frac{1}{x} \sum_{c \in \mathfrak{C}} \varepsilon_c \cdot rc, \mathbf{n}_a = \frac{1}{x} \sum_{c \in \mathfrak{C}} \varepsilon_c \cdot cr,$

(simmetrizzante, alternante, normalizzante-simmetrico e normalizzante-alterno) dove  $\varepsilon_c = \pm 1$  secondo che la sostituzione «verticale»  $c$  sia di classe pari o dispari rispettivamente e  $\sigma, \alpha, \kappa$ , sono interi dipendenti dalla partizione  $(m_1, m_2, \dots, m_r)$  che non interessa precisare qui. Si badi che la *simmetria* s'intende sempre rispetto alle righe, l'*antisimmetria* rispetto alle colonne, perciò non occorrono ulteriori precisazioni. Nelle applicazioni tensoriali di questo lavoro gli  $m$  oggetti saranno generalmente fattori  $\mathfrak{A}_{ij}$  (oppure  $\mathfrak{A}_{ij}^*$ ) tensoriali, ad esempio

[illegible]

$$I = (i_{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \dots & i_{1m_1} \\ i_{21} & i_{22} & \dots & i_{2m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i_{m_1} & i_{m_2} & \dots & i_{rm_r} \end{pmatrix}, \quad J = (j_{\lambda\mu}), \text{ ecc. dove } i_{\lambda\mu} = 0, 1, 2, \dots, n \quad \lambda = 1, 2, \dots, r$$
$$e_I = \left\{ \begin{array}{c} e_{i_{I1}} \times e_{i_{I2}} \times \cdots \times e_{i_{Im_I}} \\ \times e_{i_{2I}} \times e_{i_{22}} \times \cdots \times e_{i_{2m_2}} \\ \vdots \\ \times e_{i_{rI}} \times e_{i_{r2}} \times \cdots \times e_{i_{rm_r}} \end{array} \right\}, \quad e^I = \left\{ \begin{array}{c} e^{i_{I1}} \times e^{i_{I2}} \times \cdots \times e^{i_{Im_I}} \\ \times e^{i_{2I}} \times e^{i_{22}} \times \cdots \times e^{i_{2m_2}} \\ \vdots \\ \times e^{i_{rI}} \times e^{i_{r2}} \times \cdots \times e^{i_{rm_r}} \end{array} \right\}$$

(9) I tensori invarianti per  $\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{n}_s, \mathbf{n}_a$ , (s'intende rispetto ad una scacchiera fissa  $(m_1, m_2, \dots, m_r)$ ) si chiameranno brevemente *simmetrici*, *alternanti* (od *antisimmetrici*),



(simmetrico-normale)<sup>(10)</sup>,  $C \doteq n_s(C)$  della condizione di coniugio<sup>(11)</sup> di una  $(d+1)$ -pla di punti generici rispetto a  $C$  (a meno di un fattore costante non nullo).

Le considerazioni svolte ammettono un'estensione ovvia riguardante le varietà ipergrassmanniane proprie ed improprie<sup>(12)</sup> studiate altrove dall'A. Quelle proprie sono i modelli più semplici delle varietà immagini delle basi delle forme di Schubert<sup>(13)</sup>  $S_{d_1} \supset S_{d_2} \supset \dots \supset S_{d_s}$  (Cfr. Bertini, loc. cit.; Hodge-Pedoe, loc. cit.).

simmetrici normali od alternanti-normali, rispettivamente. I tensori  $s(A)$ ,  $a(A)$ ,  $n_s(A)$ ,  $n_a(A)$  dedotti da un  $s$  si chiameranno *simmetrizzato*, *antisimmetrizzato*, *normalizzato simmetrico* o *normalizzato alternante* di  $T$ . Chiameremo pure  $s(\mathcal{C})$ ,  $a(\mathcal{C})$ ,  $n_s(\mathcal{C})$ ,  $n_a(\mathcal{C})$  i sottospazi invarianti di  $\mathcal{C}$  luoghi dei simmetrizzati, antisimmetrizzati, ecc. Evidentemente  $n_s(\mathcal{C}) \subseteq s(\mathcal{C})$  ed  $n_a(\mathcal{C}) \subseteq a(\mathcal{C})$  ( $s(\mathcal{C}^*)$ ,  $a(\mathcal{C}^*)$ , ... ecc. per gli spazi covarianti duali).

(10) Ved. nota precedente.

(11) Cioè la condizione affinché gli spazi  $S_d$  passanti per  $d+1$  punti  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_d$  appartengano al complesso  $C$ . Se questi sono linearmente dipendenti essa si verifica senz'altro. Nel caso opposto vi è un solo  $S_d$  congiungente ed il coniugio si esprime mediante un'equazione omogenea d'ordine  $g$  rispetto alle coordinate omogenee di ciascuno dei punti  $P_i$ ; il tensore dei coefficienti (costruito nel solito modo) è simmetrico-normale. In maniera perfettamente analoga risulta la condizione di coniugio tra  $n-d$  iperpiani (condizione caratteristica affinché essi si seghino in un  $S_d$  del complesso, nonché il tensore (contravariante simmetrico normale) rispetto alla scacchiera di tipo  $(n-d) \times g$ .

(12) Quelle *proprie* si associano in modo naturale alle basi di SCHUBERT (v. nota (13)).

(13) Cioè, le basi delle note forme fondamentali per gli spazi  $S_{s-1}$  di  $S_n$ , ved. BERTINI, *Geometria proiettiva degli iperspazi*, Spoerri, Pisa 1907, HODGE-PEDOE, loc. cit., II. Sia  $m = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$ ,  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$  la partizione coniugata di  $m = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s$  ( $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_s$ ,  $\mu_i = d_i + 1$ ), dove  $r = \mu_1$ .

Mediante gli  $r$  punti  $P_i$  possiamo costruire uno schema sulla scacchiera: ( $m_1, m_2, \dots, m_r$ ):

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & P_1 & \dots & P_1 & & & \\ P_2 & P_2 & \dots & P_2 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ P_{\mu_1} & P_{\mu_2} & \dots & P_{\mu_s} & & & \end{array}$$

in guisa tale che tutti i punti della  $j$ -esima colonna individuano lo spazio  $S_{\mu_j-1} = S_{d_j}$ . I prodotti  $\Pi_h$  di  $s$  fattori uguali ad una qualsiasi coordinata grassmanniana di  $S_{d_j}$ , per  $j = 1, 2, \dots, s$  individuano essenzialmente la base  $S_{d_1} \supset S_{d_2} \supset \dots \supset S_{d_s}$ . In verità essi non sono tutti linearmente indipendenti, bensì tutti quelli normalizzati (con gli indici ordinati per righe e colonne:

$$i_{\lambda 1} \leq i_{\lambda 2} \leq \dots \leq i_{\lambda n_\lambda} \quad \lambda = 1, 2, r$$

$$i_{1\mu} < i_{2\mu} < \dots < i_{i\mu}$$

v. BOERNER, loc. cit.

La varietà di  $[\delta-1]$  di punto generale  $\Pi_h$  ( $\Pi_h$  percorre tutti i prodotti normalizzati (*standard powers*, HODGE-PEDOE, II, loc. cit., è il modello più semplice della varietà ipergrassmanniana propria di indici  $(d_1, d_2, \dots, d_s)$  come si dimostra estendendo note osservazioni riguardanti le varietà grassmanniane ordinarie. Mediante le quantiche dello spazio ipergrassmanniano  $(\delta-1)$  si possono definire gli ipercomplessi di tutti gli ordini, di indici  $(d_1, d_2, \dots, d_s)$  e si può dimostrare direttamente mediante la simmetrizzazione una certa estensione del teorema di Severi, più volte citato.

Per  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_s$  si definiscono le varietà ipergrassmanniane più generali. Per ulteriori dettagli rimandiamo ad una prossima Nota dell'A.

1. EQUIVALENZA GRASSMANNIANA. — Per evitare piccole noie dovute all'omogeneità ed anche per ragioni intrinseche, considereremo gli spazi vettoriali covarianti  $\mathfrak{C}_{n+1}^*(m_1, m_2, \dots, m_r)$ ,  $\mathfrak{s}(\mathfrak{C}^*)$ ,  $\mathfrak{a}(\mathfrak{C}^*)$ ,  $\mathfrak{n}_s(\mathfrak{C}^*)$ ,  $\mathfrak{n}_a(\mathfrak{C}^*)$ <sup>(14)</sup>, anziché quelli proiettivi da essi derivati nel solito modo.

L'applicazione di  $\mathfrak{a}(\mathfrak{C}^*)$  sopra  $\mathfrak{n}_s(\mathfrak{C}^*)$  definita da  $A \rightarrow \mathfrak{s}(A)$ <sup>(15)</sup> è un omomorfismo di  $K$ -modulo di nucleo, il sottospazio  $\mathfrak{U}^*$  di tutti i tensori alternanti a simmetrizzato nullo. *Condizione caratteristica affinché  $A_1 \equiv A_2 \bmod. \mathfrak{U}^*$  ( $A_1$  ed  $A_2$  «grassmannianamente equivalenti») è che  $A_1$  ed  $A_2$  posseggano lo stesso simmetrizzato:  $\mathfrak{s}(A_1) = \mathfrak{s}(A_2)$ .*

Dimostreremo che: *Il tensore  $\mathfrak{n}_a(A)$ , normalizzato-alternante del tensore alternante  $A$  è grassmannianamente equivalente ad  $A$ , anzi: nella classe di tutti i tensori alternanti di  $\mathfrak{a}(\mathfrak{C}^*)$  grassmannianamente equivalenti ad  $A$  vi è un solo tensore normale  $\mathfrak{n}_a(A)$  caratterizzato dalla proprietà d'essere il prodotto di  $\alpha\sigma/\kappa$  per l'antisimmetrizzato del tensore simmetrico normale individuato dalla classe.*

Infatti, se

$$\begin{aligned} A = \mathfrak{a}(A), \mathfrak{s}(\mathfrak{n}_a(A)) &= \mathfrak{s} \frac{\alpha\sigma}{\kappa} \mathfrak{a}\mathfrak{s}(A) = \frac{\alpha\sigma}{\kappa} \mathfrak{s}\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{s}\mathfrak{a}(A) = \frac{\alpha\sigma}{\kappa} \left( \frac{\kappa}{\alpha\sigma} \mathfrak{n}_s \right)^2(A) = \\ &= \frac{\kappa}{\alpha\sigma} \mathfrak{n}_s(A) = \frac{\kappa}{\alpha\sigma} \frac{\alpha\sigma}{\kappa} \mathfrak{s}\mathfrak{a}(A) = \mathfrak{s}(A) \text{ c. v. d.} \end{aligned}$$

Se  $A_1, A_2$  sono alternanti normali, dalla  $\mathfrak{s}(A_1) = \mathfrak{s}(A_2)$  risulta

$$\frac{\alpha\sigma}{\kappa} \mathfrak{a}\mathfrak{s}(A_1) = \frac{\alpha\sigma}{\kappa} \mathfrak{a}\mathfrak{s}(A_2) \text{ ossia } \mathfrak{n}_a(A_1) = \mathfrak{n}_a(A_2) = A_1 = A_2$$

cioè, *due tensori alternanti normali disuguali sono disequivalenti mod.  $\mathfrak{U}^*$ .*

$$\mathfrak{n}_a(A) = \frac{\alpha\sigma}{\kappa} \mathfrak{a}\mathfrak{s}(A) = \frac{\alpha\sigma}{\kappa} \mathfrak{a}(\mathfrak{s}(A)).$$

Ne consegue, l'equivalenza:  $\mathfrak{n}_a(\mathfrak{C}^*) \simeq \mathfrak{a}(\mathfrak{C}^*)/\mathfrak{U}^*$ .

Nel caso propriamente grassmanniano,  $m_1 = m_2 = \dots = m_{d+1} = g, r = g$  risultano le interpretazioni geometriche immediate:

*Una  $g$ -ica di tensore  $B$  contiene la grassmanniana  $\mathfrak{S}(d; n)$  se  $B \equiv 0$ , mod.  $\mathfrak{U}^*$  ed allora soltanto.*

*Due  $g$ -iche di tensori (omogenei)  $B_1, B_2$  segano sopra  $\mathfrak{S}(d; n)$  lo stesso ciclo se esiste una costante  $\lambda \neq 0$  tale che  $B_2 \equiv \lambda B_1 \bmod. \mathfrak{U}^*$  ed allora soltanto.*

2. — La totalità delle  $g$ -iche canoniche costituisce un sistema lineare subordinato di dimensione uguale a quella del sistema lineare sezione inva-

(14) Ved. le notazioni precedenti.

(15) Evidentemente  $\mathfrak{s}(A + B) = \mathfrak{s}(A) + \mathfrak{s}(B)$ ,  $\mathfrak{s}(\lambda A) = \lambda \mathfrak{s}(A)$ .

riante per il gruppo di tutte le omografie che mutano in sè  $\mathfrak{G}$ . La base più naturale di questo sistema è costituita dalle somme

$$p^N = \sum_{\substack{f(N) = I_1 I_2 \dots I_g \\ f \in \mathfrak{G}}} p^{I_1} p^{I_2} \dots p^{I_g}$$

dove  $N = (i_{\lambda\mu})$  è normale per righe e colonne  $i_{\lambda 1} \leq i_{\lambda 2} \leq \dots \leq i_{\lambda g}$ ,  $i_{1\mu} < i_{2\mu} < \dots < i_{d+1,\mu}$  (v. Boerner, loc. cit.) e si adopera la notazione «verticale» per gli apici  $i_{\lambda\mu}$  <sup>(16)</sup>.

**Geometria algebrica.** — *Sopra una relazione fra i generi di una superficie algebrica irregolare.* Nota di ERMANNO MARCHIONNA, presentata (\*) dal Socio O. CHISINI.

1. Un confine superiore del genere lineare assoluto  $p^{(1)}$  di una superficie algebrica in funzione del genere aritmetico  $p_a$  è stato assegnato da Rosenblatt con la relazione

$$(1) \quad p^{(1)} \leq 16 p_a + 27^{(1)}.$$

Successivamente Severi — appoggiandosi ad un risultato trascendente di Hodge — ha indicato una limitazione più espressiva in cui intervengono però anche il numero base  $\rho$  ed il genere geometrico  $p_g$ :

$$p^{(1)} + \rho \leq 8 p_a + 2 p_g + 11^{(2)}.$$

Di qui, introducendo l'irregolarità  $q = p_g - p_a$  e ricordando che  $\rho \geq 1$ , si deduce la relazione

$$(2) \quad p^{(1)} \leq 10 p_a + 2 q + 10.$$

(16) Si può scegliere una base normale per i tensori di coniugio che conduce alla forma normale di HODGE, (v. i suoi *standard power products*). (Tensori simmetrici normali) con la stessa normalizzazione. Si badi però che *le quantiche che ne risultano non sono più covarianti per il gruppo anzidetto delle omografie di  $\mathfrak{G}$* , bensì è covariante la relativa condizione di coniugio (diversità di effetti di  $\mathbf{n}_a$ ) (quantica secante canonica) ed  $\mathbf{n}_s$  (coniugio)!

(\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

(1) Cfr. A. ROSENBLATT, *Sur quelques inégalités dans la théorie des surfaces algébriques*, «Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris», to. 154 (1912), p. 1494.

Qui osserviamo che la relazione di Rosenblatt non è corretta quando la superficie sia una rigata di genere  $p_a < -2$ . Per le rigate con  $p_a < 0$ , si ha infatti  $p^{(1)} = 8 p_a + 9$  (Cfr. ad esempio F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Zanichelli, Bologna (1948), p. 177), e per  $p_a < -2$  si ha appunto  $p^{(1)} > 16 p_a + 27$ .

Estremi inferiori di  $p^{(1)}$  in funzione del genere geometrico  $p_g$  sono stati determinati da Noether e Castelnuovo (Cfr. ad esempio il citato trattato di ENRIQUES, p. 294).

(2) Cfr. F. SEVERI, *Osservazioni a proposito di una nota di E. Kähler*, «Rend. Circolo Matem. di Palermo», tomo LVI (1932), p. 79.

Ora vi sono delle superficie irregolari per cui la (1) è più efficace della (2); tali sono ad esempio i piani doppi la cui curva di diramazione sia composta da  $2h + 2$  cubiche ellittiche di uno stesso fascio (con  $h > 11$ ) <sup>(3)</sup>.

Tuttavia molto spesso la (2) è più significativa della (1); ad esempio per le superficie regolari essa diventa

$$p^{(1)} \leq 10 p_a + 10.$$

È possibile migliorare la limitazione di Rosenblatt anche per le superficie irregolari?

Il problema non si pone in relazione a superficie di genere aritmetico negativo <sup>(4)</sup>, perché per queste sussiste addirittura l'uguaglianza

$$p^{(1)} = 8 p_a + 9.$$

Qui si mostra che le superficie irregolari con  $p_a \geq 0$  soddisfano in generale la disuguaglianza

$$(3) \quad p^{(1)} < 11 p_a + 17.$$

Le eventuali eccezioni sono da ricercarsi fra particolari superficie aventi un fascio ellittico di curve; tuttavia è noto che il loro genere lineare  $p^{(1)}$  non può superare  $12 p_a + 13$ .

Si osserva inoltre che gli indici di connessione delle superficie irregolari (esclusi pochi tipi precisati nel n. 4) sono legati dalla relazione

$$R_2 \geq 3 R_1 - 6.$$

2. Avvertiamo che ci riferiremo sempre a superficie algebriche irregolari, e più precisamente ad un loro modello privo di curve eccezionali di prima specie; sotto queste ipotesi il genere lineare relativo coincide con quello assoluto.

Dimostriamo dunque che la (3) è soddisfatta in generale dalle superficie aventi il genere aritmetico non negativo.

Consideriamo dapprima le superficie prive di fasci irrazionali di curve.

Da un recente risultato di Severi si deduce che per esse sussiste la disuguaglianza

$$(4) \quad p_g \geq \frac{g(g-1)}{2} \quad (5),$$

(3) Per questi piani doppi si ha  $p^{(1)} = p_a = 1$ ,  $g = h$ .

(4) Tali superficie sono riferibili a rigate non razionali, oppure sono superficie ellittiche od iperellittiche (per queste ultime si ha  $p^{(1)} = 1$ ,  $p_a = -1$ ). Cfr. ad esempio, ENRIQUES, loco citato in <sup>(1)</sup>, p. 461.

(5) Il risultato di Severi è più generale e riguarda una varietà algebrica  $M_r$  ad  $r$  dimensioni, d'irregolarità superficiale  $p > r$ , non contenente involuzioni irregolari di dimensione  $h < r$  (fasci irrazionali di curve nel caso delle superficie). Precisamente, detti  $i_1, i_2, \dots, i_r$  i numeri delle forme differenziali di prima specie linearmente indipendenti (dei gradi da 1 fino ad  $r$ ) appartenenti ad  $M_r$ , si ha

$$i_1 = p \quad ; \quad i_2 \geq \binom{p}{2}; \dots; i_r \geq \binom{p}{r}.$$

(Cfr. F. SEVERI, *Contributi alla teoria delle irregolarità di una varietà algebrica*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XX p. 14 (1956)). Se  $r = 2$ ,  $M_r$  è una superficie d'irrego-



ed a maggior ragione la limitazione meno forte

$$p_g \geq 3q - 6^{(6)},$$

cioè

$$2q \leq p_a + 6.$$

La (2) mostra che per queste superficie si ha appunto

$$p^{(1)} < 11p_a + 17.$$

Consideriamo ora una superficie  $F$  che possieda un fascio irrazionale (di genere  $\pi \geq 1$ ) di curve aventi il genere  $p$ . Distinguiamo vari casi.

Se  $F$  possiede un fascio di curve razionali, essa è riferibile a rigata e non interessa la nostra trattazione perché per le rigate irregolari si ha  $p_a < 0$ .

Se  $F$  è dotata di un fascio di curve ellittiche ed è  $p_g > 1$ , si ha  $p^{(1)} = 1^{(7)}$  e la (3) è largamente soddisfatta.

La (3) risulta pure vera se la nostra  $F$  (come le superficie prive di fasci irrazionali) soddisfa la relazione  $2q \leq p_a + 6$  (in particolare se  $p_g = 1$ ,  $p_a = 0$ ). Ci rimane quindi da esaminare il caso in cui  $F$  abbia un fascio irrazionale di curve di genere  $p > 1$ , con  $2q > p_a + 6$ .

A tale scopo ricordiamo innanzitutto che è

$$q \leq p + \pi.$$

Infatti, fra i  $2q$  cicli lineari indipendenti di  $F$ , quelli che non possono ridursi ad uno dei  $2p$  cicli lineari indipendenti che appartengono ad una curva generica del fascio sono in numero di  $2\pi^{(8)}$ .

larità  $p$  e si ha  $i_2 = p_g$ . Pertanto per una superficie d'irregolarità  $q > 2$  priva di fasci irrazionali si ha

$$p_g \geq \frac{q(q-1)}{2}.$$

Risulta a posteriori che la relazione è soddisfatta anche lasciando cadere l'ipotesi  $q > 2$ . Infatti per  $q = 2$  essa si riduce alla limitazione  $p_g \geq 1$ , che è evidentemente una condizione necessaria perché una superficie d'irregolarità 2 non possieda fasci irrazionali (se fosse  $p_g = 0$  si avrebbe  $p_a = -2$ , cioè una rigata astratta di genere 2, la quale contiene un fascio irrazionale). Il caso  $q = 1$  va scartato in quanto una superficie d'irregolarità 1 possiede un fascio ellittico di curve (cfr. ad esempio loco citato in<sup>(1)</sup>, p. 369).

(6) Una dimostrazione di tale disuguaglianza (che è quella che qui interessa) trovasi anche in L. ROTH, *Sistemi canonici ed anticanonici*, « Pubblicazioni dell'Istituto Matematico dell'Università di Genova », N. 21, p. 37.

(7) Questa proprietà è stata enunciata da Enriques e da lui dimostrata nel solo caso che  $F$  possieda un sistema canonico privo di parti fisse non eccezionali. Per una dimostrazione più completa cfr. ad esempio L. NOLLET, *Sur les surfaces algébriques à système canonique réductible et sur quelques questions connexes*, « Bull. Acc. Roy. de Belgique », s. 5, XXXVII, p. 51 (1951).

(8) Cfr. ad esempio O. ZARISKI, *Algebraic Surfaces*, « Ergebnisse der Mathematik », 5, p. 144 (1935).

Consideriamo ora l'invariante di Zeuthen-Segre della F

$$(5) \quad I = \Delta + 4(\pi - 1)(p - 1) - 4$$

( $\Delta$  indica generalmente il numero delle curve del fascio il cui genere si abbassa da  $p$  a  $p - 1$ ; si ha comunque  $\Delta \geq 0$  <sup>(9)</sup>).

Osserviamo che, qualora sia  $\pi > 1$ ,  $p > 1$ , sussiste la disuguaglianza

$$I \geq 2q - 8.$$

La verifica segue dal fatto che è

$$q \leq p + \pi \quad ; \quad \Delta \geq 0 \quad ; \quad 4(p - 1)(\pi - 1) \geq 2(p + \pi) - 4.$$

Orbene, dalla relazione di Nöther

$$(6) \quad I + p^{(1)} = 12p_a + 9,$$

si ricava che per le suddette superficie si ha

$$2q + p^{(1)} \leq 12p_a + 17.$$

Concludendo, se  $2q > p_a + 6$ , si ottiene

$$p^{(1)} < 11p_a + 11$$

e pertanto la (3),  $p^{(1)} < 11p_a + 17$ , è soddisfatta.

Le eventuali eccezioni della (3) vanno dunque ricercate fra le superficie dotate di un fascio *ellittico* di curve ( $\pi = 1$ ) per le quali siano soddisfatte tutte le relazioni seguenti:

$$p > 1 \quad ; \quad p_a < 2q - 6 \quad ; \quad p_a > q - 4 \quad (10).$$

Comunque per le suddette superficie sussiste sempre la disuguaglianza

$$p^{(1)} \leq 12p_a + 13 \quad (11),$$

come si deduce dalle (5), (6) per  $\pi = 1$ .

(9) La dimostrazione della disuguaglianza  $\Delta \geq 0$  nei casi più complessi è dovuta a Godeaux ed a Campedelli. (Cfr. ad esempio il trattato di ENRIQUES citato in <sup>(1)</sup>, p. 377).

(10) Infatti le superficie con  $p_a \leq q - 4$  ( $p_g \geq 2p_a + 4$ ) soddisfano addirittura la disuguaglianza (assai più forte della (3))

$$p^{(1)} \leq 8p_a + 9.$$

Ciò segue assai facilmente dalla circostanza che queste ultime superficie appartengono ad uno dei cinque tipi indicati da COMESSATTI («Rend. Circ. Matem. Palermo», tomo XLVI (1922), pp. 1-48):

a) rigate astratte di genere  $p_a \leq -2$ ;

b) superficie ellittiche con  $p_g > 1$ ;

c) particolari superficie con  $p^{(1)} = 1$ ,  $p_a \geq 0$ ;

d) superficie immagini delle coppie di punti di due curve di generi 2 ed  $h \geq 2$  ( $p_g = 2h$ ,  $p_a = h - 2$ ,  $p^{(1)} = 8p_a + 9$ );

e) eventualmente superficie dotate di un fascio di genere  $q$ , oppure  $q - 1$ , di curve di genere 2.

(11) Anzi, poiché si suppone  $p_a \geq 0$ , si ha  $p^{(1)} < 12p_a + 13$ , perché l'uguaglianza  $p^{(1)} = 12p_a + 13$  ( $I = -4$ ) vale soltanto quando  $p_a = -1$ . (Cfr. G. DANTONI, *Determinazione delle superficie con serie di Severi di ordine nullo o negativo*. «Memorie della Reale Accad. d'Italia», classe scienze, vol. XIV, n. 4 (1943)).

3. A chiarimento della questione trattata aggiungiamo le seguenti osservazioni.

Data una superficie irregolare  $\Phi$ , è sempre possibile costruire una superficie  $F$  che sia rappresentata  $n$ -plamente sulla  $\Phi$  senza curva di diramazione (e con  $n$  qualunque) <sup>(12)</sup>.

Fra i generi  $p^{(1)}$ ,  $p_a$  della  $\Phi$  e gli analoghi caratteri  $P^{(1)}$ ,  $P_a$  della  $F$  intercedono le relazioni <sup>(13)</sup>

$$P^{(1)} - 1 = n(p^{(1)} - 1)$$

$$P_a + 1 = n(p_a + 1).$$

Se è

$$p^{(1)} - 1 = \lambda(p_a + 1) + k$$

si ha in corrispondenza

$$P^{(1)} - 1 = \lambda(P_a + 1) + nk.$$

Da ciò si può ricavare tra l'altro che tutte le superficie irregolari con  $p_a \geq 0$  soddisfano la nota relazione

$$(7) \quad p^{(1)} - 1 \leq 12(p_a + 1).$$

Infatti i risultati dei paragrafi precedenti mostrano che, quando  $p_a \geq 0$ , si ha certo

$$(8) \quad p^{(1)} - 1 \leq 12(p_a + 1) + 3^{(14)}.$$

Ora, se esistesse una  $\Phi$  per cui

$$p^{(1)} - 1 = 12(p_a + 1) + h,$$

con  $1 \leq h \leq 3$ , si potrebbe costruire una  $F$  per la quale

$$P^{(1)} - 1 = 12(P_a + 1) + nh,$$

con  $n$  grande a piacere, e ciò risulta assurdo perché in contraddizione con la (8).

(12) Infatti, poiché  $\Phi$  possiede  $2g$  cicli lineari indipendenti non divisori dello zero, è possibile costruire sopra  $\Phi$  delle funzioni algebriche - ad un numero qualsiasi  $n$  di valori - prive di curva diramante; ad esempio funzioni con gruppo di monodromia ciclico; (cfr. A. COMESSATTI, *Sulle superficie multiple cicliche*, « Rend. Sem. Mat. Padova », vol. I, p. 577 (1930)).

Una costruzione topologico-gruppale di una fra le tante funzioni cosiffatte si ottiene assai semplicemente legando una medesima sostituzione ciclica di ordine  $n$  ai  $2g$  cicli predetti e la sostituzione identica agli eventuali cicli che generano il gruppo della torsione lineare di  $\Phi$ .

(13) Cfr. F. SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica*, « Rend. Ist. Lombardo », vol. XXXVI, pp. 495-511 (1903). Cfr. anche il trattato dell'ENRIQUES citato in <sup>(1)</sup>, p. 187.

(14) Tutte le superficie che soddisfano la (3)  $p^{(1)} < 11p_a + 17$ , soddisfano evidentemente anche la (8); e cosipure la (8) è verificata dalle eventuali eccezioni della (3), per le quali abbiamo visto sussistere la disuguaglianza (7).

In modo analogo si vede che, qualora si riuscisse a dimostrare, *per tutte le superficie irregolari con*  $p_a \geq 0$ , una relazione del tipo

$$p^{(1)} - 1 \leq \lambda (p_a + 1) + k$$

(con le costanti  $\lambda \leq 11$ ,  $k > 0$ ), questa potrebbe essere sostituita dalla relazione più espressiva

$$p^{(1)} - 1 \leq \lambda (p_a + 1).$$

Ricordiamo infine che recentemente G. Zappa ha emesso l'ipotesi che sia sempre

$$(9) \quad p^{(1)} \leq 8 p_a + 10$$

ed ha dimostrato tale disuguaglianza per alcuni tipi di superficie <sup>(15)</sup>.

Non conosciamo esempi che contraddicano la limitazione di Zappa; tuttavia osserviamo che, se si provasse l'esistenza di una superficie *irregolare*  $\Phi$  per cui  $p^{(1)}$  raggiunga il massimo  $8 p_a + 10$  indicato dalla (9), allora si potrebbero costruire come sopra delle superficie  $F$  per cui  $p^{(1)} = 8 p_a + 9 + n$  (con  $n$  grande a piacere) confutando in tal modo la limitazione stessa.

4. Nel n. 2 abbiamo visto che, per le superficie dotate di un fascio irrazionale (di genere  $\pi > 1$ ) di curve aventi il genere  $p > 1$ , sussiste la disuguaglianza

$$(10) \quad I \geq 2q - 8^{(16)}.$$

Tale disuguaglianza ha una validità molto più ampia in quanto essa è soddisfatta anche dalle superficie prive di fasci irrazionali, esclusa al più qualche superficie d'irregolarità 3, 4, 5 <sup>(17)</sup> (la cui esistenza sembra tut-

(15) Cfr. G. ZAPPA, *Sopra una probabile disuguaglianza fra i caratteri invariantivi di una superficie algebrica*, « Rend. di Matematica ». Roma, serie V, vol. XIV, fasc. 1-2 (1955).

Tra le superficie irregolari con il genere lineare più prossimo all'estremo superiore indicato da Zappa vi sono le superficie immagini delle coppie di punti di due curve algebriche, per le quali si ha  $p^{(1)} = 8 p_a + 9$ . (Cfr. DE FRANCHIS, « Rend. Circ. Mat. Palermo », XVII, (1903)).

Altri esempi con  $p^{(1)} = 8 p_a + 9$  sono stati costruiti da P. BURNIAT, in *Superficie algebriche di genere lineare grande*, « Boll. Un. Mat. Ital. », serie III, anno XI, n. 4 (1956).

(16) Se si lasciano cadere le restrizioni  $\pi > 1$ ,  $p > 1$ , la (10) non è sempre verificata. Si pensi, ad esempio, alle rigate ed alle superficie ellittiche aventi irregolarità  $q > 2$  (per le quali è notoriamente  $I \leq -4$ ).

(17) Infatti dalle (6), (2) del testo si ricava  $I \geq 2 p_a - 2q - 1$ ; e poiché per le superficie considerate sussiste la (4), (che equivale alla  $2 p_a \geq q^2 - 3q$ ), si deduce  $I \geq q^2 - 5q - 1$ . Di qui segue che per  $q > 5$  la (10) è soddisfatta. La (10) è vera anche per  $q = 2$ ; infatti allora essa diventa  $I \geq -4$ , relazione certamente verificata dalle superficie prive di fasci irrazionali, come mostrano le (7), (6).

Il caso  $q = 1$  implica l'esistenza di un fascio irrazionale (ma per  $q = 1$  la (10) sussiste di certo). Aggiungiamo infine che, tenendo conto dei risultati di Dantoni e di Nollet sulle superficie con serie di Severi di ordine 0 od 1, si potrebbe verificare che soddisfano la (10) anche le superficie (prive di fasci irrazionali) con  $q = 3$ . Volendo poi abbracciare anche le eventuali eccezioni con  $q = 4, 5$ , basterebbe sostituire la (10) con la limitazione  $I \geq 2q - 12$ .



tavia assai incerta). Ricordiamo inoltre che i numeri  $R_1$  ed  $R_2$  dei cicli omologicamente indipendenti (ad una e due dimensioni) appartenenti alla Riemanniana di una superficie algebrica sono legati all'invariante di Zeuthen-Segre dalla nota relazione di Picard-Alexander

$$R_2 = I + 2 R_1 + 2.$$

Di qui, e dal fatto che  $R_1 = 2g$ , si deduce che *gli indici di connessione delle superficie irregolari per cui è valida la (10) - cioè di tutte le superficie, esclusi i pochi tipi dianzi indicati - soddisfano la disuguaglianza*

$$R_2 \geq 3 R_1 - 6.$$

Il suindicato confine inferiore di  $R_2$  può essere effettivamente raggiunto, come mostra l'esempio delle superficie iperellittiche ( $R_1 = 4$ ,  $R_2 = 6$ ).

**Meccanica.** — *Sull'equilibrio limite dei materiali pesanti dotati di coesione ed attrito interno.* Nota di ARIO ROMITI, presentata (\*) dal Corrisp. C. FERRARI.

1. I materiali di cui si tratta sono quelli che obbediscono alla legge di Coulomb sulle azioni di contatto tra superfici di scorrimento. Questa legge è rispettata abbastanza bene dalle terre, dai materiali sciolti in genere e da una vasta categoria di solidi plastici.

Scopo della presente Nota è determinare - in problemi bidimensionali - le distribuzioni di tensione nei materiali in condizioni di incipiente scorrimento, come è necessario sia per calcolare spinte contro pareti di sostegno, sia per prevedere il carico massimo sopportabile dal materiale (per esempio nel caso delle fondazioni).

Come applicazione numerica, si sono calcolate le pressioni agenti sulle pareti di silos indefiniti, per alcuni valori dei coefficienti di attrito.

2. La relazione tra le tensioni unitarie data dalla legge di Coulomb è:

$$(1) \quad \tau = c + (n - p) \operatorname{tg} \varphi = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi$$

( $\tau$  tensione tangenziale;  $c$  fattore di coesione;  $n$  sforzo normale totale;  $p$  pressione idrostatica dell'eventuale liquido interstiziale;  $\varphi$  angolo di attrito interno;  $\sigma$  sforzo normale sulla fase solida; ove  $n$  e  $\sigma$  sono positivi se indicano sforzi di compressione).

In base alla (1) è possibile separare i problemi interessanti le fasi liquida e solida del materiale; solo quest'ultima è stata perciò considerata.

La superficie intrinseca del materiale, nel senso di Caquot, è definita dalla (1) come il cono circolare di cui è rappresentata in fig. 1 la traccia in un piano  $\sigma, \tau$  generico.

(\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

Siano  $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta$  le tensioni principali.

I cerchi di Mohr massimi relativi ad ogni punto del materiale in equilibrio limite sono involuppati dalla traccia del cono.

Le tensioni principali massima  $\sigma_\eta$  e minima  $\sigma_\xi$  sono quindi esprimibili in funzione della tensione normale media  $\sigma_m$ :

$$(2) \quad \begin{cases} (H + \sigma_\eta) = (1 + \sin \varphi) (H + \sigma_m) \\ (H + \sigma_\xi) = (1 - \sin \varphi) (H + \sigma_m) \end{cases}$$

ove  $H = c/\operatorname{tg} \varphi$ .

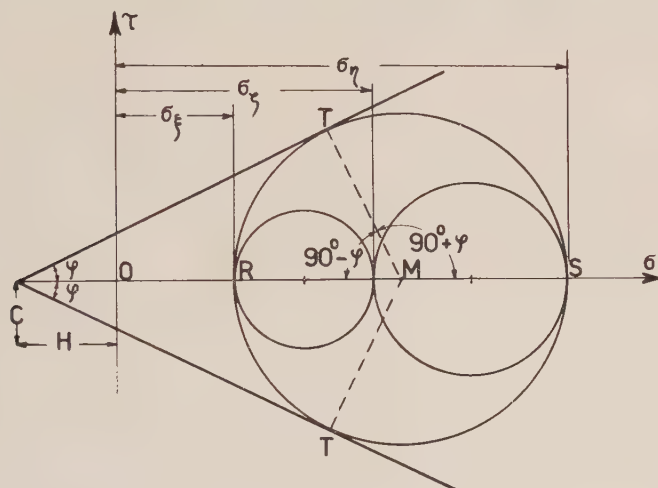


Fig. 1.

La condizione dell'equilibrio limite può esser posta in forma simmetrica nelle tensioni principali:

$$(3) \quad \Pi \left\{ \left[ \sigma_i - \sigma_j \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \varphi/2 \right) \right] - 2c \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \varphi/2 \right) \right\} = 0$$

ove  $\Pi$  è il simbolo di prodotto, ed  $i, j = \xi, \eta, \zeta$  ( $i \neq j$ ).

Se è  $\varphi = 0$ , la (3) coincide con la condizione di Tresca del « massimo sforzo di taglio costante » su cui è basata la teoria dei solidi perfettamente plastici.

3. Si consideri un sistema materiale piano; le (2) definiscono le condizioni di equilibrio limite.

Si scelga un sistema di assi ortogonali  $x, y$  (quest'ultimo diretto verticalmente verso il basso); sia  $\gamma$  il peso specifico del materiale.

Le equazioni indefinite di equilibrio sono:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma. \end{cases}$$

Si chiami  $\alpha$  l'angolo di cui le direzioni di  $\sigma_\xi$ ,  $\sigma_\eta$  sono ruotate rispetto ad  $x$ ,  $y$ . Esprimendo le tensioni agenti secondo gli assi coordinati in funzione delle tensioni principali, e sostituendo a queste le loro espressioni (2), risulta:

$$(5) \quad \begin{cases} \sigma_x = (\sigma_m + H) (1 - \sin \varphi \cos 2\alpha) - H \\ \sigma_y = (\sigma_m + H) (1 + \sin \varphi \cos 2\alpha) - H \\ \tau_{xy} = -(\sigma_m + H) \sin \varphi \sin 2\alpha. \end{cases}$$

Le (4) e (5) definiscono un sistema di due equazioni alle derivate parziali, non lineare né omogeneo, di tipo iperbolico, nelle incognite  $\sigma_m$ ,  $\alpha$ , da cui possono trarsi le equazioni delle caratteristiche:

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left[ \alpha \pm \left( \frac{\pi}{4} + \varphi/2 \right) \right]$$

$$(7) \quad \frac{d\sigma_m}{ds} \mp 2(\sigma_m + H) \operatorname{tg} \varphi \frac{d\alpha}{ds} = \gamma \frac{\cos \left[ \alpha \mp \left( \frac{\pi}{4} + \varphi/2 \right) \right]}{\cos \varphi}$$

ove i doppi segni sono tra loro congruenti, e la (7) è scritta nelle variabili  $s$  lungo le caratteristiche.

Dalla (6) deriva che le caratteristiche passanti per un punto hanno tangenti simmetriche rispetto alle direzioni principali  $\xi$ ,  $\eta$ , con cui formano rispettivamente gli angoli  $\frac{\pi}{4} + \varphi/2$  e  $\frac{\pi}{4} - \varphi/2$ .

Pari valore hanno (ved. fig. 1) gli angoli  $1/2 \hat{\text{SMT}}$  e, rispettivamente,  $1/2 \hat{\text{TMR}}$ , formati dalle direzioni di scorrimento con le direzioni principali.

Le linee di scorrimento coincidono perciò con le caratteristiche.

4. Le equazioni delle caratteristiche e le condizioni al contorno definiscono completamente il problema.

La linea che rappresenta il contorno del campo d'integrazione è costituita da due parti: l'una,  $\mathcal{L}_0$ , su cui sono assegnate le tensioni applicate e quindi i valori delle funzioni  $\sigma_m$ ,  $\alpha$ ; l'altra,  $\mathcal{L}'$ , su cui si conosce solo il coefficiente d'attrito tra il mezzo e la parete di contorno.

$\mathcal{L}_0$  è la traccia del profilo libero del materiale;  $\mathcal{L}'$  è la parte del contorno ove il materiale è a contatto con i vincoli esterni. Gli spostamenti dei vincoli devono esser tali da produrre in ogni elemento del mezzo in esame deformazioni compatibili solo con lo stato di equilibrio limite.

Sia  $O$  un punto di intersezione di  $\mathcal{L}_0$  ed  $\mathcal{L}'$ .

Possono verificarsi i seguenti casi:

a) La regione  $\mathcal{R}$  compresa tra  $\mathcal{L}_0$  ed  $\mathcal{L}'$  è interna all'angolo formato dalle caratteristiche passanti per  $O$  ( $\mathcal{L}_0$  ed  $\mathcal{L}'$  non sono in alcun punto tangenti ad una caratteristica) (ved. fig. 2 a): si ha il problema di Cauchy in  $\mathcal{R}$ ; le tensioni sono indipendenti dalle condizioni fisiche su  $\mathcal{L}'$ .

b) La regione  $\mathcal{R}$  è divisa, da una caratteristica  $\mathcal{C}$  passante per  $O$ , in due subregioni  $\mathcal{R}_0$  (compresa tra  $\mathcal{L}_0$  e  $\mathcal{C}$ ), ed  $\mathcal{R}'$  (compresa tra  $\mathcal{C}$  ed  $\mathcal{L}'$ ) (ved. fig. 2 b);

c) La regione  $\mathcal{R}$  è divisa, da una caratteristica  $\mathcal{C}_T$ , tangente ad  $\mathcal{L}'$ , nelle subregioni  $\mathcal{R}_0^I$  (compresa tra  $\mathcal{L}_0$  e  $\mathcal{C}_T$ ),  $\mathcal{R}_0^{II}$  (tra  $\mathcal{L}_0$  ed  $\mathcal{L}'$ ), ed  $\mathcal{R}'$  (tra  $\mathcal{C}_T$ , ed  $\mathcal{L}'$ ) (ved. fig. 2 c).

Nei casi b) e c) è possibile risolvere il problema di Cauchy nelle subregioni  $\mathcal{R}_0$  (adiacenti alla parte  $\mathcal{L}_0$  del contorno, su cui le funzioni  $\sigma_m$ ,  $\alpha$  sono assegnate), mentre nella subregione  $\mathcal{R}'$ , compresa fra una caratteristica ed  $\mathcal{L}'$ , può risolversi il problema misto, che è definito assegnando una condizione su  $\mathcal{L}'$ .

Basta a tal uopo tener presente che gli spostamenti al contatto rendono possibile il dispiegamento, nella sua intera misura, dell'attrito tra il sostegno di  $\mathcal{L}'$  ed il materiale.

Si può così assegnare su  $\mathcal{L}'$  il valore di  $\alpha$ , generalmente, come si vedrà, in funzione di  $\sigma_m$ .

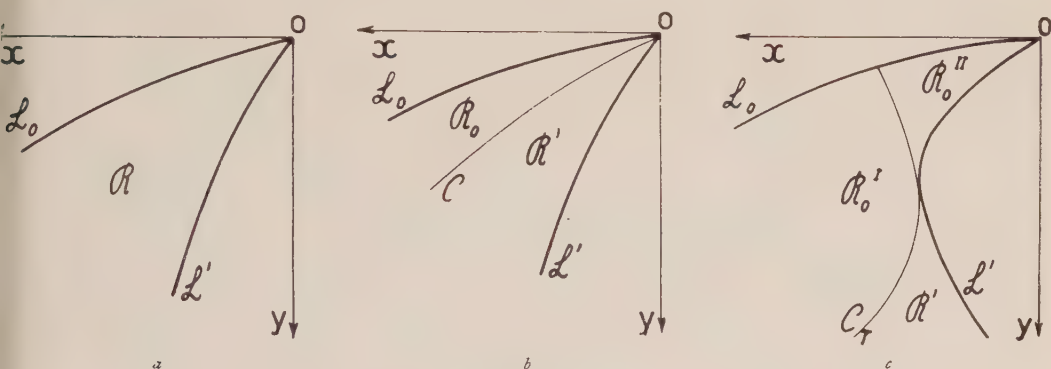


Fig. 2.

d) La linea  $\mathcal{L}_0$  coincide con una caratteristica: la regione  $\mathcal{R}$  si riduce allora ad  $\mathcal{R}'$ , e vi si può risolvere il problema misto.

e) La linea  $\mathcal{L}'$  coincide con una caratteristica: nella regione  $\mathcal{R}'$  le caratteristiche della stessa famiglia formano fascio con centro O.

L'equilibrio limite può sussistere solo nella regione in cui esistono caratteristiche che, da  $\mathcal{L}_0$ , raggiungono  $\mathcal{L}'$ ; non potrebbe perciò darsi il caso in cui entrambe le caratteristiche per O fossero comprese in  $\mathcal{R}$ .

5. I valori al contorno sono determinati dalle condizioni di equilibrio di un'area elementare adiacente ad  $\mathcal{L}_0$ , o ad  $\mathcal{L}'$ , tenuto conto delle (2).

Si ottengono due possibili soluzioni, contraddistinte da valori maggiori o minori delle tensioni al contorno.

Tali soluzioni corrispondono rispettivamente ai due casi, in cui gli spostamenti dei vincoli sono causati da forze ad essi applicate dall'esterno, od invece trasmesse attraverso il mezzo.

Nel primo caso l'equilibrio limite è detto superiore; nel secondo, inferiore.

Le doppie soluzioni (od i doppi segni che le rappresentano), sono sempre qui indicate in quest'ordine.



Sia  $\omega$  l'inclinazione (positiva in fig. 3 *a*) dell'elemento considerato di  $\mathcal{L}_0$  sull'asse  $x$ ; siano  $\sigma_0$ ,  $\tau_0$  le tensioni applicate dall'esterno ad  $\mathcal{L}_0$ ; la tensione tangenziale è positiva se la direzione della risultante è ottenuta ruotando in senso antiorario la direzione della tensione normale.

Le funzioni  $\sigma_{m0}$  ed  $\alpha_0$  su  $\mathcal{L}_0$  valgono:

$$(8) \quad \operatorname{tg}(\alpha_0 - \omega) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \varphi/2\right) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\frac{\tau_0}{\sigma_0 + H}} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_0/(\sigma_0 + H)}{\operatorname{tg} \varphi}\right)^2} \right]$$

$$(9) \quad \sigma_{m0} = (\sigma_0 + H) \frac{1 + \operatorname{tg}^2(\omega - \alpha_0)}{(1 + \operatorname{sen} \varphi) \left[ 1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \varphi/2\right) \operatorname{tg}^2(\omega - \alpha_0) \right]} - H.$$

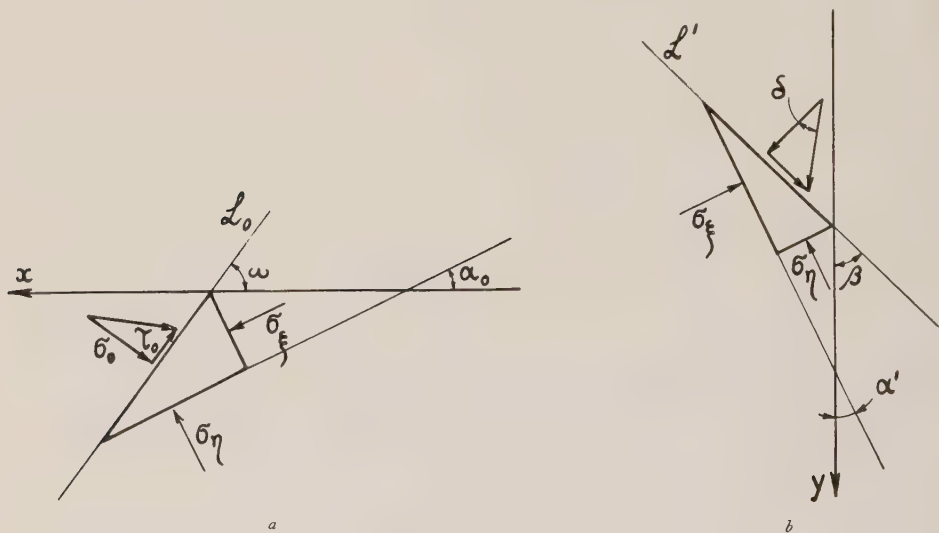


Fig. 3.

Se  $\left| \frac{\tau_0}{\sigma_0 + H} \right| > \operatorname{tg} \varphi$ , l'equilibrio statico è impossibile; se  $\left| \frac{\tau_0}{\sigma_0 + H} \right| = \operatorname{tg} \varphi$ ,  $\mathcal{L}_0$  è tangente ad una caratteristica.

Quando  $\tau_0 = 0$ , si ha:  $\alpha_0 = \omega + (\pi/2)$ , od  $\alpha_0 = \omega$ , nei due casi.

Quando  $\tau_0 = \sigma_0 = 0$ , si ha ancora, se  $H \neq 0$ ,  $\alpha_0 = \omega + (\pi/2)$ , od  $\alpha_0 = \omega$ .

Se invece  $H = 0$  (materiale incoerente), si ricava:

$$(10) \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi/2\right) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \omega} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \varphi}\right)^2} \right]$$

Se  $|\operatorname{tg} \omega| > \operatorname{tg} \varphi$ , l'equilibrio statico è impossibile; se  $|\operatorname{tg} \omega| = \operatorname{tg} \varphi$ ,  $\mathcal{L}_0$  è tangente ad una caratteristica.

Qualora infine sia  $\omega = 0$ , si ha:  $\alpha_0 = (\pi/2)$ , od  $\alpha_0 = 0$ , rispettivamente.

Si chiami ora  $\beta$  l'inclinazione (positiva in fig. 3 *b*), dell'elemento considerato di  $\mathcal{L}'$  sull'asse  $y$ ; sia  $\operatorname{tg} \delta = \tau'/\sigma'$  la tangente dell'angolo formato dalla tensione applicata ad  $\mathcal{L}'$  con l'elemento stesso, che, nei casi visti al numero precedente, vale l'angolo d'attrito alla parete.

Tra le funzioni  $\alpha'$  e  $\sigma'_m$  su  $\mathcal{L}'$  vale la relazione:

$$(11) \quad \operatorname{tg} (\alpha' - \beta) = \frac{-1}{\operatorname{tg} \delta \left[ 1 + \frac{\sigma'_m}{(\sigma'_m + H) \operatorname{sen} \varphi} \right]} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \delta \left[ \left( \frac{\sigma'_m}{(\sigma'_m + H) \operatorname{sen} \varphi} \right)^2 - 1 \right]} \right\}$$

L'equilibrio statico sussiste per  $|\operatorname{sen} \delta| \leq \operatorname{sen} \varphi |1 + H/\sigma'_m|$ ; l'angolo  $|\delta|$  non può mai assumere valori superiori.

Se il materiale è incoerente si ha:

$$(12) \quad \operatorname{tg} (\alpha' - \beta) = - \frac{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \varphi/2 \right)}{\operatorname{tg} \delta} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{\operatorname{tg}^2 \varphi}} \right]$$

e l'angolo  $\alpha'$  risulta indipendente da  $\sigma'_m$ .

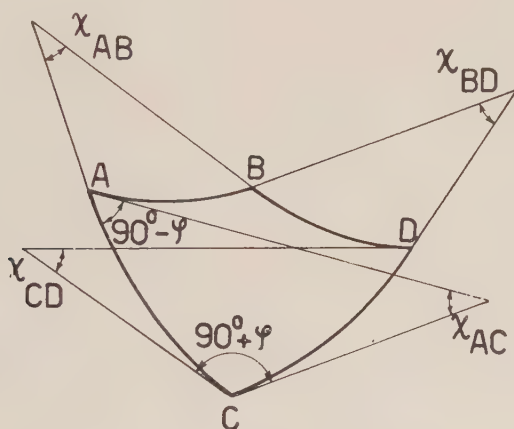


Fig. 4.

Il valore massimo che  $|\delta|$  può assumere vale  $\varphi$ . Se questa uguaglianza è verificata,  $\mathcal{L}'$  è tangente ad una caratteristica.

Quando è  $\delta = 0$ , si ha:  $\alpha' = \beta + (\pi/2)$ , od  $\alpha' = \beta$ , nei due casi.

6. Si consideri un materiale incoerente; sia  $\mathcal{L}_0$  rettilinea, e nessuna tensione vi sia applicata.

Nella regione  $\mathcal{R}_0$  la soluzione ricavata da Rankine per un masso illimitato soddisfa le equazioni di equilibrio e le condizioni al contorno:

$\alpha = \alpha_0 = \text{costante data dalla (10)}$

$$(13) \quad \sigma_m = \gamma \frac{\cos^2 \omega}{\cos^2 \varphi} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \omega}} \right] (y - x \operatorname{tg} \omega).$$

Le caratteristiche costituiscono due famiglie di rette parallele.

Se è pure  $\mathcal{L}'$  rettilinea, e costante il coefficiente d'attrito tra il materiale ed il sostegno di  $\mathcal{L}'$ , conviene scrivere le equazioni dell'equilibrio limite in coordinate polari  $\rho$  e  $\theta$ :

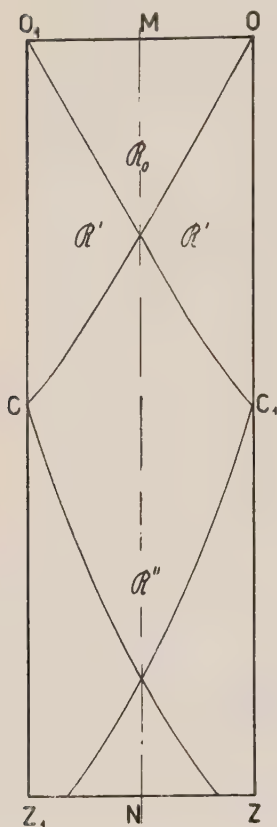


Fig. 5.

$$(14) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho} \sigma_m [1 - \sin \varphi \cos 2(\alpha - \theta)] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_m \sin \varphi \sin 2(\alpha - \theta) - \\ & - 2 \sigma_m \frac{\sin \varphi \cos 2(\alpha - \theta)}{\rho} = \gamma \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho} \sigma_m [1 + \sin \varphi \cos 2(\alpha - \theta)] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_m \sin \varphi \sin 2(\alpha - \theta) - \\ & - 2 \sigma_m \frac{\sin \varphi \sin 2(\alpha - \theta)}{\rho} = \gamma \cos \theta. \end{aligned}$$

Ponendo  $\sigma_m = \rho S_m(\theta)$ ;  $\alpha = \alpha(\theta)$ , è possibile eliminare dalle (14) la variabile  $\rho$ . Si ottiene un sistema di due equazioni differenziali ordinarie, compatibili con le condizioni al contorno, nella variabile indipendente  $\theta$  e nelle incognite  $S_m$  ed  $\alpha$ .

Le tensioni risultano proporzionali ai raggi  $\rho$ ; modulo e direzione sono inoltre funzioni di  $\theta$ . Le caratteristiche sono tra loro omotetiche e l'origine  $O$  è il centro dell'omotetia.

7. Si consideri ora un materiale di cui possa esser trascurato il peso di fronte alle tensioni trasmesse.

Le equazioni (7) soddisfatte lungo le caratteristiche possono scriversi:

$$(15) \quad \frac{d}{ds} \left[ \frac{\log(\sigma_m + H)}{2 \operatorname{tg} \varphi} \mp \alpha \right] = 0.$$

Le quantità tra parentesi quadre sono invarianti lungo le caratteristiche cui si riferiscono.

Da questa proprietà deriva che le tangenti a due curve di una famiglia di caratteristiche nei punti d'intersezione con una qualsiasi curva dell'altra famiglia, formano fra loro angoli  $\chi$  costanti.

Siano  $m, n, p, q$ , gli invarianti lungo i tronchi  $AB, CD$  e  $AC, BD$  di caratteristica (ved. fig. 4).

I valori di  $\alpha$  nei vertici del quadrilatero di fig. 4 risultano:

$$\alpha_A = \frac{p-m}{2} \quad ; \quad \alpha_B = \frac{q-m}{2}$$

$$\alpha_C = \frac{p-n}{2} \quad ; \quad \alpha_D = \frac{q-n}{2}$$

$$\chi_{AB} = \chi_{CD} = \frac{p-q}{2} \quad ; \quad \chi_{AC} = \chi_{BD} = \frac{n-m}{2}$$

Le equazioni (15) possono essere integrate nelle:

$$(16) \quad \sigma_m + H = (\sigma_{m0} + H) \exp [\pm 2 (\alpha - \alpha_0) \operatorname{tg} \varphi]$$

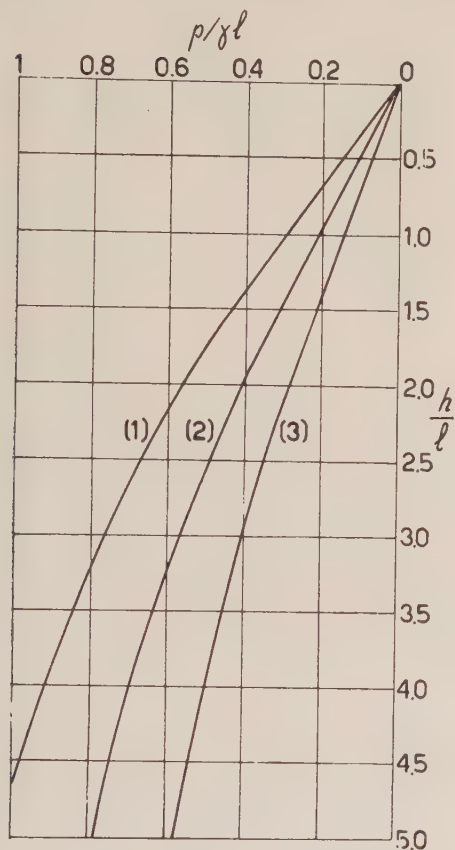


Fig. 6.

- (1):  $\varphi = 30^\circ$
- (2):  $\varphi = 37^\circ 30'$
- (3):  $\varphi = 45^\circ$

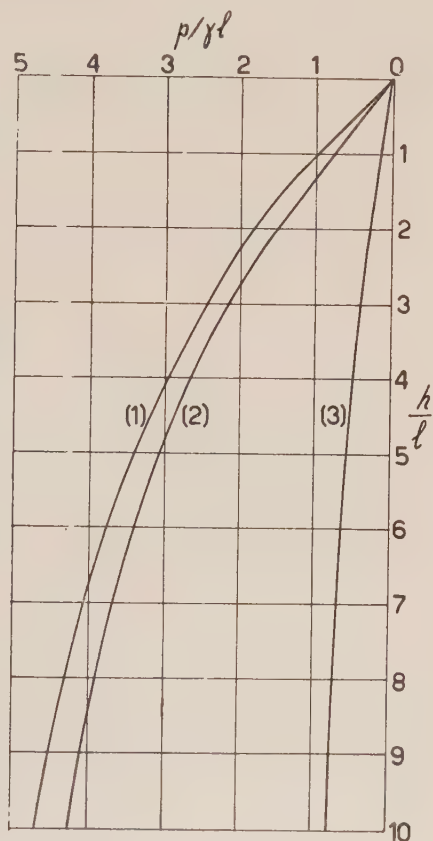


Fig. 7.

- (1): pressione sul fondo in mezzeria
- (2): pressione sul fondo al contorno
- (3): pressione sulle pareti laterali

che risolvono il problema nel piano delle tensioni.

Se è  $\sigma_m$  costante su  $\mathcal{L}_0$ , ed  $\alpha$  costante su  $\mathcal{L}_0$  ed  $\mathcal{L}'$ , il problema al contorno è risolto da quella delle (16) valevole per le caratteristiche che da  $\mathcal{L}_0$  raggiungono  $\mathcal{L}'$ ; le (16) danno perciò allora le due soluzioni su  $\mathcal{L}'$  nell'ordine consueto.

Nel caso in cui  $\varphi = 0$ ,  $\gamma = 0$ , le equazioni (7) divengono:

$$(17) \quad \frac{d}{ds} (\sigma_m \mp 2 c \alpha) = 0$$

e le caratteristiche formano una rete di Hencky-Prandtl.



8. Sia  $OZZ_1 O_1$  (ved. fig. 5) sezione trasversale di un silo indefinito. Si ritengono incoerenti i materiali insilati, e sufficienti gli spostamenti elastici delle pareti a stabilire nel materiale le condizioni di equilibrio limite inferiore.

Essendo orizzontale il contorno superiore, le caratteristiche  $OC, OC_1$  uscenti da  $O$  ed  $O_1$  individuano un triangolo rettilineo  $\mathcal{R}_0$  in cui sussiste l'equilibrio di Rankine con  $\alpha = 0$ .

Nelle regioni  $\mathcal{R}'$  si ha proporzionalità tra pressioni laterali e profondità. Nella regione  $\mathcal{R}''$  il problema è definito dalle intersezioni delle caratteristiche « riflesse » dalle due pareti.

Sul fondo piano, la soluzione è indipendente dalle condizioni fisiche locali. Per simmetria, si ha sull'asse  $MN$  del silo  $\alpha = 0$ .

L'angolo d'attrito tra materiale e parete è stato supposto pari a  $2/3 \varphi$ .

I valori al contorno, nei casi considerati, sono stati desunti dalla (10): per

$$\varphi = 30^\circ, \delta = -20^\circ : \alpha' = 11^\circ 35'$$

$$\varphi = 37^\circ 30', \delta = -25^\circ : \alpha' = 9^\circ 31'$$

$$\varphi = 45^\circ, \delta = -30^\circ : \alpha' = 7^\circ 30'$$

In fig. 6 sono date, in forma adimensionale, le pressioni  $p$  sulle pareti laterali;  $l$  ed  $h$  sono rispettivamente la larghezza e la profondità del silo. In fig. 7 sono confrontate, per  $\varphi = 45^\circ$ , le pressioni sulle pareti e sul fondo; queste ultime variano poco al variare di  $\varphi$ .

#### BIBLIOGRAFIA.

- BOUSSINESQ J., *Note sur la poussée horizontale d'une masse de sable, à propos des expériences de Darwin* (« Ann. Ponts et Chaussées », t. 6, 1883).
- CAQUOT A. e KERISEL J., *Traité de Mécanique des sols* (Gauthier-Villars, Paris, 1956).
- PRAGER W. e HODGE P., *Theory of perfectly plastic solids* (J. Wiley & Sons, N. Y., 1951).
- PRAGER W., *A geometrical discussion of the slip line field in plane plastic flow* (« Trans. Royal Inst. Techn. Stockholm », n. 65, 1953).
- PETROVSKY I. G., *Lectures on partial differential equations* (Interscience Publishers, N. Y., 1954).
- RANKINE M., *On the stability of loose earth* (« Proc. Royal Society », London, vol. 147 1857).
- TERZAGHI K., *Theoretical soil mechanics* (Chapman and Hall, London, 1947).
- TIMOSHENKO S., *Strength of materials* (Van Nostrand, N. Y., 1945).

**Magneto idrodinamica.** — *Figure di equilibrio ellissoidali per una massa fluida elettricamente conduttrice uniformemente rotante, con campi magnetici variabili col tempo.* Nota di CATALDO AGOSTINELLI, presentata (\*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. In una Nota di qualche anno fa <sup>(1)</sup> avevo dimostrato la possibilità di figure ellissoidali rotonde per una massa fluida omogenea incompressibile, elettricamente conduttrice, soggetta alla propria gravitazione e immersa in un campo magnetico uniforme, con generazione di particolari campi magnetici stazionari. Successivamente in un'altra Nota <sup>(2)</sup>, sotto le stesse ipotesi, dimostrai anche la compatibilità di una forma ellissoidale a tre assi, invariabile rispetto a un osservatore fisso, in cui le particelle fluide avevano un moto ellittico intorno all'asse minore.

Ma l'esistenza di stelle con campi magnetici variabili col tempo, a volte anche fortemente, la cui scoperta come si sa fu fatta per primo da Babcock, mi ha indotto a ricercare per una massa fluida incompressibile, elettricamente conduttrice, uniformemente rotante e soggetta alla propria gravitazione, figure ellissoidali in cui si generino campi magnetici dipendenti dal tempo.

I risultati esposti in questa Nota dimostrano appunto come per una massa fluida in questione si possono avere figure ellissoidali, che risultano a tre assi, uniformemente rotanti, in cui le componenti del campo magnetico rispetto a una terna di assi fissi variano, nell'interno della massa, linearmente con le coordinate del punto e rispetto al tempo sono periodiche, con periodo uguale a quello di rotazione della massa fluida.

2. Con riferimento ad una massa fluida omogenea incompressibile di densità costante  $\rho_0$ , elettricamente conduttrice, di permeabilità magnetica  $\mu$  e conduttività elettrica  $\sigma$ , che supponiamo costanti, le equazioni che governano il movimento e la distribuzione del campo magnetico in essa, quando si trascuri la corrente di spostamento in confronto della corrente di conduzione, sono notoriamente

$$(1) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot} (\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}) + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \text{rot rot } \mathbf{H} = 0$$

$$(2) \quad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

(\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

(1) C. AGOSTINELLI, *Soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto idrodinamica interessanti la Cosmogonia* (« Rendiconti dell'Accad. Naz. dei Lincei », serie VIII, vol. XVII, fasc. 5, nov. 1954).

(2) C. AGOSTINELLI, *Sulla compatibilità di una forma ellissoidale a tre assi per una massa fluida cosmica rotante, elettricamente conduttrice, immersa in un campo magnetico uniforme.* (« Bollettino della Unione Matematica Italiana », Serie III, Anno X, n. 1, marzo 1955).

$$(3) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} - \frac{\mu}{4\pi\rho_0} \text{rot } \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = -\text{grad} \left( \frac{1}{\rho_0} p + \frac{1}{2} v^2 - U \right)$$

$$(4) \quad \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

dove  $U$  è il potenziale delle forze non elettromagnetiche agenti sul fluido. Supporremo che la massa sia soggetta unicamente alla propria gravitazione; allora  $U$  sarà il potenziale newtoniano in punti interni ad essa. Supporremo inoltre che essa ruoti uniformemente con velocità angolare costante  $\omega$  intorno a un suo asse baricentrale fisso  $Oz$ ,  $[\mathbf{v} = \omega \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})]$ .

In questo caso, supponendo ancora che rispetto a una terna di assi cartesiani fissi  $O(x, y, z)$  le componenti  $H_x, H_y, H_z$  del campo magnetico siano indipendenti dalla coordinata assiale,  $z$ , la condizione di solenoidalità (2) è soddisfatta ponendo

$$(5) \quad H_x = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad H_y = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad H_z = H_z(x, y, t),$$

con  $V$  funzione incognita di  $x, y, t$ . L'equazione (1), proiettata sugli assi  $x, y$ , porge allora le seguenti equazioni scalari

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial V}{\partial x} - x \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \frac{\partial \Delta_2 V}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} - \omega \frac{\partial}{\partial x} \left( y \frac{\partial V}{\partial x} - x \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \frac{\partial \Delta_2 V}{\partial x} = 0, \quad \left( \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

da cui segue l'integrale

$$(6) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \omega \left( x \frac{\partial V}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \Delta_2 V = f(t),$$

con  $f(t)$  funzione arbitraria del tempo, eventualmente costante.

Analogamente proiettando la (1) sull'asse  $z$  si ha

$$(7) \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} + \omega \left( x \frac{\partial H_z}{\partial y} - y \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \Delta_2 H_z = 0.$$

L'equazione (3) nel caso considerato diventa

$$\frac{\mu}{4\pi\rho_0} \text{rot } \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = \text{grad} \left[ \frac{1}{\rho_0} p - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - U \right]$$

e poiché risulta

$$\text{rot } \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = -\Delta_2 V \cdot \text{grad } V + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{k} - \frac{1}{2} \text{grad } H_z^2,$$

dove  $\mathbf{k}$  è il versore dell'asse  $z$ , si ha ancora

$$(8) \quad \begin{aligned} & \frac{\mu}{4\pi\rho_0} \left[ -\Delta_2 V \cdot \text{grad } V + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{k} \right] = \\ & = \text{grad} \left[ \frac{1}{\rho_0} p - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{\mu}{8\pi\rho_0} H_z^2 - U \right]. \end{aligned}$$

3. Ciò premesso cerchiamo della (6) soluzioni della forma

$$(9) \quad V = \frac{1}{2} (\alpha_{11} x^2 + \alpha_{22} y^2) + \alpha_{12} xy + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3$$

dove i coefficienti  $\alpha$  sono funzioni del tempo da determinare. Sostituendo nella (6) si ha che questi coefficienti devono verificare le equazioni

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha'_{11} + 2 \omega \alpha_{12} = 0 \\ \alpha'_{22} - 2 \omega \alpha_{12} = 0 \\ \alpha'_{12} + \omega \alpha_{22} - \omega \alpha_{11} = 0 \end{cases} \quad (11) \quad \begin{cases} \alpha'_1 + \omega \alpha_2 = 0 \\ \alpha'_2 - \omega \alpha_1 = 0 \\ \alpha'_3 - \frac{c^2}{4 \pi \mu \sigma} (\alpha_{11} + \alpha_{22}) = f(t) \end{cases}$$

dove gli apici indicano derivazione rispetto al tempo.

Le (10) e le prime due delle (11) porgono

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha_{12} = C_0 \sin 2(\omega t + \gamma_0) \\ \alpha_{11} = A_0 + C_0 \cos 2(\omega t + \gamma_0) \\ \alpha_{22} = A_0 - C_0 \cos 2(\omega t + \gamma_0), \end{cases} \quad (13) \quad \begin{cases} \alpha_1 = C_1 \cos(\omega t + \gamma_1) \\ \alpha_2 = C_1 \sin(\omega t + \gamma_1), \end{cases}$$

essendo  $C_0, \gamma_0, A_0$ ;  $C_1, \gamma_1$  costanti arbitrarie.

La terza delle (11) dà  $\alpha_3$  con una quadratura, e se si sceglie

$$f = -2 A_0 \cdot \frac{c^2}{4 \pi \mu \sigma}$$

risulta  $\alpha_3$  una costante arbitraria.

Cercando invece della (7) soluzioni lineari in  $x$  e  $y$ , cioè del tipo

$$H_z = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3,$$

con  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  funzioni del tempo, si hanno per questi coefficienti le equazioni

$$\beta'_1 + \omega \beta_2 = 0, \quad \beta'_2 - \omega \beta_1 = 0, \quad \beta'_3 = 0,$$

e quindi

$$\beta_1 = C_2 \cos(\omega t + \gamma_2), \quad \beta_2 = C_2 \sin(\omega t + \gamma_2), \quad \beta_3 = H_0 \text{ (costante)},$$

essendo al solito  $C_2$  e  $\gamma_2$  costanti arbitrarie. Ne segue

$$H_z = C_2 [x \cos(\omega t + \gamma_2) + y \sin(\omega t + \gamma_2)] + H_0.$$

Imponiamo ora la condizione

$$\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0,$$

la quale richiede che sia

$$\alpha_{11} \beta_2 - \alpha_{12} \beta_1 = 0$$

$$\alpha_{12} \beta_2 - \alpha_{22} \beta_1 = 0$$

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0,$$



e queste sono identicamente verificate ponendo

$$A_0 = C_0, \quad \gamma_2 = \gamma_1 = \gamma_0.$$

Avremo allora

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = C_0 [x \cos(\omega t + \gamma_0) + y \sin(\omega t + \gamma_0)]^2 + \\ \quad + C_1 [x \cos(\omega t + \gamma_0) + y \sin(\omega t + \gamma_0)] + \alpha_3 \\ H_z = C_2 [x \cos(\omega t + \gamma_0) + y \sin(\omega t + \gamma_0)] + H_0. \end{array} \right.$$

Risulta quindi

$$\Delta_2 V = 2 C_0$$

e la (8) diventa

$$\text{grad} \left\{ \frac{1}{\rho_0} p - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{\mu}{4\pi\rho_0} \left( 2 C_0 V + \frac{1}{2} H_z^2 \right) - U \right\} = 0,$$

che porge l'integrale

$$(15) \quad \frac{1}{\rho_0} p - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + \frac{\mu}{4\pi\rho_0} \left( 2 C_0 V + \frac{1}{2} H_z^2 \right) - U = \text{cost.}$$

Se ora ci riferiamo ad una terna di assi  $O(\xi, \eta, z)$  solidali con la massa fluida, e quindi ruotanti uniformemente intorno all'asse  $Oz$  con velocità angolare costante  $\omega$ , possiamo porre

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \xi \sin(\omega t + \gamma_0) + \eta \cos(\omega t + \gamma_0) \\ y = -\xi \cos(\omega t + \gamma_0) + \eta \sin(\omega t + \gamma_0) \end{array} \right.$$

e allora risulta

$$(17) \quad V = C_0 \eta^2 + C_1 \eta + \alpha_3, \quad H_z = C_2 \eta + H_0.$$

Ne segue che se poniamo

$$(18) \quad C_2 = -2 \frac{C_0 C_1}{H_0}$$

si ha

$$2 C_0 V + \frac{1}{2} H_z^2 = 2 C_0^2 \left( 1 + \frac{C_1^2}{H_0^2} \right) \eta^2 + 2 C_0 \alpha_3 + \frac{1}{2} H_0^2$$

e ponendo ancora per semplicità

$$\kappa_0^2 = \frac{\mu}{\pi\rho_0} C_0^2 \left( 1 + \frac{C_1^2}{H_0^2} \right)$$

l'integrale (15) diventa

$$(19) \quad \frac{1}{\rho_0} p - \frac{1}{2} \omega^2 (\xi^2 + \eta^2) + \frac{1}{2} \kappa_0^2 \eta^2 - U = \text{cost.}$$

il quale definisce la pressione in ogni punto interno alla massa fluida. Nel caso considerato, in virtù delle (5) e delle (14), le componenti del campo magnetico, con riferimento alla terna fissa  $O(x, y, z)$  risultano

$$(20) \quad \begin{cases} H_x = -C_0 [x \cos(\omega t + \gamma_0) + y \sin(\omega t + \gamma_0)] \sin(\omega t + \gamma_0) - C_1 \sin(\omega t + \gamma_0) \\ H_y = C_0 [x \cos(\omega t + \gamma_0) + y \sin(\omega t + \gamma_0)] \cos(\omega t + \gamma_0) + C_1 \cos(\omega t + \gamma_0) \\ H_z = -\frac{2C_0 C_1}{H_0} [x \cos(\omega t + \gamma_0) + y \sin(\omega t + \gamma_0)] + H_0. \end{cases}$$

4. Sulla superficie libera sarà  $p = 0$  e avremo quindi per la (19)

$$(21) \quad \frac{1}{2} \omega^2 \xi^2 + \frac{1}{2} (\omega^2 - \kappa_0^2) \eta^2 + U = \text{cost.}$$

Se vogliamo che questa superficie sia un ellissoide di semiassi  $a, b, c$ , poiché il potenziale  $U$  in questo caso avrà l'espressione

$$U = U_0 - \frac{1}{2} (P\xi^2 + Q\eta^2 + Rz^2)$$

con

$$U_0 = \pi f \rho_0 abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\Phi(\lambda)}}, \quad P = 2\pi f \rho_0 abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{\Phi(\lambda)}}$$

$$Q = 2\pi f \rho_0 abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda) \sqrt{\Phi(\lambda)}}, \quad R = 2\pi f \rho_0 abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda) \sqrt{\Phi(\lambda)}}$$

essendo  $f$  il coefficiente di attrazione universale e  $\Phi(\lambda) = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)$ , dovranno essere verificate le condizioni

$$(22) \quad a^2 (P - \omega^2) = b^2 [Q - (\omega^2 - \kappa_0^2)] = c^2 R,$$

che per  $\kappa_0 = 0$  si riducono a quelle che si hanno nel caso classico per l'esistenza di ellissoidi di Jacobi<sup>(3)</sup>.

Dalle (22) si ricavano le relazioni equivalenti

$$(23) \quad P - \frac{c^2}{a^2} R = \omega^2, \quad Q - \frac{c^2}{b^2} R = \omega^2 - \kappa_0^2,$$

dalle quali, in base ai valori di  $P, Q, R$ , si deduce che è  $a > c$ , e  $b > c$ , per  $\kappa_0^2 < \omega^2$ . Dunque per  $\kappa_0^2 < \omega^2$  saranno possibili per la massa liquida figure ellissoidali a tre assi, rotanti uniformemente intorno all'asse minore. Dalle (22) si ha anche

$$(24) \quad a^2 P - b^2 Q = (a^2 - b^2) \omega^2 + b^2 \kappa_0^2$$

(3) Cfr. P. APPELL, *Traité de Mécanique Rationnelle*, T. IV, Fasc. I, Chap. III, n. 20 (Paris, Gauthier-Villars, 1932).

e poiché tanto il primo quanto il secondo membro di questa relazione sono positivi per  $a > b$ , sarà  $a$  il semiasse maggiore dell'ellissoide; ma potrà risultare anche  $b > a$ , con  $\kappa_0^2 < (b^2 - a^2)/b^2$ .

Dalla seconda delle (23) si ha che al limite per  $\kappa_0^2 = \omega^2$ , risulta  $b = a$ .  
Ponendo

$$s = \frac{c^2}{a^2}, \quad t = \frac{c^2}{b^2},$$

dove  $s$  e  $t$  sono entrambi compresi fra 0 ed 1, e per  $a > b$  è  $t > s$ , la condizione (24), ove si tenga conto dei valori di  $P, Q, R$ , si trasforma facilmente nella seguente

$$(25) \quad (t-s) \left[ st \int_0^\infty \frac{w dw}{(1+sw)(1+tw)\Delta} - \frac{\omega^2}{2\pi f \rho_0} \right] - \frac{\kappa_0^2}{2\pi f \rho_0} s = 0,$$

essendo

$$\Delta = \sqrt{(1+w)(1+sw)(1+tw)},$$

mentre eliminando  $\omega^2$  dalle (23) si deduce l'equazione

$$(26) \quad (t-s) \left[ st \int_0^\infty \frac{w^2 dw}{\Delta^3} - (1-s-t) \int_0^\infty \frac{w dw}{\Delta^3} \right] = \frac{\kappa_0^2}{2\pi f \rho_0}.$$

Le equazioni (25) e (26), che per  $\kappa_0 = 0$  si riducono a quelle classiche (Cfr. P. Appell, loco citato), possono essere utili per una discussione del problema.

È opportuno osservare infine che, per l'equilibrio relativo delle particelle fluide, dovendo essere in superficie  $(dp/dn_i) < 0$ , considerando l'equazione (19), con procedimento analogo a quello con cui si dimostra il ben noto teorema di Poincaré, si ricava che deve essere

$$2\omega^2 - \kappa_0^2 - 2\pi f \rho_0 < 0$$

da cui si deduce

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \rho_0} < 1 + \frac{\kappa_0^2}{4\pi f \rho_0}$$

e per  $\kappa_0^2 < \omega^2$ , si ha ancora

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \rho_0} < 2.$$

Queste ultime relazioni mostrano che la presenza del campo magnetico nella massa liquida innalza il limite superiore della velocità angolare di rotazione in confronto di quello che si ha nel caso classico.

**Astronomia.** — *Sopra una nota di P. J. D. Gething sulla variazione dei diametri solari osservati a Greenwich.* Nota di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (\*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. In un recente articolo apparso sul «Montly Notices» (vol. 115, n. 5, p. 558, 1955), il dott. P. J. D. Gething dell'Osservatorio di Greenwich, dopo aver analizzato le misure dei semidiametri solari, orizzontali e verticali, colà prese dal 1917 al 1937, giunge alla conclusione che nessuna variazione sicura ci sia nelle dimensioni dei semidiametri stessi. Tale conclusione è in contrasto con quella cui era pervenuto il prof. M. Cimino <sup>(1)</sup>, dopo aver esaminato le misure dei semidiametri solari orizzontali, osservati a Roma (Campidoglio) dal 1876 al 1937, e con quanto aveva determinato la scrivente <sup>(2-3)</sup> dall'esame dei semidiametri orizzontali e verticali, presi a Greenwich dal 1851 al 1937.

La serie di misure romane unica per omogeneità, in quanto il disco del sole, proiettato su uno schermo insieme con 17 fili del micrometro al suo passaggio al meridiano, veniva osservato contemporaneamente da tre o quattro persone, fu ben rappresentata da M. Cimino, con due sole oscillazioni, la prima avente periodo di  $22 \sim 23$  anni, la seconda con periodo variabile tra i sei e gli otto anni. Analogamente, la scrivente, dall'esame delle misure di Greenwich, aveva dedotto che le due curve rappresentanti le misure sia dei semidiametri orizzontali, sia dei semidiametri verticali, potevano essere rappresentate ciascuna da due armoniche, di cui una con periodo ventitreennale, l'altra con periodo variabile tra sei ed otto anni. Importante soprattutto era il fatto che l'oscillazione di ventitre anni, riguardante i raggi orizzontali di Greenwich, era in *accordo di fase* con l'analoga oscillazione di ugual periodo determinata per i raggi orizzontali a Roma. Si aveva inoltre che l'onda di ventitre anni concernente i semidiametri verticali di Greenwich, era spostata rispetto a quella dei semidiametri orizzontali di circa due anni; in particolare i minimi ed i massimi dei raggi orizzontali avvenivano con anticipo su quelli dei raggi verticali.

Sulla base di tali risultati, era logico supporre che le oscillazioni determinate fossero in stretta relazione col ciclo ventiduennale delle macchie solari; e convenire che le variazioni osservate nelle misure dei diametri solari, fossero reali e pertanto dovute a variazioni nelle dimensioni dell'astro; in particolare il piccolo sfasamento tra i semidiametri orizzontali e verticali, avrebbe

(\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) M. CIMINO, «Contr. Sci. Oss. Roma», N. 128 (1946).

(2) M. A. GIANNUZZI, «Contr. Sci. Oss. Roma», N. 190 (1953).

(3) M. A. GIANNUZZI, «Contr. Sci. Oss. Roma», N. 220 (1955).



indicato che l'onda di dilatazione e di successiva contrazione nel globo solare, si propagasse prima sul raggio equatoriale e poi su quello polare.

In quanto alla seconda oscillazione, che come ho detto, contribuiva a rappresentare le curve dei raggi, essa poteva attribuirsi a variazioni di ordine atmosferico, essendo appunto conosciute in meteorologia, cicli aventi periodicità variabile tra sei anni ed otto <sup>(4)</sup>.

2. Per eseguire il lavoro citato, ridussi tutte le osservazioni di Greenwich alla distanza media dalla Terra, correggendole una per una, indi eseguii le medie mensili e da queste formai le medie annuali, dando al valore spettante a ciascun mese, lo stesso peso. Tale accorgimento fu usato per eliminare eventuali influenze stagionali (soprattutto l'irradiazione), dato che i mesi estivi normalmente più ricchi di osservazioni, avrebbero avuto peso preponderante. Comunque le medie pesate, da me pure calcolate, differiscono di ben poco da quelle prese in considerazione dal Gething. Tenni conto delle misure di tutti gli osservatori che si sono succeduti a Greenwich nel periodo, 1851-1937 pensando che a causa dell'avvicinarsi di più astronomi alle misure, si poteva supporre con grande probabilità che gli errori personali si compensassero, e non - come cita il Gething - che gli errori personali fossero tanto piccoli da essere trascurabili.

Un primo esame, condotto separatamente alle curve dei semidiametri orizzontali e verticali di Greenwich, mise in luce per entrambe una progressiva diminuzione dei valori, a partire dal 1890 in poi, e prima di eseguire la mia analisi, corressi le due curve per questa diminuzione che chiamai « variazione » o « tendenza secolare ».

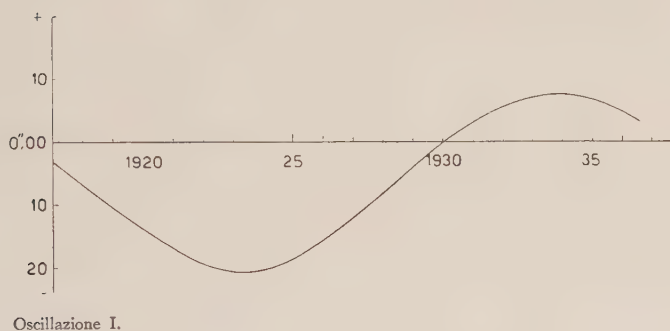
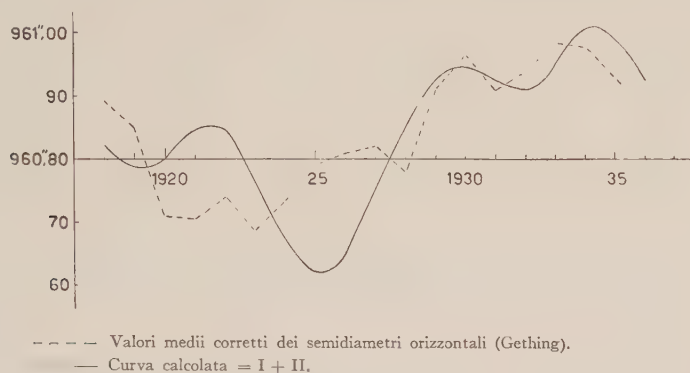
Il dott. Gething nega invece tale fenomeno, ma basta osservare l'andamento degli stessi diametri, che egli riporta nella figura 1 del suo lavoro per dedurre che la sua negazione è ingiustificata. Basta infatti un solo sguardo a questa figura, per accorgersi che le misure dei raggi solari eseguite a Greenwich, dal 1890 circa in poi, tendono a decrescere lentamente.

Corrette le due curve della « tendenza secolare », una successiva analisi mi mise in luce, infine, le due oscillazioni di cui ho già parlato.

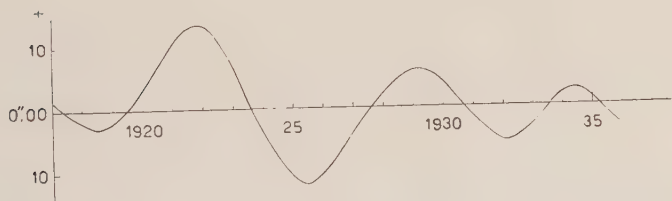
3. Nel suo lavoro, il dott. Gething ha studiato il periodo di anni che va dal 1917 al 1937, dopo cioè che venne introdotto l'uso del micrometro personale per la determinazione del tempo che il disco solare impiega a passare al meridiano. Egli corregge poi le osservazioni per l'irradiazione e per l'errore personale, ed a tal proposito prende in considerazione soltanto cinque astronomi che hanno osservato più lungamente ed assiduamente che altri. Dalle medie individuali dei raggi solari, forma quelle globali per ciascun anno, e riporta infine tali valori - ancora mediati due a due - nei grafici delle figure 2 e 3 del suo lavoro. I grafici che riportano i valori rispettivamente dei raggi orizzontali e di quelli verticali, misurati a Greenwich dal 1917 al

(4) S. POLLI, « Rivista Meteor. Aeron. Roma », XV, 2 (1955).

1937 e ridotti dal dott. Gething, mostrano però delle variazioni ben accentuate che il Gething stesso non può negare, ma che egli attribuisce arbitrariamente a variazioni degli errori personali dei singoli astronomi <sup>(5)</sup>. In ogni modo bisogna tener presente però, che il periodo di venti anni preso in consi-



Oscillazione I.

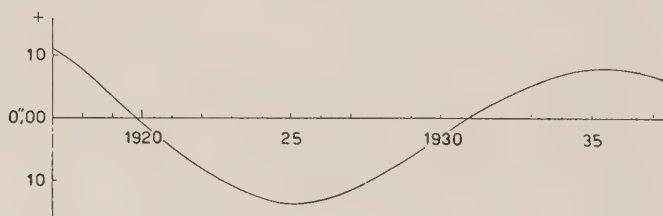
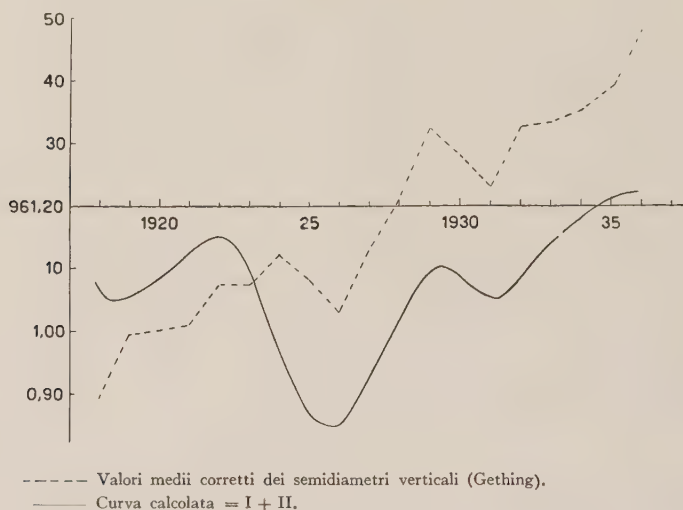


Oscillazione II.

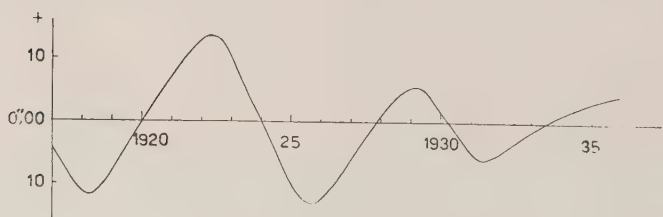
Fig. 1. — A tratto discontinuo è rappresentata la curva dei semidiametri orizzontali osservati a Greenwich dal 1917 al 1937 e ridotti dal dott. Gething. La curva a tratto pieno è ottenuta sommando le oscillazioni I e II determinate da M. A. Giannuzzi nell'analisi dei raggi solari di Greenwich dal 1851 al 1937.

(5) «The variations in these values are *rather greater than can be accounted for as random scatter of the observations*; however, it will be shown that they could be explained as variations in personality and do not necessarily represent real variations in the size of the Sun».

derazione dal dott. Gething è troppo esiguo per mettere in evidenza un eventuale fenomeno ventiduennale, a causa proprio del carattere fluttuante e non rigoroso di tutta l'attività solare. Se, poi, le misure degli ultimi anni sono più attendibili, scartando, come fa il Gething, tutta la precedente mole, a partire dal 1851, si corre il rischio di perdere informazioni assai preziose.



Oscillazione I.



Oscillazione II.

Fig. 2. - A tratto discontinuo è rappresentata la curva dei semidiametri verticali osservati a Greenwich dal 1917 al 1937 e ridotti dal dott. Gething. La curva a tratto pieno è ottenuta sommando le oscillazioni I e II determinate da M. A. Giannuzzi nell'analisi dei raggi solari di Greenwich dal 1851 al 1937.

Comunque la scrivente, anche in questo breve tratto di tempo, ha mostrato che i due stessi grafici dati dal dott. Gething sono ben rappresentati, nel loro andamento generale, ciascuno da due armoniche; e precisamente dalle stesse armoniche che la scrivente aveva trovato nell'analisi dei raggi di Greenwich dal 1851 al 1937.

Nelle figure 1 e 2, sono riportati infatti rispettivamente per i raggi orizzontali e per quelli verticali: a tratto discontinuo la curva ottenuta dal Gething; a tratto pieno la curva ottenuta sommando le oscillazioni I e II. Le oscillazioni I e II — ripetiamo — sono le stesse precedentemente determinate nell'esame di tutto il periodo di misure (dal 1851 al 1937), dei semidiametri solari.

Come si vede dalle figure, se si prescinde da fluttuazioni a breve periodo, (facilmente imputabili a fluttuazioni atmosferiche, strumentali, al diverso metodo di riduzione, errori personali ecc.) l'andamento generale è assai soddisfacente.

Ricordiamo poi che l'oscillazione I ha periodo di ventitre anni, e che quella riguardante i raggi orizzontali è *in accordo di fase* con l'analoga determinata dal prof. M. Cimino per le osservazioni solari di Roma; mentre l'onda riguardante i raggi verticali è in ritardo di due anni circa. Le oscillazioni II hanno periodo variabile tra sei anni ed otto.

4. Di fronte a questi risultati è piuttosto strano pensare, come fa il Gething, che la variazione di 22-23 anni possa attribuirsi a variazioni degli errori personali. È più logico invece ammettere, che le oscillazioni nelle misure dei raggi siano collegate a fenomeni solari in cui il periodo di 23 anni è proprio basilare, e quindi in definitiva siano dovute a variazioni reali nelle dimensioni dell'astro.

**Astrofisica.** — *Ancora su di un'ipotesi solare.* (\*) Nota (\*\*) di  
GIORGIO PICCARDI, presentata dal Socio G. ABETTI.

L'ipotesi solare da me avanzata tempo fa e pubblicata su questi « Rendiconti »<sup>(1)</sup>, prevede che le condizioni generali in cui si trova la Terra, debbano variare periodicamente in conseguenza del moto elicoidale seguito dalla Terra medesima entro alla Galassia.

Il moto elicoidale risulta dalla combinazione del moto di traslazione del Sole verso la costellazione di Ercole col moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole. Una analisi sommaria mi permise di dedurre che, *a marzo*, la Terra si muove nel suo piano equatoriale, con velocità massima.

(\*) Lavoro effettuato nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università di Firenze.

(\*\*) Presentata nella seduta del 14 dicembre 1957.

(1) Questi « Rendiconti », serie 8<sup>a</sup>, 21, 2° Sem., 84, 1957.



Le caratteristiche di questo moto non erano mai state determinate, a quanto mi risulta. Il dott. D. Quilghini dell'Istituto di Meccanica razionale della Università di Firenze, che qui ringrazio vivissimamente, mi ha usato la cortesia di calcolare, in base ai dati standard, i valori della velocità massima e della velocità minima della Terra e gli istanti in cui questi vengono raggiunti.

*Velocità massima:* 45 km/sec. fra il  $75^\circ$  ed il  $76^\circ$  giorno sidereo dal passaggio della Terra al perielio.

*Velocità minima:* 24 km/sec. fra il  $260^\circ$  ed il  $261^\circ$  giorno sidereo dal passaggio della Terra al perielio.

Il divario fra velocità massima e velocità minima è dunque notevole.

Procedendo oltre, ho potuto precisare, in prima approssimazione, in qual modo si muova la Terra rispetto al centro della Galassia. Ciò era indispensabile in vista di un eventuale studio dei fenomeni fisici connessi al moto elicoidale.

Le coordinate galattiche standard del centro sono:  $l = 325^\circ$ ,  $b = 0^\circ$ ; quelle dell'apice solare:  $l = 23^\circ$ ,  $b = +22^\circ$ . In base a questi dati si ricava facilmente che, durante il mese di marzo, la Terra si dirige, ad un dipresso, verso il centro galattico e pertanto parallelamente alle linee di forza di un possibile campo radiale e perpendicolarmente alle linee di forza di un possibile campo dipolare. Tale particolarissima condizione non si verificherà più nel corso dell'anno.

Nella Nota precedente io presentai l'ipotesi solare come idea a sé stante, senza far riferimento ai fatti sperimentali che l'avevano suggerita. Al giorno d'oggi, i fatti in parola risultano dalla analisi di circa 100.000 risposte date da particolari tests chimici, durante quasi 7 anni d'ininterrotta sperimentazione. Le risposte di uno dei tests, opportunamente ordinate in funzione del tempo, mostrano una variazione periodica annuale, segnata da un profondissimo minimo in corrispondenza del mese di marzo.

Si sa già che i tests chimici sono sensibili all'attività solare e quindi ai fenomeni geofisici ad essa collegati. Studi statistici condotti nel *Fraunhofer Institut* di Freiburg i. B., nel *Institut für Meteorologie und Geophysik u. Ionosphärenstation* dell'Università di Graz e nell'Osservatorio Geofisico di Trieste, lo hanno infatti dimostrato, con tutto il rigore del caso, e riconfermato nel corso degli anni.

Poiché al profondissimo minimo del marzo, accusato dal test chimico, non corrisponde nulla di altrettanto particolare nell'attività solare, la causa del minimo va cercata altrove. Questa causa deve esser necessariamente di natura generalissima. In base all'ipotesi solare, la si potrebbe identificare, come già dissi, nella diversità delle condizioni fisiche in cui si verrebbe a trovare la Terra lungo il suo cammino elicoidale, qualora esistesse (come certamente esiste) un campo galattico.

D'altra parte, la variazione annuale del test chimico è talmente imponente da non poter esser attribuita ai normali effetti di un campo di piccola

intensità. Ma, oggi, le idee a riguardo della natura e dell'intensità dei campi intragalattici e fra galassie si trovano in rapida evoluzione ed è conveniente aspettare che queste abbiano raggiunto una certa stabilità, prima di procedere oltre.

D'altra parte ancora, la variazione annuale del test chimico, in quanto collegabile al moto elicoidale della Terra, è già stata presa in considerazione (in via preliminare) nel quadro di nuovissimi e recentissimi studi relativistici<sup>(2)</sup> che ne darebbero una ragione estremamente generale.

Non potendo riportare tutta la letteratura apparsa sull'argomento, citerò qui soltanto alcune pubblicazioni di carattere riassuntivo, dalle quali i lettori potranno desumere ulteriori notizie bibliografiche<sup>(3)</sup>.

**Fisica matematica.** — *Elettromagnetismo maxwelliano e principio di Huyghens.* Nota di GIOVANNI ZIN, presentata<sup>(\*)</sup> dal Socio A. SIGNORINI.

1. È nota l'esistenza di formule integrali le quali consentono la determinazione del campo elettromagnetico in ogni punto di un mezzo omogeneo e isotropo a partire dalla conoscenza del campo elettromagnetico stesso sul contorno e dalla conoscenza di eventuali cariche e correnti di Lorentz presenti nel mezzo. Per la bibliografia relativa si rimanda a una recente Memoria dell'autore che nel seguito della presente Nota sarà brevemente indicata con la sigla TEM<sup>(1)</sup>.

Mentre le menzionate relazioni integrali presuppongono tutte la conoscenza completa del campo elettromagnetico sul contorno, nuove formule

A. GIAO, *Le problème du temps en cosmologie relativiste*, Supplemento alle Memorie della Società Astronomica Italiana, N. 2 (1957).

(3) O. BURKARD, « Archiv für Meteorologie, Geophysik u. Bioklimatologie », Serie B, 6, 506, 1955; U. BECKER, id., Serie B, 6, 511 (1955); C. BOUTE, id., Serie B, 7, 146 (1955); G. PICCARDI, id., Serie B, 6, 486 (1955); G. PICCARDI e U. BECKER, « Geofisica e Meteorologia », 4, 103 (1956); G. PICCARDI, E. BARBOLANI DI MONTAUTO e F. MOSETTI, « Tecnica Italiana », 22, 1 (1957); G. PICCARDI, « Wiener Medizinische Wochenschrift », 106, 975 (1956); G. PICCARDI, « Geofisica e Meteorologia », 5, 13, 15 (1957).

(\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

(1) G. ZIN, *Teoria analitica del campo elettromagnetico* (Introduzione e Parte Prima), « Annali di Matematica pura ed applicata », ser. IV, T. XLIII, pp. 215-259 (1957). Alla bibliografia ivi raccolta vanno aggiunti i seguenti altri riferimenti: F. SBRANA, *Un nuovo procedimento per l'integrazione delle equazioni dell'elastodinamica e dell'elettromagnetismo*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova », XXIV (1955). Parte Prima; A. TONOLO, *Sulla determinazione del campo elettromagnetico all'interno di un conduttore omogeneo e isotropo*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XX, pp. 403-408 e 556-560 (1956); A. TONOLO, *Sur les intégrales des équations de l'électromagnétisme de M. L. de Broglie*, « C. R. des séances de l'Acad. des Sciences », t. 242, pp. 2626-2629 e 2699-2702 (1956).

integrali saranno qui date, le quali presuppongono soltanto la conoscenza delle componenti tangenziali dei campi elettrico e magnetico.

Le nuove relazioni integrali forniscono una semplice interpretazione della genesi di un campo elettromagnetico in un mezzo omogeneo e isotropo, la quale interpretazione, se da una parte consente di ritrovare il principio di Huyghens, dall'altra va oltre, risolvendo i molteplici interrogativi che dal principio di Huyghens traggono l'origine, ma non la risposta.

La presente trattazione riguarda il campo elettromagnetico dipendente dal tempo con legge armonica e viene limitata al caso in cui nella porzione del mezzo considerata non siano presenti né cariche, né correnti di Lorentz. Pertanto le equazioni dell'elettromagnetismo da cui qui si parte sono (sistema Giorgi razionalizzato):

$$(1) \quad \operatorname{rot} \mathcal{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \sigma \mathcal{E} \quad \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

( $\mathcal{E}(x, y, z, t)$  = campo elettrico;  $\mathcal{H}(x, y, z, t)$  = campo magnetico;  $\varepsilon, \mu, \sigma$  = = rispettivamente costante dielettrica, permeabilità magnetica, conducibilità elettrica del mezzo). La dipendenza armonica dal tempo viene considerata mediante le posizioni:

$$(2) \quad \mathcal{E}(x, y, z, t) = e^{i\omega t} \mathbf{E}(x, y, z) \quad \mathcal{H}(x, y, z, t) = e^{i\omega t} \mathbf{H}(x, y, z)$$

che consentono di sostituire alle (1) le seguenti altre equazioni:

$$(3) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = (\sigma + i\omega\varepsilon) \mathbf{E} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu \mathbf{H}.$$

Le restrizioni che così vengono imposte al problema saranno rimosse nella TEM, Parte Seconda, dove l'argomento sarà ripreso con procedimento del tutto differente.

2. Sia  $V$  un dominio regolare dello spazio e sia  $S$  il suo contorno <sup>(2)</sup>. Una funzione scalare o vettoriale si dirà regolare in  $V$  se essa in  $V$  è continua ed in  $V-S$  è dotata di derivate parziali prime continue.

Nel seguito con  $\mathbf{n}$  si intenderà sempre la normale unitaria, interna, al contorno  $S$  di  $V$ . Detti inoltre  $P(x, y, z)$  e  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  due punti qualunque dello spazio, si userà la notazione

$$(4) \quad r = \overline{PP_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Gli operatori divergenza, rotore, gradiente, laplassiano verranno indicati rispettivamente con  $\operatorname{div}$ ,  $\operatorname{rot}$ ,  $\operatorname{grad}$ ,  $\Delta$  se relativi alle variabili  $x, y, z$ ; con  $\operatorname{div}_0$ ,  $\operatorname{rot}_0$ ,  $\operatorname{grad}_0$ ,  $\Delta_0$  se relativi alle variabili  $x_0, y_0, z_0$ . Evidentemente se  $\psi$  è una funzione della sola  $r$  ed  $\mathbf{u}$  un vettore costante si ha  $\operatorname{div} \psi \mathbf{u} = -\operatorname{div}_0 \psi \mathbf{u}$ ,  $\operatorname{rot} \psi \mathbf{u} = -\operatorname{rot}_0 \psi \mathbf{u}$ ,  $\operatorname{grad} \psi = -\operatorname{grad}_0 \psi$ ,  $\Delta \psi = \Delta_0 \psi$ .

(2) Notoriamente, secondo l'uso italiano, il dominio è un particolare insieme chiuso.

Negli integrali seguenti la variabile d'integrazione è il punto  $P(x, y, z)$ , mentre  $da$  è l'area dell'elemento superficiale a cui tale punto appartiene.

Dopo tali premesse sarà stabilito il seguente

TEOREMA A). — Sia  $\mathbf{K}(P)$  un vettore regolare in  $V$  e soddisfacente in  $V - S$  all'equazione  $\text{rot } \mathbf{K} + m \mathbf{K} = 0$ , con  $m$  costante complessa non nulla. Allora, qualunque sia il punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  in  $V - S$ , si ha

$$(5) \quad -\frac{1}{4\pi m} \text{rot}_0(\text{rot}_0 - m) \int_S \psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K} da = \begin{cases} \mathbf{K}(P_0) & [P_0 \text{ in } V - S] \\ 0 & [P_0 \text{ esterno a } V] \end{cases}$$

dove si è posto

$$(6) \quad \psi = \frac{ae^{imr} + be^{-imr}}{r}$$

essendo  $a$  e  $b$  due costanti scelte arbitrariamente sotto la condizione  $a + b = 1$ .

Le proprietà di cui gode il vettore  $\mathbf{K}$  in  $V$  consentono l'applicazione del Teorema IV e del Teorema XIII della TEM, per cui, qualunque sia  $P_0$  in  $V - S$ , si ha

$$(7) \quad \int_S [(\mathbf{n} \times \text{grad } \psi) \mathbf{K} + (\mathbf{n} \wedge \text{grad } \psi) \wedge \mathbf{K} - m\psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K}] da = 4\pi \mathbf{K}(P_0)$$

$$(8) \quad \int_S [\text{grad } \psi \times \mathbf{n} \wedge \mathbf{K} + m\psi \mathbf{n} \times \mathbf{K}] da = 0$$

dove  $\psi$  è la funzione definita dalla (6).

Semplici identità vettoriali, unite a quanto sopra osservato, consentono di trasformare la funzione integranda della (7) come segue<sup>(3)</sup>:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{n} \times \text{grad } \psi) \mathbf{K} + (\mathbf{n} \wedge \text{grad } \psi) \wedge \mathbf{K} - m\psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K} = (\mathbf{n} \times \mathbf{K}) \text{grad } \psi - \\ & - \text{grad } \psi \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{K}) - m\psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K} = -(\mathbf{n} \times \mathbf{K}) \text{grad}_0 \psi + \text{grad}_0 \psi \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{K}) - \\ & - m\psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K} = -(\mathbf{n} \times \mathbf{K}) \text{grad}_0 \psi + \text{rot}_0(\psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K}) - m\psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K}. \end{aligned}$$

Per tale relazione ed osservando che gli operatori relativi alle variabili  $x_0, y_0, z_0$  sono permutabili con il simbolo  $\int_S$ , dalla (7) si ha:

$$(9) \quad -\text{grad}_0 \int_S \psi \mathbf{n} \times \mathbf{K} da + \int_S [\text{rot}_0(\psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K}) - m\psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K}] da = 4\pi \mathbf{K}(P_0).$$

Si osservi ora che la funzione  $\psi$  definita dalla (6) soddisfa all'equazione  $\Delta \psi + m^2 \psi = 0$ , ossia  $\Delta_0 \psi + m^2 \psi = 0$ . Ciò premesso, dalla (8) mediante appli-

(3) Si tenga conto del fatto che  $\mathbf{n} \times \mathbf{K}$  e  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{K}$  non dipendono dalle variabili  $x_0, y_0, z_0$ .



cazione dell'operatore —  $(1/m)$  grad<sub>o</sub> e per l'identità grad<sub>o</sub> div<sub>o</sub> = rot<sub>o</sub> rot<sub>o</sub> + Δ<sub>o</sub>, con facili trasformazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} -\text{grad}_o \int_S \psi \mathbf{n} \times \mathbf{K} da &= \frac{1}{m} \text{grad}_o \int_S \text{grad} \psi \times \mathbf{n} \wedge \mathbf{K} da = \\ &= -\frac{1}{m} \text{grad}_o \int_S \text{grad}_o \psi \times \mathbf{n} \wedge \mathbf{K} da = -\frac{1}{m} \text{grad}_o \int_S \text{div}_o \psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K} da = \\ &= -\frac{1}{m} \text{rot}_o \text{rot}_o \int_S \psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K} da + m \int_S \psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K} da. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (9) al posto di  $-\text{grad}_o \int_S \psi \mathbf{n} \times \mathbf{K} da$  l'espressione ora ottenuta, si ottiene

$$-\frac{1}{m} \text{rot}_o \text{rot}_o \int_S \psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K} da + \text{rot}_o \int_S \psi \mathbf{n} \wedge \mathbf{K} da = 4\pi \mathbf{K} (P_o).$$

La (5) superiore è così stabilita. Se  $P_o$  è esterno a  $V$ , dai citati teoremi IV e XIII della TEM si apprende che i primi membri delle (7) e (8) sono nulli, per cui il procedimento ora descritto conduce alla (5) inferiore. c. v. d.

Si osservi che su  $S$ , detta  $\mathbf{K}_t$  la componente tangenziale di  $\mathbf{K}$ , è  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{K} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{K}_t$ . Perciò la (5) esprime il vettore  $\mathbf{K}$  in ogni punto di  $V - S$  utilizzando la conoscenza, sul contorno, della sola componente tangenziale.

**TEOREMA B)** — Siano  $\mathbf{E} (P)$  e  $\mathbf{H} (P)$  due vettori regolari nel dominio  $V$  e soddisfacenti in  $V - S$  alle equazioni (3), dove  $\varepsilon, \mu, \sigma, \omega$  sono costanti reali ( $\varepsilon\mu > 0, \omega \neq 0$ ).

Allora, qualunque sia il punto  $P_o$  di  $V - S$ , si ha

$$(10) \quad \mathbf{E} (P_o) = \frac{1}{4\pi(\sigma + i\omega\varepsilon)} \text{rot}_o \text{rot}_o \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{n} \wedge \mathbf{H} da + \frac{1}{4\pi} \text{rot}_o \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} da$$

$$(11) \quad \mathbf{H} (P_o) = -\frac{1}{4\pi i\omega\mu} \text{rot}_o \text{rot}_o \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} da + \frac{1}{4\pi} \text{rot}_o \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{n} \wedge \mathbf{H} da$$

dove si è posto

$$(12) \quad k = \omega \sqrt{\mu \left( \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega} \right)}$$

la radice intendendosi a parte reale positiva.

Invece, quando  $P_o$  è esterno a  $V$ , i secondi membri delle (10) e (11) sono nulli.

Attribuito a  $k$  il valore definito dalla (12), si ponga  $\mathbf{K} = -(\sigma + i\omega\varepsilon)\lambda$ . È allora facile dedurre dalle (3) che i vettori

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{E} + \lambda \mathbf{H} \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{E} - \lambda \mathbf{H}$$

soddisfano alle equazioni

$$(13) \quad \text{rot } \mathbf{K}_1 + k\mathbf{K}_1 = 0 \quad \text{rot } \mathbf{K}_2 - k\mathbf{K}_2 = 0.$$

Pertanto e per la regolarità dei vettori  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  in  $V$  risulta applicabile ad essi la (5). Evidentemente nelle due formule integrali che così si ottengono si può fare uso di una stessa funzione  $\psi$ , in quanto che i coefficienti di  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  che figurano nelle (13) differiscono soltanto per il segno. Quale comune funzione  $\psi$  si scelga la funzione  $e^{-ikr}/r$  con il valore di  $k$  definito nell'enunciato. Si ha così:

$$\mathbf{K}(\mathbf{P}_0) = -\frac{1}{4\pi k} \text{rot}_0 \text{rot}_0 \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{n} \wedge \mathbf{K}_1 da + \frac{1}{4\pi} \text{rot}_0 \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{n} \wedge \mathbf{K}_1 da$$

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi k} \text{rot}_0 \text{rot}_0 \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{n} \wedge \mathbf{K}_2 da + \frac{1}{4\pi} \text{rot}_0 \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{n} \wedge \mathbf{K}_2 da.$$

Da queste, sommando e sottraendo membro a membro e tenendo presente che è  $\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 = 2\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2 = 2\lambda\mathbf{H}$ ,  $k/\lambda = -(\sigma + i\omega\varepsilon)$ ,  $\lambda k = i\omega\mu$  si ottengono le (10) e (11)

3. Nelle (10) e (11) si sarebbe potuto usare la più generale funzione  $\psi = (ae^{ikr} + be^{-ikr})/r$ ,  $k$  essendo il valore definito nel teorema B) ed  $a$  e  $b$  costanti arbitrarie scelte sotto la condizione  $a + b = 1$ . Ma invece si è preferito adottare la particolare funzione  $\psi = e^{-ik}/r$  corrispondente alla scelta  $a = 0$ ,  $b = 1$ , in quanto che le formule (10) e (11) che così facendo si sono ottenute offrono una rappresentazione ritardata del campo elettromagnetico e possono perciò essere applicate anche nel caso in cui  $V$  sia un dominio regolare illimitato ed  $S$  il suo contorno.

Che la scelta della particolare funzione  $e^{-ikr}/r$  offra una rappresentazione ritardata del campo elettromagnetico è subito visto. Basta moltiplicare ciascun membro delle (9) e (10) per il fattore  $e^{i\omega t}$ , già introdotto con le (2). Nelle nuove relazioni che così si ottengono appare allora l'esponenziale  $e^{i\omega(t-r\sqrt{\mu(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega})})}$ , il quale, essendo la radice a parte reale positiva, caratterizza la rappresentazione ritardata.

4. È facile individuare alcune espressioni dei potenziali scalare  $\phi$ , vettore  $\mathbf{A}$ , hertziano  $\mathbf{H}$  dai quali le (10) e (11) possono essere fatte discendere.

Notoriamente tali potenziali, nel caso di una dipendenza armonica dal tempo, sono legati ai campi elettrico e magnetico dalle relazioni:

$$(14) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} = (\sigma + i\omega\epsilon) \operatorname{rot} \Pi$$

$$(15) \quad \mathbf{E} = -i\omega\mathbf{A} - \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi + k^2 \Pi.$$

Qui ci si limiterà a scrivere un'espressione del potenziale hertziano  $\Pi$ , dato che i potenziali scalare  $\varphi$  e vettore  $\mathbf{A}$  si possono da esso dedurre mediante le note relazioni

$$(16) \quad \mathbf{A} = \mu (\sigma + i\omega\epsilon) \Pi, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} + (\sigma + i\omega\epsilon) \mu \varphi = 0.$$

Uno sguardo alla (11) suggerisce subito la seguente posizione:

$$(17) \quad \Pi(P_0) = \frac{1}{4\pi k^2} \operatorname{rot}_0 \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} da - \frac{i\omega\mu}{4\pi k^2} \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{n} \wedge \mathbf{H} da.$$

Tale espressione del potenziale hertziano, come quelle dei potenziali scalare e vettore che da essa mediante le (16) si possono immediatamente dedurre, rammenta i noti *potenziali di strato* della classica *teoria del potenziale*. Ed invero l'analogia, come ora si vedrà, non è soltanto formale.

Allo scopo di evitare talune complicazioni concettuali di ordine fisico, per la cui trattazione non vi ha qui sufficiente spazio, ci si limiti al caso in cui sia  $\sigma = 0$ , cioè al caso in cui il mezzo non sia conduttore. È allora noto che, se nel punto  $P(x, y, z)$  è situato un dipolo elettrico, oscillante, di momento  $\mathbf{p}$ , il potenziale hertziano ad esso corrispondente ha nel punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  il valore <sup>(4)</sup>

$$\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{p}.$$

Invece se in  $P(x, y, z)$  è sito un dipolo oscillante, magnetico, di momento  $\mathbf{m}$ , allora il corrispondente potenziale hertziano ha in  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , il valore

$$\frac{1}{4\pi i\omega\epsilon} \operatorname{grad}_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \wedge \mathbf{m}.$$

Risulta da ciò evidente il significato fisico racchiuso dall'integrale  $\frac{1}{4\pi i\omega\epsilon} \cdot \int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \mathbf{n} \wedge \mathbf{H} da$  che figura nella (17). Il campo elettromagnetico in  $V - S$

(4) Si veda ad esempio J. A. STRATTON, *Teoria dell'elettromagnetismo*, Ed. It. Einaudi, Torino, pp. 594-604 (1952). Fare attenzione al fatto che lo Stratton considera la dipendenza armonica dal tempo attraverso il fattore  $e^{-i\omega t}$ , mentre nella presente Nota si usa il fattore  $e^{i\omega t}$  con i conseguenti cambiamenti di segno nelle espressioni in cui interviene la pulsazione  $\omega$ .

è ivi rappresentato quale somma di un numero infinito di campi elettromagnetici generati da altrettanti dipoli elettrici elementari distribuiti sul contorno S, il dipolo elementare situato nell'elemento  $da$  comprendente il punto P avendo momento  $(1/i\omega) \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}(P) da$ . Invece l'integrale 
$$\frac{1}{4\pi\omega^2 \varepsilon\mu} \int_S \text{grad}_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}) da,$$

che pure figura nella (17), rappresenta un campo elettromagnetico estendentesi in  $V - S$  e generato da un numero infinito di dipoli magnetici elementari distribuiti sul contorno S, il dipolo situato nell'elemento  $da$  comprendente il punto P avendo momento  $-(1/i\omega\mu) \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}(P) da$ .

Tali osservazioni vengono a chiarire un'antica questione, relativa ai rapporti fra principio di Huyghens e propagazione delle onde luminose. I problemi sollevati dal principio di Huyghens, le critiche ad esso rivolte, le ricerche indirizzate a stabilire enunciati rigorosi del principio stesso sono troppo noti per parlarne. A tale complesso di questioni e di tentativi risponde la seguente proposizione, nella quale, per essere essa un'interpretazione fisica del teorema B), si manifesta in modo preciso il commento dell'elettromagnetismo maxwelliano sul principio di Huyghens:

*Il campo elettromagnetico presente in una qualunque porzione di un mezzo non conduttore, omogeneo e isotropo, nella quale non siano presenti correnti di Lorentz, è uguale a quello che si avrebbe se il detto mezzo omogeneo fosse infinitamente esteso, sì da occupare l'intero spazio, e l'insieme di tutte le sorgenti del campo fosse costituito da un numero infinito di dipoli oscillanti elementari, elettrici e magnetici, situati sulla superficie che delimita la porzione considerata: i dipoli elettrico e magnetico situati nell'elemento  $dS$  della superficie avendo i rispettivi momenti  $\frac{1}{i\omega} \mathbf{n} \wedge \mathbf{H} dS$  e  $-\frac{1}{i\omega\mu} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} dS$ , dove  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  sono i campi elettrico e magnetico presenti nell'elemento  $dS$  ed  $\mathbf{n}$  la normale unitaria a  $dS$  rivolta verso l'interno della porzione stessa. Allora, esternamente a questa, gli effetti dei dipoli elementari interferiscono fra loro totalmente, dando luogo a un campo elettromagnetico identicamente nullo (sistema Giorgi razionalizzato; dipendenza dal tempo secondo il fattore  $e^{i\omega t}$ )<sup>(5)</sup>.*

(5) L'elemento superficiale  $da$  è stato qui indicato con  $dS$  per evitarne la confusione nell'uso del carattere corsivo, con la preposizione « da ».



**Chimica fisica.** — *Momenti elettrici e distanze interatomiche delle azine* (\*). Nota di SERGIO CARRÀ, STEFANIN POLEZZO e MASSIMO SIMONETTA, presentata (\*\*) dal Socio L. CAMBI.

I più recenti sviluppi della teoria degli orbitali molecolari sono basati essenzialmente sulla introduzione nel metodo SCF-LCAO di opportune semplificazioni atte a rendere tale metodo applicabile a molecole coniugate di sempre maggiore complessità. Tra i tentativi che hanno avuto maggiore rilievo sono da ricordare il metodo di Pariser e Parr [1] atto soprattutto allo studio degli spettri elettronici in quanto l'introduzione dell'interazione di configurazione permette il calcolo con buona approssimazione anche dell'energia degli stati eccitati, ed il metodo di Pople [2] applicabile con successo al calcolo di grandezze riferentesi allo stato fondamentale.

Questo secondo metodo è stato recentemente usato per la molecola della piridina [3], ed i buoni risultati ottenuti nel calcolo del momento dipolare e della distanza di legame di questa molecola ci hanno indotti ad estendere la nostra indagine alle altre azine della serie benzenica.

Il dettaglio del calcolo non è riportato qui in quanto esso è del tutto analogo a quelli descritti altrove [3]; i valori degli integrali necessari sono stati ricavati dai lavori di Pariser e Parr [1] per estrapolazione ed interpolazione dei dati riportati nelle loro tabelle come pure le distanze interatomiche di partenza; i valori usati per i parametri sono gli stessi usati per la piridina, con l'aggiunta di  $\beta_{NN} = -1,67$  eV. [4]. In Tabella I sono riportati per le varie molecole gli orbitali molecolari leganti di partenza (ottenuti con il metodo LCAO standard, con  $\alpha_N = \beta$ ,  $\beta_{CC} = \beta_{CN} = \beta_{NN} = \beta$ ), gli orbitali molecolari leganti ottenuti alla fine del processo iterativo e i livelli energetici di tutti gli orbitali finali.

In Tabella I i simboli  $\chi_i$  indicano orbitali atomici  $2p_\pi$  per gli atomi corrispondenti, secondo le numerazioni riportate in figura 1.

In Tabella II sono riportate per le stesse molecole, densità elettroniche e ordini di legami, definiti della formula:

$$P_{pq} = 2 \sum_i c_{ip} c_{iq}$$

dove  $c_{ip}$  indica il coefficiente dell'orbitale atomico  $\chi_p$  nell'orbitale molecolare  $\psi_i$ , la sommatoria va estesa a tutti gli orbitali molecolari occupati e  $P_{pq}$  indica una densità elettronica per  $p = q$  e un ordine di legame per  $p \neq q$ .

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto per la laurea in Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

TABELLA I.

*piridazina*

## orbitali molecolari LCAO

$\psi_1$	$0,59682 (\chi_1 + \chi_2) + 0,31756 (\chi_3 + \chi_6) + 0,20727 (\chi_4 + \chi_5)$
$\psi_2$	$0,31756 (\chi_1 + \chi_2) - 0,20727 (\chi_3 + \chi_6) - 0,59682 (\chi_4 + \chi_5)$
$\psi_3$	$0,41791 (\chi_1 - \chi_2) - 0,52113 (\chi_3 - \chi_6) - 0,23192 (\chi_4 - \chi_5)$

## orbitali molecolari SCF

$\psi_1$	$0,46686 (\chi_1 + \chi_2) + 0,39776 (\chi_3 + \chi_6) + 0,35189 (\chi_4 + \chi_5)$
$\psi_2$	$0,39258 (\chi_1 - \chi_2) - 0,53789 (\chi_3 - \chi_6) - 0,23781 (\chi_4 - \chi_5)$
$\psi_3$	$0,43702 (\chi_1 + \chi_2) - 0,02156 (\chi_3 + \chi_6) - 0,55546 (\chi_4 + \chi_5)$

## energia orbitali SCF (in eV.)

$E_1$	$-15,71458$
$E_2$	$-12,73043$
$E_3$	$-12,35542$
$E_4$	$-1,51941$
$E_5$	$-0,33063$
$E_6$	$2,30543$

*pirimidina*

## o. m. LCAO

$\psi_1$	$0,42679 \chi_1 + 0,52032 (\chi_2 + \chi_6) + 0,32158 (\chi_3 + \chi_5) + 0,26378 \chi_4$
$\psi_2$	$0,60150 (\chi_2 - \chi_6) + 0,37175 (\chi_3 - \chi_5)$
$\psi_3$	$0,40951 \chi_1 + 0,23313 (\chi_2 + \chi_6) - 0,37721 (\chi_3 + \chi_5) - 0,66260 \chi_4$

## o. m. SCF

$\psi_1$	$0,44081 \chi_1 + 0,48753 (\chi_2 + \chi_6) + 0,34814 (\chi_3 + \chi_5) + 0,29652 \chi_4$
$\psi_2$	$0,56393 (\chi_2 - \chi_6) + 0,42658 (\chi_3 - \chi_5)$
$\psi_3$	$0,44882 \chi_1 + 0,25379 (\chi_2 + \chi_6) - 0,33477 (\chi_3 + \chi_5) - 0,66753 \chi_4$

## energia orbitali SCF

$E_1$	$-16,29611$
$E_2$	$-13,21649$
$E_3$	$-12,09318$
$E_4$	$-0,73900$
$E_5$	$-0,52332$
$E_6$	$2,80100$

Segue: TABELLA I.

*pirazina*

o. m. LCAO

$$\begin{aligned}\psi_1 & 0,5 (\chi_1 + \chi_4) + 0,35356 (\chi_2 + \chi_3 + \chi_5 + \chi_6) \\ \psi_2 & 0,62797 (\chi_1 - \chi_4) + 0,22985 (\chi_2 - \chi_3 - \chi_5 + \chi_6) \\ \psi_3 & 0,5 (\chi_2 + \chi_3 - \chi_5 - \chi_6)\end{aligned}$$

o. m. SCF

$$\begin{aligned}\psi_1 & 0,46851 (\chi_1 + \chi_4) + 0,37450 (\chi_2 + \chi_3 + \chi_5 + \chi_6) \\ \psi_2 & 0,60032 (\chi_1 - \chi_4) + 0,26421 (\chi_2 - \chi_3 - \chi_5 + \chi_6) \\ \psi_3 & 0,5 (\chi_2 + \chi_3 - \chi_5 - \chi_6)\end{aligned}$$

energie orbitali SCF

$$\begin{aligned}E_1 & -16,28515 \\ E_2 & -13,65637 \\ E_3 & -11,73279 \\ E_4 & -0,89683 \\ E_5 & -0,51373 \\ E_6 & 2,75678\end{aligned}$$

*s-triazina*

o. m. LCAO

$$\begin{aligned}\psi_1 & 0,35531 (\chi_1 + \chi_3 + \chi_5) + 0,45507 (\chi_2 + \chi_4 + \chi_6) \\ \psi_2 & 0,69456 \chi_2 - 0,34728 (\chi_4 + \chi_6) + 0,21463 (\chi_1 + \chi_3) - 0,42926 \chi_5 \\ \psi_3 & 0,60150 (\chi_4 - \chi_6) + 0,37175 (\chi_3 - \chi_1)\end{aligned}$$

o. m. SCF

$$\begin{aligned}\psi_1 & 0,37602 (\chi_1 + \chi_3 + \chi_5) + 0,43811 (\chi_2 + \chi_4 + \chi_6) \\ \psi_2 & 0,66020 \chi_2 - 0,33010 (\chi_4 + \chi_6) + 0,24021 (\chi_1 + \chi_3) - 0,48041 \chi_5 \\ \psi_3 & 0,57175 (\chi_4 - \chi_6) + 0,41605 (\chi_3 - \chi_1)\end{aligned}$$

energie orbitali SCF

$$\begin{aligned}E_1 & -16,71348 \\ E_2 & -13,20475 \\ E_3 & -13,20475 \\ E_4 & -0,64375 \\ E_5 & -0,64375 \\ E_6 & 2,88596\end{aligned}$$

Segue: TABELLA I.

*s-tetrazina*

o. m. LCAO

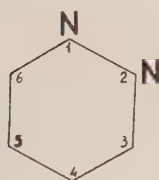
$\psi_1$	$0,32506 (\chi_1 + \chi_4) + 0,44404 (\chi_2 + \chi_3 + \chi_5 + \chi_6)$
$\psi_2$	$0,5 (\chi_2 - \chi_6) + 0,5 (\chi_3 - \chi_5)$
$\psi_3$	$0,5 (\chi_1 - \chi_4) + 0,35356 (\chi_2 + \chi_6 - \chi_3 - \chi_5)$

o. m. SCF

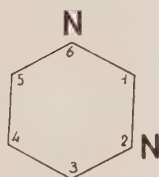
$\psi_1$	$0,38888 (\chi_1 + \chi_4) + 0,41760 (\chi_2 + \chi_3 + \chi_5 + \chi_6)$
$\psi_2$	$0,51424 (\chi_1 - \chi_4) + 0,34318 (\chi_2 - \chi_3 - \chi_5 + \chi_6)$
$\psi_3$	$0,5 (\chi_2 + \chi_3 - \chi_5 - \chi_6)$

energie orbitali SCF

$E_1$	-16,38940
$E_2$	-13,39416
$E_3$	-13,03279
$E_4$	-2,68425
$E_5$	-0,19938
$E_6$	1,96366



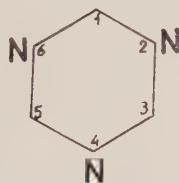
piridazina



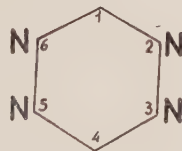
pirimidina



pirazina



s-triazina



s-tetrazina

Fig. 1.

Dai valori degli ordini di legame della Tabella II sono state ricavate le distanze interatomiche mediante le formule di Coulson [5], per i legami carbonio-carbonio, di Liquori e Vaciago [6] per i legami carbonio-azoto, e di Gordy [7] per i legami azoto-azoto. I risultati sono raccolti in Tabella III, dove sono pure indicati i corrispondenti valori sperimentali.



TABELLA II.

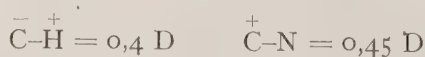
	piridazina	pirimidina	pirazina	s-triazina	s-tetrazina
P <sub>11</sub> . . .	1,12613	0,79151	1,15977	0,74438	0,83134
P <sub>22</sub> . . .	—	1,24022	0,92011	1,25561	1,08432
P <sub>33</sub> . . .	0,89601	0,83049	—	—	—
P <sub>44</sub> . . .	0,97783	1,06704	—	—	—
P <sub>12</sub> . . .	0,50965	0,65763	0,66814	0,64665	0,67775
P <sub>23</sub> . . .	0,77488	0,65066	0,64089	—	0,61323
P <sub>34</sub> . . .	0,55972	0,65340	—	—	—
P <sub>45</sub> . . .	0,75162	—	—	—	—

TABELLA III.

R in Å	piridazina		pirimidina		pirazina		s-triazina		s-tetrazina	
	calc.	sper.	calc.	sper. [8] (a)	calc.	sper. [9]	calc.	sper. [10]	calc.	sper. [11]
1-2 . . . .	1,345	—	1,330	1,33	1,328	1,334	1,332	1,319	1,327	1,334
2-3 . . . .	1,312	—	1,331	1,33	1,402	1,378	—	—	1,322	1,321
3-4 . . . .	1,418	—	1,400	1,38	—	—	—	—	—	—
4-5 . . . .	1,382	—	—	—	—	—	—	—	—	—

(a) Valori ottenuti dai dati sperimentali relativi alle molecole 4-amino-2,6-dicloropirimidina, 5-bromo-4,6-diamino-pirimidina e 2-amino-4,6-dicloropirimidina.

Mediante i valori delle densità degli elettroni  $\pi$  sono stati calcolati per le molecole piridazina e pirimidina i momenti dipolari di risonanza. Questi sono stati composti con i momenti dipolari dovuti ai legami  $\sigma$ , per i quali abbiamo adottato i valori di L. E. Orgel e coll. [12]:



e con i momenti dovuti agli elettroni dei doppietti solitari sugli atomi di azoto, per i quali ci siamo serviti del valore di 0,5 D proposto da Coulson e riportato da Pullman e Pullman [13].

I risultati sono raccolti in Tabella IV, unitamente ai valori sperimentali raccolti dalla letteratura.

TABELLA IV.

$\mu$ in D	piridazina	pirimidina
calc. . . . .	3,97	2,24
sper. . . . .	3,94 [14]	2,0 [15]; 2,4 [14]

Da un esame delle Tabelle III e IV appare evidente l'ottimo accordo tra valori calcolati e valori sperimentali per le grandezze da noi esaminate. Tale accordo acquista un particolare significato se si osserva che nel presente lavoro non è stato proposto alcun valore speciale per i parametri empirici che entrano nel calcolo, essendo tutti stati determinati in precedenti lavori. Appare quindi evidente che il metodo SCF-LCAO nell'approssimazione di Pople può essere impiegato con confidenza alla previsione di grandezze fisiche relative allo stato fondamentale di molecole coniugate, anche contenenti eteroatomi.

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] R. PARISER e R. G. PARR, « Journ. Chem. Phys. », *21*, 466 (1953); R. PARISER e R. G. PARR, « Journ. Chem. Phys. », *21*, 767 (1953).
- [2] J. A. POPLER, « Trans. Faraday Soc. », *49*, 1375 (1953).
- [3] G. FAVINI e S. CARRÀ, « Gazz. Chim. It. » in corso di stampa; vedi anche R. D. BROWN, M. L. HEFFERNAN, « Austr. Journal of Chem. », *10*, 211 (1957).
- [4] M. SIMONETTA, G. FAVINI, S. CARRÀ e V. PIERPAOLI, « Nuovo Cimento », *4*, 1364 (1956).
- [5] C. A. COULSON, « Proc. Roy. Soc. », *A. 169*, 413 (1939).
- [6] A. M. LIQUORI e A. VACIAGO, « Gazz. Chim. It. », *86*, 769 (1956).
- [7] W. GORDY, « Journ. Chem. Phys. », *15*, 305 (1947).
- [8] G. J. B. CLEWS e W. COCHRAN, « Acta Cryst. », *2*, 46 (1949).
- [9] P. J. WHEATLEY, « Acta Cryst. », *10*, 182 (1957).
- [10] P. J. WHEATLEY, « Acta Cryst. », *8*, 224 (1955).
- [11] F. BERTINOTTI, G. GIACOMELLO e A. M. LIQUORI, « Acta Cryst. », *9*, 510 (1956).
- [12] L. E. ORGEL, T. L. COTTRELL, W. DICK e L. SUTTON, « Trans. Faraday Soc. », *47*, 113 (1951).
- [13] B. PULLMAN e A. PULLMAN, *Les Théories Electroniques de la Chimie Organique*, p. 430, Masson et Cie. (1952).
- [14] W. C. SCHNEIDER, « J.A.C.S. », *70*, 627 (1948).
- [15] W. HÜCKEL e C. M. SOLINGER, « Ber. », *77*, 810 (1944).

**Chimica fisica.** — *Spettri elettronici di alcune benzotriazine sostituite* (\*). Nota di GIORGIO FAVINI e MASSIMO SIMONETTA, presentata (\*\*) dal Socio L. CAMBI.

Gli spettri di assorbimento della benzotriazina e di alcuni suoi derivati sostituiti in posizione 6 sono stati recentemente oggetto di studio sia teorico che sperimentale <sup>(1)</sup>. Gli spettri di questi composti (1,° 2, 4-benzotriazina,

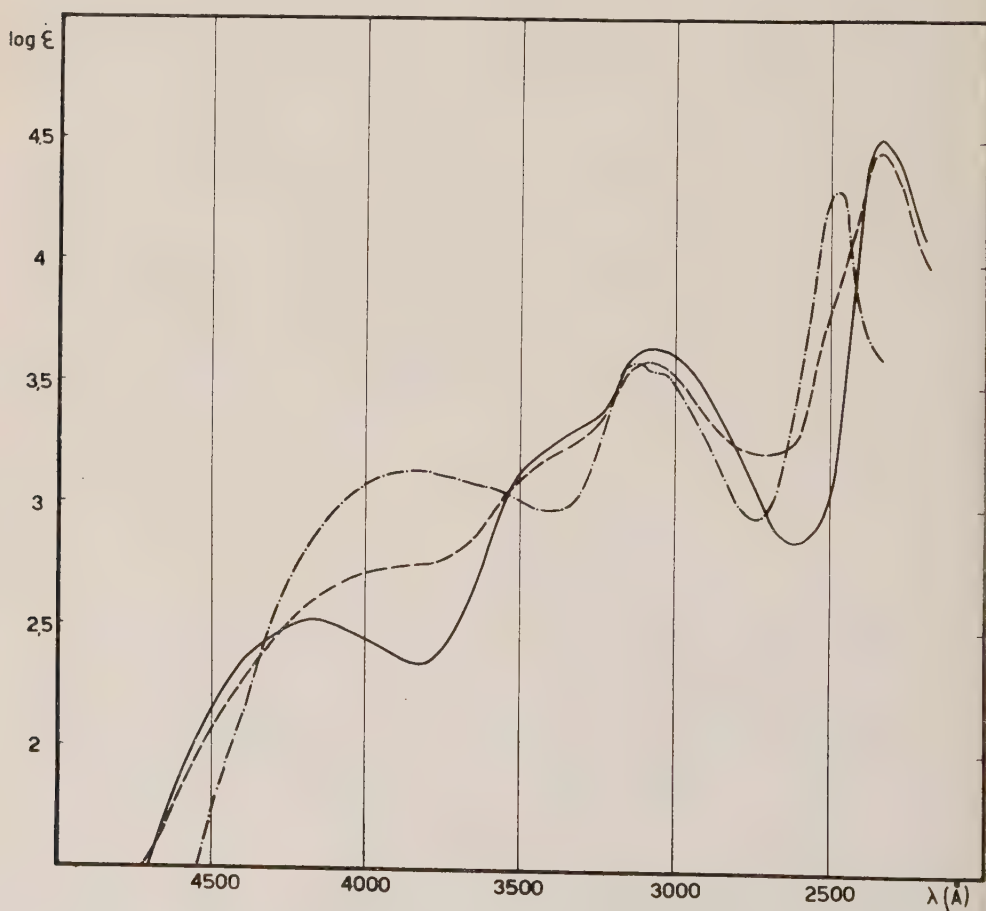


Fig. 1. — 1, 2, 4-benzotriazina.

in acqua —————  
 in  $H_2SO_4$  al 10 % - - - - -  
 in  $H_2SO_4$  al 50 % - · - · - ·

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto per la laurea in Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

(1) M. SIMONETTA, G. FAVINI, S. CARRÀ, V. PIERPAOLI, «Nuovo Cimento», X, 4, 1364 (1956).

6-cloro-, 6-metil-, 6-metossi-1, 2, 4-benzotriazina), in cicloesano e in metanolo, presentano tre massimi, che in base a varie considerazioni sono stati assegnati ad una transizione  $n - \pi$  e alle prime due transizioni  $\pi - \pi$ . Inoltre i massimi  $\pi - \pi$  nei derivati sostituiti nella posizione 6 sono sempre spostati verso il rosso rispetto agli stessi massimi del termine fondamentale.

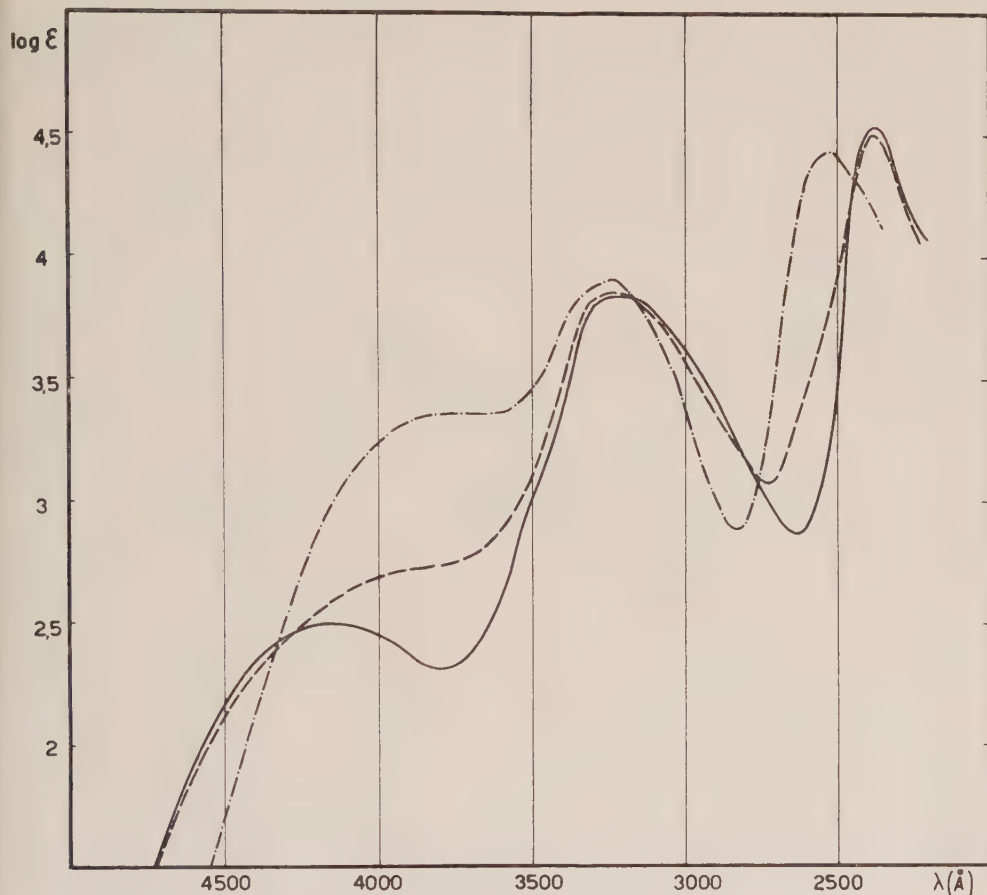


Fig. 2. - 6-cloro-1, 2, 4-benzotriazina.

in acqua —————  
in H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> al 10 % - - - - -  
in H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> al 50 % - · - · - ·

Nel presente lavoro è stata confermata l'origine  $n - \pi$  dei massimi già assegnati a queste transizioni eseguendo gli spettri in soluzione acquosa ed in acido solforico al 10 % e al 50 %; inoltre sono state esaminate la 6-acetil-, 2, 4-benzotriazina e la 6-ammino-1, 2, 4-benzotriazina. Anche per questi due prodotti si è riscontrato il « red shift » delle bande  $\pi - \pi$ , che risulta pertanto essere una proprietà generale dei derivati 6-sostituiti; sono stati quindi eseguiti alcuni calcoli nel tentativo di trovare una giustificazione per questa singolare proprietà.



## PARTE SPERIMENTALE.

Gli spettri sono stati ottenuti con uno Spettrofotometro Beckmann modello D. U. Le sostanze sono state preparate e purificate secondo i metodi della letteratura <sup>(2,3,4)</sup>. I solventi erano cicloesano e metanolo della Eastman

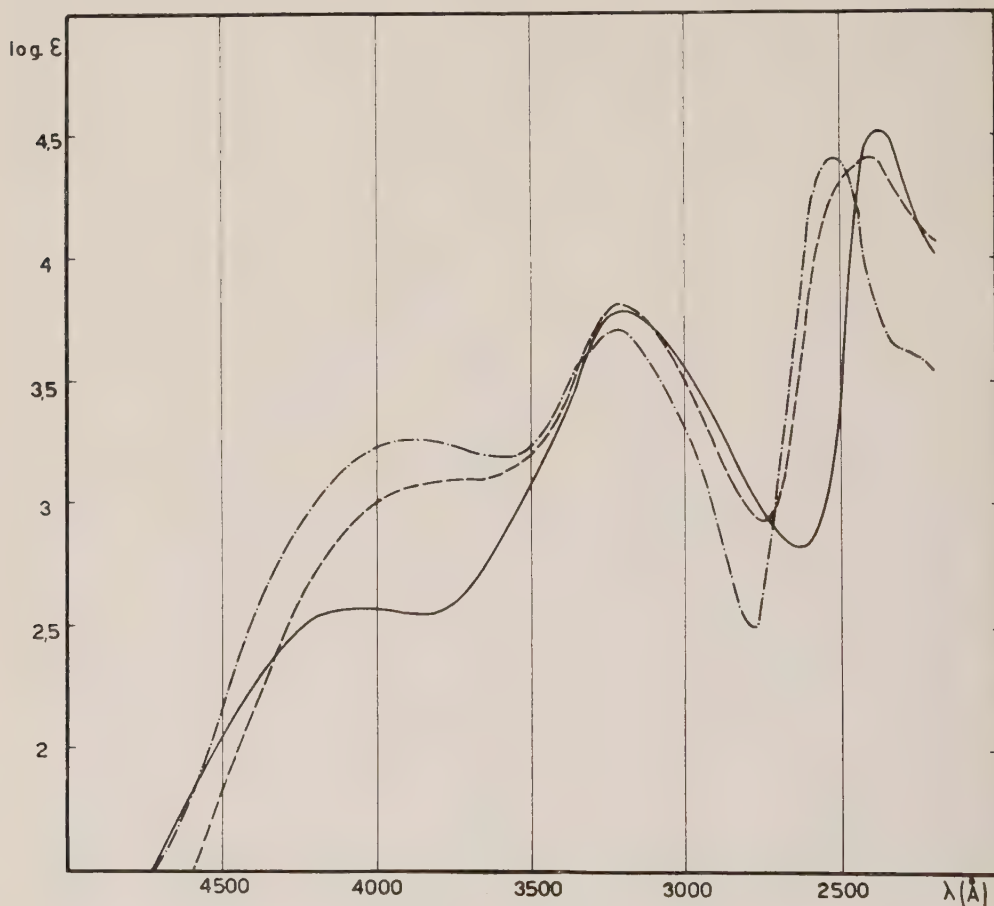


Fig. 3. - 6-metil-1, 2, 4-benzotriazina.

in acqua —————  
 in  $H_2SO_4$  al 10 % - - - - -  
 in  $H_2SO_4$  al 50 % + + + + +

Kodak («Spectro grade»), acqua bidistillata e acido solforico puro per analisi della Carlo Erba. I risultati sono raccolti nelle figure 1-6. Posizione e intensità dei massimi sono riportati in Tabella I, unitamente all'indicazione delle corrispondenti transizioni elettroniche.

(2) R. FUSCO, S. ROSSI, «Gazz. Chim. Ital.», 86, 484 (1956).

(3) R. FUSCO, S. ROSSI, «Rend. Ist. Lomb. Scienze e Lettere», 91, 186 (1957).

(4) R. A. ABRAMOVITCH, K. SCHOFIELD, «J. Chem. Soc.», 2326 (1955).

## DISCUSSIONE.

Nello spettro della 6-ammino-benzotriazina la transizione  $n \rightarrow \pi$  non è visibile in alcun solvente: probabilmente perché occultata dalla prima intensa banda  $\pi \rightarrow \pi$  che rispetto agli altri composti è sensibilmente spostata verso il rosso.

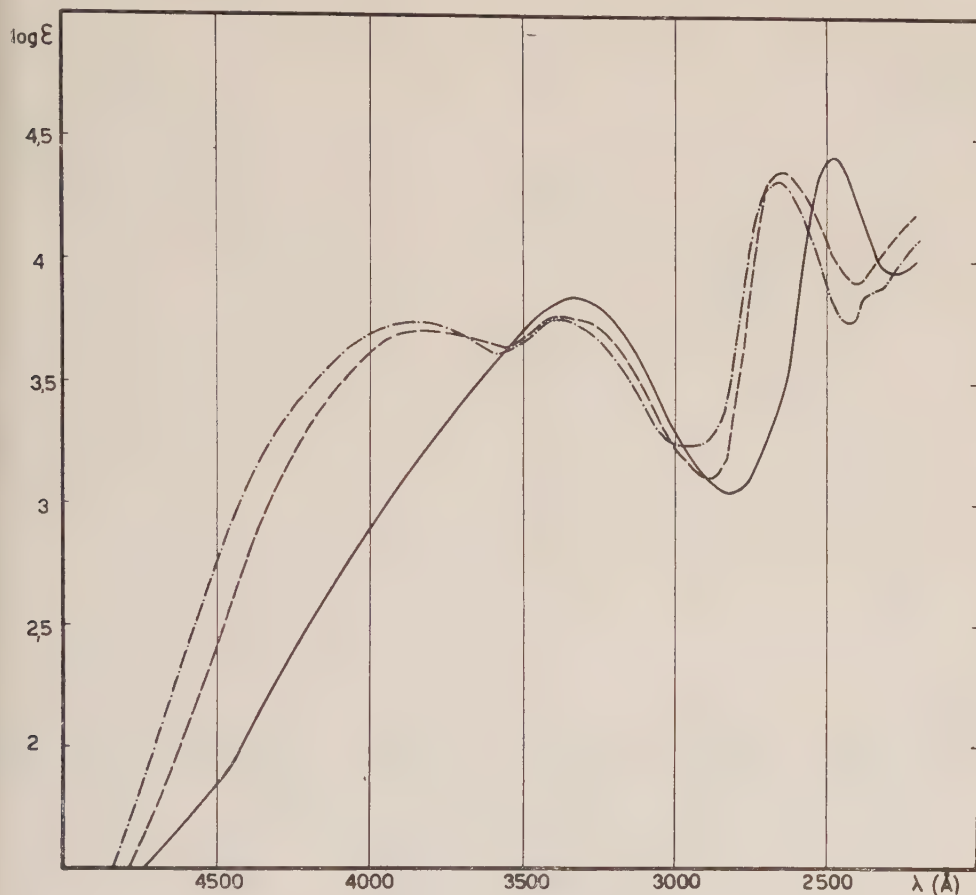


Fig. 4. — 6-metossi-1, 2, 4-benzotriazina.

in acqua —————  
in  $\text{H}_2\text{SO}_4$  al 10 % - - - - -  
in  $\text{H}_2\text{SO}_4$  al 50 % - · - · - ·

Nel caso della 6-acetil-benzotriazina la prima banda  $\pi \rightarrow \pi$  è in realtà costituita da due massimi vicini con intensità maggiore per quello a lunghezza d'onda inferiore, il che è senz'altro da attribuirsi al gruppo cromoforo aggiunto (carbonile coniugato); si noti che lo stesso fenomeno si presenta nel caso del piridilmetilchetone nei confronti della piridina <sup>(5)</sup>.

(5) M. L. SWAIN, A. EISNER, C. F. WOODWARD, B. A. BRICE, « J. Am. Chem. Soc. », 71, 1341 (1949).

Gli spettri in soluzione acquosa si rilevano estremamente interessanti per l'assegnazione delle bande alle varie transizioni elettroniche. Infatti per tutti i composti esaminati le bande  $n-\pi$  sono notevolmente influenzate

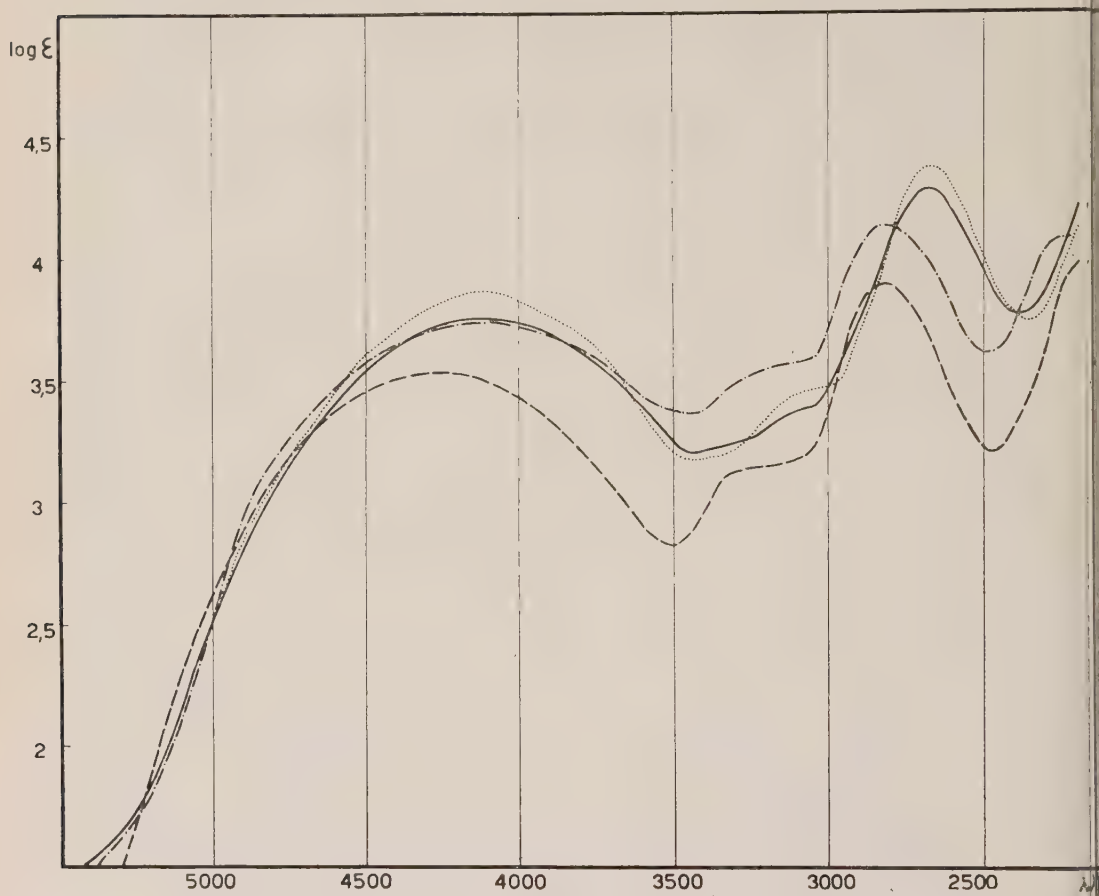


Fig. 5. - 6-ammino-1, 2, 4-benzotriazina.

in acqua —————  
 in  $H_2SO_4$  al 10 % - - - - -  
 in  $H_2SO_4$  al 50 % - · - · - ·  
 in metanolo ·········

dalla presenza o meno di acido solforico e dalla sua concentrazione, mentre le bande  $\pi-\pi$  restano praticamente inalterate.

Per indagare sull'origine dello spostamento verso il rosso delle bande  $\pi-\pi$  provocato nella benzotriazina da un sostituito qualsiasi in posizione 6 abbiamo eseguito per questi composti un calcolo, basato sulla teoria della perturbazione, analogo a quello condotto da Matsen <sup>(6)</sup> nel suo studio dei derivati benzenici monosostituiti.

(6) F. A. MATSEN, « J. Am. Chem. Soc. », 72, 5243 (1950).

Partendo dagli orbitali molecolari normalizzati della benzotriazina si sono ottenuti i livelli energetici dei suoi derivati monosostituiti e da queste energie della prima e seconda transizione  $\pi - \pi$  espresse in funzione di due parametri:  $\beta$  (integrale di scambio tra due atomi di carbonio) e  $\delta$  (para-

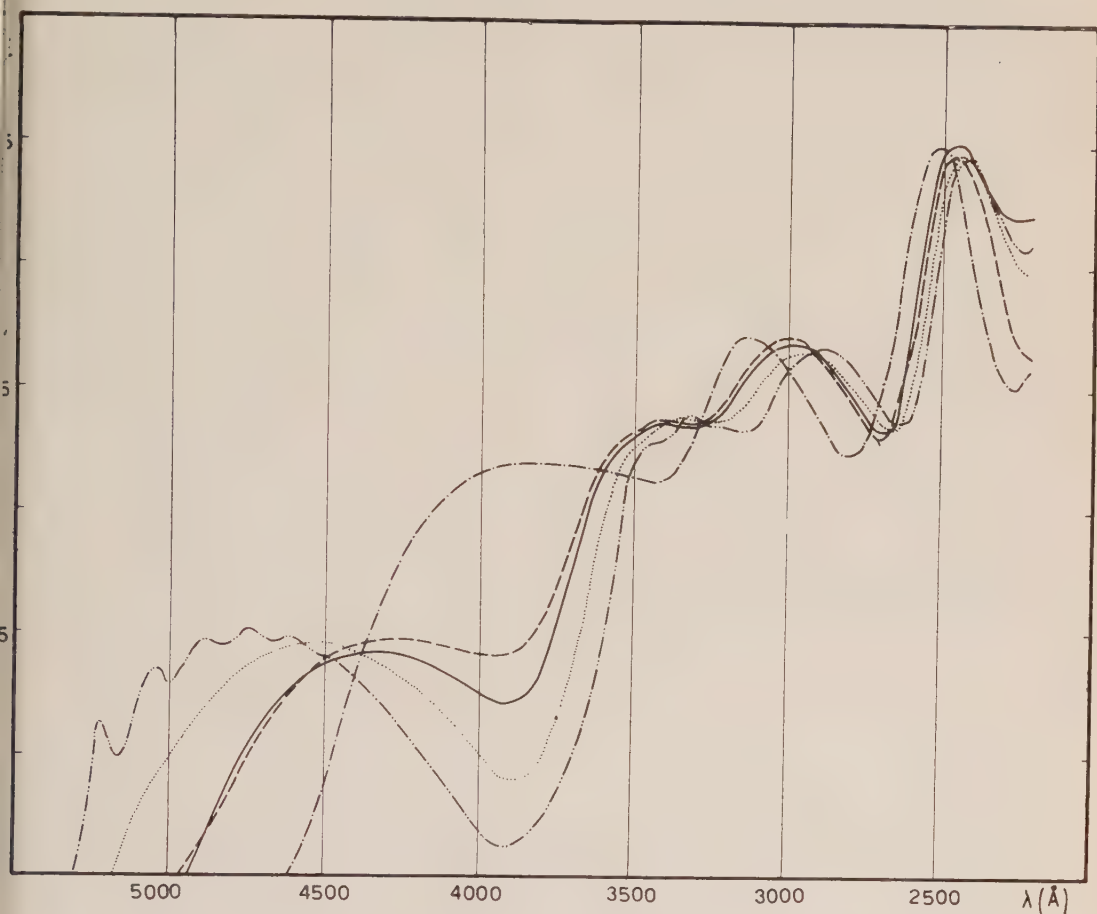


Fig. 6. - 6-acetil-1, 2, 4-benzotriazina

in acqua —————  
 in  $\text{H}_2\text{SO}_4$  al 10 % - - - - -  
 in  $\text{H}_2\text{SO}_4$  al 50 % - · - · - ·  
 in metanolo .....  
 in cicloesano - - - - -

metro caratteristico per ogni sostituito, che si può considerare come misura della sua elettronegatività).

L'incertezza nell'assegnare il più appropriato valore di  $\beta$  è stata praticamente superata limitandosi, come suggerito da Matsen, a considerare il rapporto tra l'energia di transizione teorica per la benzotriazina e quella di ogni suo derivato, e a confrontare tale rapporto con quello sperimentale.

Per ogni sostituito e per ciascuna delle due transizioni  $\pi - \pi$  sono stati quindi ricavati i valori di  $\delta$  che portano ad una perfetta coincidenza tra dati sperimentali e dati teorici.

TABELLA I.

Composto	Solvente	$n - \pi$		$1^\circ \pi - \pi$		$2^\circ \pi - \pi$	
		$\lambda_{\max}$	$\log \epsilon$	$\lambda_{\max}$	$\log \epsilon$	$\lambda_{\max}$	$\log \epsilon$
1, 2, 4-benzotriazina	H <sub>2</sub> O	4150	2,513	3075	3,640	2350	4,499
	A	(3850)	2,749	3100	3,597	2340	4,452
	B	3825	3,135	3125	3,599	2475	4,305
6-cloro-1, 2, 4-benzotriazina	H <sub>2</sub> O	4150	2,510	3200	3,840	2375	4,544
	A	(3850)	2,734	3250	3,846	2390	4,502
	B	(3775)	3,366	3250	3,919	2525	4,438
6-metil-1, 2, 4-benzotriazina	H <sub>2</sub> O	4050	2,574	3200	3,775	2375	4,506
	A	(3750)	3,097	3225	3,802	2425	4,409
	B	3875	3,258	3225	3,703	2525	4,403
6-metossi-1, 2, 4-benzotriazina	H <sub>2</sub> O	—	—	3325	3,832	2475	4,428
	A	(3850)	3,703	3375	3,762	2625	4,368
	B	3900	3,736	3400	3,754	2675	4,331
6-ammino-1, 2, 4-benzotriazina	M	—	—	4100	3,853	2675	4,365
	H <sub>2</sub> O	—	—	4150	3,744	2675	4,271
	A	—	—	4250	3,528	2825	3,890
	B	—	—	4150	3,736	2825	4,124
6-acetil-1, 2, 4-benzotriazina	C	5215	2,131	3325	3,400	2425	4,471
		5035	2,350	2875	3,683		
		4885	2,468				
		4740	2,511				
		4615	2,487				
	M	4525	2,453	(3325)	3,390	2425	4,471
				2925	3,654		
	H <sub>2</sub> O	4325	2,422	3400	3,380	2450	4,526
				3000	3,696		
	A	4225	2,480	3400	3,380	2450	4,473
				3000	3,724		
	B	3800	3,206	3150	3,721	2500	4,514

C=cicloesano M=metanolo A=H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> al 10 % B=H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> al 50 % ( ) flesso.TABELLA II. - Valori di  $\delta$ .

Sostituente X	Energia ionizzazione		Teoria della perturbazione		
	XH	CH <sub>3</sub> X	derivati benzenici	benzotriazine	
				$1^\circ \pi - \pi$	$2^\circ \pi - \pi$
CH <sub>3</sub>	2,-	1,4	2,9	1,488	1,978
Cl	1,9	1,4	2,5	1,424	1,878
(OH) OCH <sub>3</sub>	1,8	1,2	1,8	1,246	1,294
NH <sub>2</sub>	1,2	0,9	1,6	1,023	1,053



Su questi valori di  $\delta$ , riportati in Tabella II, si può osservare quanto segue:

a) l'accordo tra i valori ottenuti considerando le due transizioni si può dire perfetto per il gruppo  $\text{OCH}_3$  e per il gruppo  $\text{NH}_2$ ; soddisfacente per il gruppo  $\text{CH}_3$  e per il gruppo  $\text{Cl}$  tenuto conto soprattutto del fatto che un errore di 1  $m\mu$  nella lunghezza d'onda del massimo di assorbimento per questi derivati può portare ad una differenza di 0,2 nel valore di  $\delta$  e del fatto che inevitabili approssimazioni sono state introdotte per semplificare il calcolo nella teoria della perturbazione.

b) l'ordine di successione nei valori ottenuti per i quattro sostituenti esaminati riproduce esattamente quello ritrovato da Matsen <sup>(6)</sup> e quelli calcolati dalle energie di ionizzazione; il valore di  $\delta$  per un sostituyente X si può infatti mettere in relazione con l'energia di ionizzazione di un composto semplice contenente X. I valori di  $\delta$  riportati in Tabella II sono basati sulle energie di ionizzazione per la serie di composti  $\text{HX}$  e  $\text{CH}_3\text{X}$  riportate da Price <sup>(7)</sup>.

c) I valori ottenuti sono molto attendibili anche in senso assoluto ed infatti meglio si accordano ai valori calcolati dalle energie di ionizzazione che non quelli ritrovati da Matsen applicando la teoria della perturbazione ai derivati benzenici monosostituiti.

Osservando le espressioni che danno il salto di energia teorico per le prime due transizioni  $\pi - \pi$  nella benzotriazina e nei suoi derivati monosostituiti abbiamo visto per quale campo di valori di  $\delta$  si ha uno spostamento del massimo di assorbimento verso il rosso.

Per la prima transizione occorre che:

$$\frac{0,0674 - 0,02614 \delta}{\delta^2 - 0,8166 \delta - 0,03265} \quad \text{sia positivo oppure compreso tra } 0 \text{ e } -0,00069$$

il che si verifica per valori di  $\delta$  positivi compresi da 0,854 a 2,58 o maggiori di 36 e per valori negativi da 0,038 a  $-\infty$ .

Per la seconda transizione occorre che:

$$\frac{0,08377 + 0,00149 \delta}{\delta^2 - 0,0238 \delta - 0,71034} \quad \text{sia positivo oppure compreso tra } 0 \text{ e } -0,00114$$

il che si verifica per valori di  $\delta$  positivi da 0,854 a  $+\infty$  e per valori negativi da  $-0,831$  a  $-5,4$ .

È facile perciò osservare che nel campo dei valori più probabili per il  $\delta$  di un sostituyente qualsiasi, siano essi positivi che negativi, si ha in ogni caso uno spostamento di entrambi i massimi verso le lunghezze d'onda maggiori, come in effetti sperimentalmente si è verificato.

(7) W. C. PRICE, «Chem. Rev.», 41, 257 (1947).

**Biochimica.** — *Sul meccanismo d'azione dell'elastasi* (\*). Nota (\*\*) di VITTORIO MORET e LORENZO GOTTE, presentata dal Corrisp. A. RONCATO.

L'elastasi, prodotto dalla parte esocrina del pancreas (Cohen e coll. [1]), agisce elettivamente sulla elastina, solubilizzandola (Balò e Banga [2]). Il suo meccanismo di azione non è ancora completamente chiarito, a causa soprattutto delle difficoltà riscontrate nella purificazione dell'enzima e della complessa struttura del substrato elastinico. L'elastina infatti, come abbiamo già esposto in altra Nota, non è una entità fibrillare omogenea puramente proteica, ma sarebbe costituita da due frazioni: delle quali una prevalente di natura proteica vera e propria e l'altra, in quantità relativamente molto minore e intimamente legata alla prima, sarebbe di natura mucoproteica avente come gruppo prostetico il condroitinsolfato. La presenza di quest'ultima nella struttura della fibra elastinica, secondo i nostri risultati già esposti (Gotte e Moret [3, 4]), influirebbe notevolmente sulla particolare resistenza di tale fibra all'azione solubilizzante dell'idrato sodico, riuscendo a proteggerla per un certo tempo dall'azione idrolitica di quest'ultimo.

Per avvalorare la nostra conclusione, già suffragata da dati istochimici e chimici, dell'esistenza di una frazione mucoproteica nella struttura della elastina e partendo dal presupposto che tale frazione possa influire anche sull'azione solubilizzante enzimatica dell'elastasi, la quale per poter sciogliere completamente l'elastina deve agire anche su tale frazione mucoproteica, abbiamo creduto opportuno sottoporre l'elastina all'azione dell'elastasi in presenza di un preparato mucoproteico di condroitinsolfato (C.S.A.), in modo da cimentare l'attività dell'elastasi stessa ad una azione competitiva tra i due substrati mucoproteici: uno rappresentato da quello da noi aggiunto e l'altro dalla frazione mucoproteica dell'elastina.

#### PARTE SPERIMENTALE.

L'elastina è stata ottenuta dal ligamento nucale bovino con il metodo già descritto (loc. cit. [3]). Il nostro preparato mucoproteico di C.S.A. (condroitinsolfato<sup>(1)</sup>) è stato estratto dalla cartilagine tracheale bovina secondo il metodo di Einbinder e Schubert [5]. L'enzima elastasi è stato preparato

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica e Istituto di Istologia ed Embriologia dell'Università di Padova.

(\*\*) Pervenuta all'Accademia il 17 ottobre 1957.

(1) Il condroitinsolfato da noi usato, estratto dalla cartilagine tracheale bovina, non è perfettamente puro, nel senso che oltre alla parte prostetica contiene ancora una piccola quota proteica ( $\sim 10\%$ ) fortemente ancorata alla prima. D'altra parte, a quanto ci risulta (MATHEWS, DORFMANN [6], MUIR [7], BERNARDI e coll. [8]) non sussiste un prodotto di C. S. A. commerciale completamente privo di proteina.

partendo da una polvere acetonica (Viokase. Monticello. Illinois) di pancreas bovino, seguendo il metodo di estrazione proposto da Balò e Banga (loc. cit. [2]). Schematicamente questo metodo si compone di numerosi successivi stadi, ognuno dei quali consiste essenzialmente in una estrazione della polvere in tampone acetato M/10 pH 4,7 e successiva precipitazione frazionata con  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ .

Come ricerca preliminare, abbiamo ritenuto necessario controllare la purezza del prodotto finale enzimatico. Per questo controllo abbiamo usato l'elettroforesi su carta, anziché quella in fase liquida con il Tiselius perché

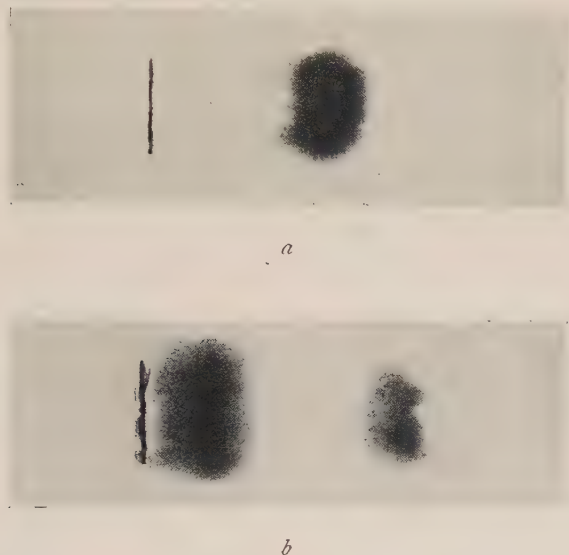


Fig. 1. — Traccati elettroforetici del preparato enzimatico, colorati con il verde luce.

a) in tampone glicina-NaOH 0,2 M pH = 8,6.

b) in tampone veronal  $\mu = 0,1$  pH = 8,6.

quest'ultimo metodo avrebbe richiesto una quantità di enzima molto maggiore. D'altra parte la quantità di polvere enzimatica alla fine delle numerose e successive estrazioni e precipitazioni era molto scarsa: da 100 g di polvere acetonica pancreatica si otteneva circa 600–700 mg di polvere enzimatica, contenente il 72 % circa di  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  ed il 28 % di proteina (0,3 % circa rispetto alla polvere acetonica iniziale). La polvere enzimatica sottoposta ad elettroforesi in tampone glicina-NaOH, dava un'unica frazione proteica, colorabile al verde luce (fig. 1 a). La stessa polvere per elettroforesi in tampone veronal  $\mu = 0,1$  pH = 8,6, si suddivideva invece in due frazioni proteiche (fig. 1 b) ben separate.

Di queste due frazioni, previamente eluite, la prima (quella preponderante e meno mobile elettroforeticamente) era attiva in tampone glicina-NaOH M/10 pH 10,20 e aveva un'attività molto minore in tampone carbonato-HCl N/10 pH 10,20. (Del resto anche l'enzima non sottoposto ad

elettroforesi era molto più attivo in tampone glicina che in tampone carbonato). La seconda frazione (quella più mobile elettroforeticamente e meno abbondante) era inattiva in ambedue i tamponi.

Riunendo le due frazioni separate elettroforeticamente a  $0^{\circ}\text{C}$ , si aveva la stessa attività (in tampone glicina) che con la prima frazione da sola.

I risultati sopraesposti ci portavano a concludere che nelle prove enzimatiche potevamo usare la polvere enzimatica senza purificarla ulteriormente per l'elettroforesi perché, pure essendo essa composta da due frazioni proteiche, agli effetti dell'attività solubilizzante sull'elastina, poteva essere con-

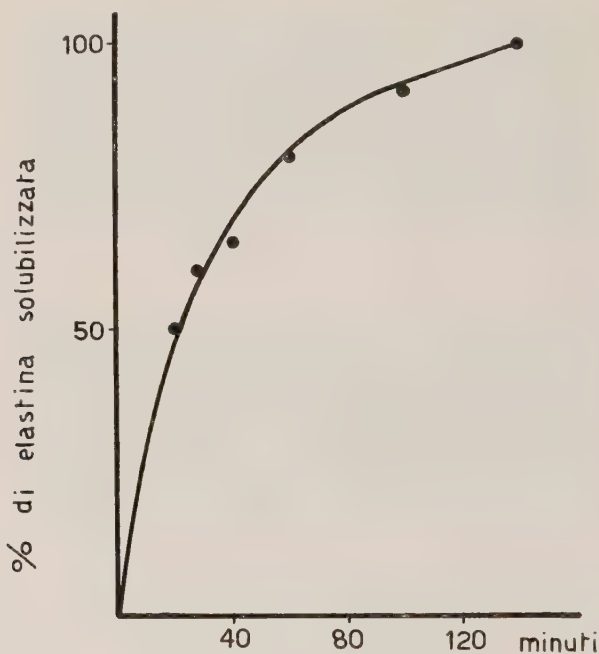


Fig. 2. - Attività elastolitica dell'elastasi in funzione del tempo.

siderato come un enzima praticamente puro, essendo una delle due frazioni (quella meno abbondante) inattiva sulla elastina.

L'attività enzimatica elastolitica veniva determinata nel modo seguente (Banga).

Una quantità nota di polvere enzimatica era sciolta in tampone glicina-NaOH  $0,1\text{ N}$  pH  $10,20$  o in tampone  $\text{Na}_2\text{CO}_3\text{--HCl}$   $0,1\text{ N}$  pH  $10,20$ . —  $0,5\text{ ml}$  di questa soluzione erano aggiunti, in provette da centrifuga, a  $2\text{ ml}$  dello stesso tampone in cui era sospesa una determinata quantità di elastina finemente triturrata. Le provette venivano incubate a  $38^{\circ}\text{C}$  e convenientemente agitate per  $20'$ . Dopo centrifugazione il supernatante era scartato ed il residuo insolubile, lavato con alcool, veniva essiccato a  $105^{\circ}$  fino a peso costante. La differenza fra il peso di questo residuo e quello della prova in bianco (in assenza dell'enzima) rappresentava la quantità di elastina solubilizzata.

## RISULTATI.

Dapprima abbiamo studiato la cinetica dell'attività elastolitica dell'enzima in funzione del tempo. I risultati sono riassunti graficamente nel diagramma di fig. 2, dove in ascissa è posto il tempo in minuti e in ordinata la quantità % di elastina solubilizzata rispetto ad una stessa quantità di elastina usata nell'esperienza.

Dal diagramma si può dedurre che l'attività elastolitica dell'enzima era praticamente lineare durante i primi 20 minuti. Tale intervallo di tempo poteva quindi essere considerato adatto per calcolare la velocità iniziale dell'attività elastolitica, essendo quest'ultima praticamente costante in tale intervallo di tempo.

Stabiliti questi necessari dati preliminari, abbiamo iniziato lo studio dell'attività enzimatica elastolitica sottoponendo, come abbiamo detto, l'elastina all'azione dell'elastasi in presenza o no di un preparato mucoproteico di C.S.A. da noi ottenuto con il metodo di Einbinder e Schubert (loc. cit. [5]). Nella tabella seguente sono riportati i dati sperimentali relativi ad una di queste esperienze.

mg di elastina usata	mg di elastina solubilizzata	mg di C.S.A. aggiunto	$V/V_i$
20	11,8	0	1,64
20	7,2	30	
35	17	0	1,54
35	11	30	
50	20	0	1,33
50	15	30	
75	25	0	1,28
75	19,5	30	

Dai dati esposti nella tabella risulta che il nostro preparato di C.S.A. inibiva l'attività elastolitica dell'enzima e questa inibizione diminuiva con l'aumentare della concentrazione del substrato. Infatti aumentando la concentrazione dell'elastina, diminuiva il rapporto  $V/V_i$  [dove  $V$  = velocità iniziale in assenza di inibitore e  $V_i$  = velocità iniziale in presenza di inibitore (C.S.A.)]. Già da questo comportamento si poteva dedurre che il C.S.A. esplicava sull'attività elastolitica un'azione inibente di tipo competitivo. Ulteriore conferma di questa inibizione competitiva era data anche dal cri-



terio grafico che, come è noto, è stato proposto da Lineweaver e Burk [9] per valutare il tipo di inibizione su una determinata attività enzimatica. Seguendo questo criterio, nel diagramma di fig. 3 in ascissa è posto l'inverso della concentrazione del substrato e in ordinata l'inverso della velocità iniziale, espressa nel nostro caso come mg di elastina solubilizzata in 20 minuti. Come si vede dal diagramma di fig. 3, le due rette (in presenza ed in assenza di inibitore) presentano l'andamento prevedibile, in base a calcoli teorici, nel caso di una inibizione competitiva.

In base a questi risultati si poteva dunque concludere che il nostro preparato di C.S.A. esplica sull'attività elastolitica dell'elastasi un'azione inibente di tipo competitivo. Questa constatazione, a nostro avviso, avvalora la ipotesi che nella struttura della fibra elastinica sussista

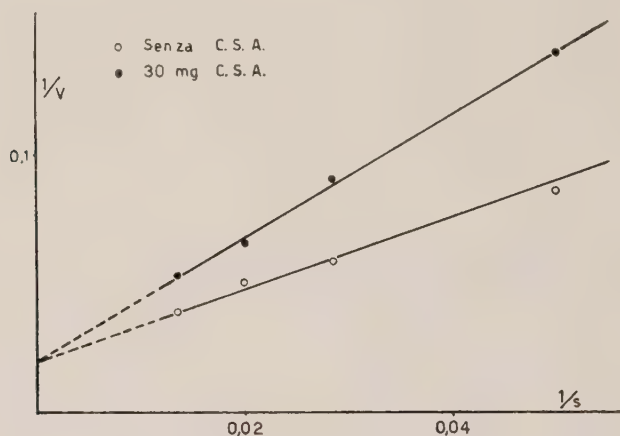


Fig. 3. - Criterio grafico dell'inibizione competitiva (secondo Lineweaver e Burk).

una frazione mucoproteica e che questa frazione influenzi l'attività elastolitica dell'elastasi, essendo quest'ultima inibita competitivamente (almeno nei primi 20 minuti) da un substrato di natura analogo da noi aggiunto.

Non possiamo dire con quale meccanismo il preparato mucoproteico di C.S.A. esplici la sua azione competitiva. Potrebbe darsi che l'attività elastolitica venga inibita in quanto l'elastasi agirebbe, oltre che sull'elastina, anche (con meccanismo peptidasico) sul preparato mucoproteico da noi aggiunto. Ci sembra interessante notare a questo proposito come anche la papaina, enzima proteolitico vegetale, il quale solubilizza l'elastina (Balò e Banga [2]), sia capace di idrolizzare pure la parte proteica di C.S.A., a differenza della tripsina, pepsina e chimotripsina i quali non attaccano tali substrati (Muir, loc. cit. [7]). Probabilmente anche l'elastasi, come la papaina, solubilizza l'elastina in quanto può digerire anche la mucoproteina strettamente legata alla fibra elastinica.

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] COHEN H., MEGEL H. e W. KEINBERG, « Fed. Proc. », 16, 23 (1957).
- [2] BALÒ J., BANGA I., « Biochem. J. », 46, 384 (1950).
- [3] MORET V. e L. GOTTE, questi « Rendiconti », in corso di stampa.
- [4] GOTTE L. e V. MORET, questi « Rendiconti », in corso di stampa.
- [5] EINBINDER J. e M. SCHUBERT, « J. Biol. Chem. », 185, 725 (1950).
- [6] MATTHEWS M. B. e A. DORFMAN, « Arch. of Biochem. », 42, 41 (1952).
- [7] MUIR H., « Biochem. J. », 62, 26 p. (1956).
- [8] BERNARDI G., GOTTE L. e C. CESSI, « Experientia », in corso di stampa.
- [9] LINEWEAVER H. e D. BURK, citati da: FRIEDENWALD J. S. e MAENGWYN-DAVIES G. D., *A Symposium on the mechanism of enzyme action*, Baltimore Press (1954).

**Biochimica.** — *Prime ricerche sul sistema dei citocromi di Aplysia* (\*). Nota di LUISA TOSI, ANNA GHIRETTI-MAGALDI e FRANCESCO GHIRETTI, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

Queste ricerche sono state eseguite con l'intento di estendere agli Invertebrati marini la conoscenza dei sistemi enzimatici che partecipano alla respirazione cellulare. Tale studio è stato condotto fino ad ora negli Echinodermi <sup>(1)</sup> e in un gruppo di Invertebrati ad Emocianina: i Cefalopodi <sup>(2)</sup>. Ci ripromettiamo di riferire in seguito i risultati ottenuti con altri gruppi come Crostacei, Anellidi e Tunicati nei quali si presume che il trasporto di elettroni dal substrato ossidabile all'ossigeno molecolare avvenga in modo identico a quello trovato nei Mammiferi. Solo quando tale studio sarà completo, si potranno trarre conclusioni di ordine generale; per adesso ci limitiamo a mettere in rilievo le analogie e le differenze riscontrate fra i sistemi respiratori degli organismi esaminati e quelli assai meglio noti dei batteri, del lievito e dei Vertebrati superiori.

L'*Aplysia limacina* è un grosso Gasteropodo marino sprovvisto di pigmento respiratorio nel sangue. Da ogni animale del peso di 0,5–1,0 kg si possono raccogliere 50–100 ml di emolinfa quasi incolore e che resta tale anche dopo saturazione con ossigeno. La composizione ionica di questo liquido è qualitativamente e quantitativamente analoga a quella dell'acqua di mare <sup>(3)</sup>. Le proteine in esso contenute e che precipitano facilmente dopo dialisi contro acqua corrente per 12–18 ore, si rivelano sprovviste di ferro e di rame.

(\*) Lavoro eseguito nel Reparto di Fisiologia della Stazione Zoologica di Napoli, con un contributo (RG-4845) del National Institutes of Health, United States Public Health Service.

(\*\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

(1) R. MAGGIO e A. GHIRETTI-MAGALDI, « Exper. Cell. Res. » (in corso di stampa).

(2) A. GHIRETTI-MAGALDI, A. GIUDITTA e F. GHIRETTI, « Biochem. J. », 66, p. 303 (1957); « J. Cell. Comp. Physiol. » (in corso di stampa).

(3) F. BOTTAZZI, « Arch. Fisiol. », 3, p. 416 (1906).

I muscoli di *Aplysia* contengono mioglobina. Questo pigmento è stato recentemente isolato e cristallizzato dai muscoli della radula e dello stomaco che ne sono particolarmente ricchi <sup>(4)</sup>.

Mediante ricerche eseguite su particolari isolati dai muscoli e su estratti di epatopancreas, si è visto che in *Aplysia* il sistema degli enzimi respiratori è formato dai citocromi *a*, *a*<sub>3</sub>, *b* e *c* simili a quelli dei Mammiferi e del lievito e da un pigmento avente caratteristiche analoghe a quelle del citocromo *h* recentemente estratto dall'epatopancreas di *Helix* <sup>(5)</sup>.

#### ESPERIMENTI E RISULTATI.

*I citocromi dei muscoli.* - I muscoli della radula e dello stomaco venivano prelevati rapidamente e raffreddati su ghiaccio. Dopo aver allontanati i legamenti e gli altri tessuti, essi erano sminuzzati, sospesi in acqua e i frammenti raccolti su garza. Il lavaggio era ripetuto 8-10 volte fino a quasi completo allontanamento della mioglobina. Il materiale era quindi omogeneizzato a freddo in Waring blender per 7 min. con soluzione tampone di fosfato 0,1 M a pH 7,3. Circa 500 ml di tampone erano usati per ogni 100 gr. di muscolo. La sospensione densa era centrifugata a 600 g per 30 min; il sedimento risospeso in tampone, omogeneizzato di nuovo e centrifugato. I supernatanti combinati erano quindi centrifugati a 30.000 g per 1 ora nella centrifuga preparativa Spinco. Il sedimento veniva lavato diverse volte con tampone di fosfati fino ad eliminazione completa di ogni residuo di mioglobina.

La ricerca dei citocromi presenti nella sospensione di particolato era fatta secondo i metodi descritti altrove <sup>(6)</sup>. Le figg. 1 e 2 mostrano gli spettri differenziali (ridotto meno ossidato) ottenuti dopo trattamento con diversi riducenti (succinato, ascorbato, idrosolfito). Dall'esame di essi si vede chiaramente che nei particolati esaminati è presente un sistema formato dai citocromi *a*, *a*<sub>3</sub>, *b* e *c*. Infatti i massimi a 432 e 444 *mμ* nella zona del Soret corrispondono alle bande *γ* dei citocromi *b* e *a*<sub>3</sub> rispettivamente; quelli a 522-524 *mμ* e a 556-562 *mμ* sono le bande *β* e *α* dei citocromi *b* + *c* ed infine il massimo a 605 *mμ* è quello della banda *α* del citocromo *a*.

Nella zona del Soret la banda *γ* del citocromo *c* non è visibile. Questa banda viene facilmente nascosta dalle bande vicine data la bassa concentrazione relativa del pigmento che è stato in gran parte allontanato durante la preparazione. Ciò è stato già osservato negli spettri differenziali di Batteri <sup>(7)</sup> e di particolati di Mammiferi <sup>(8)</sup> e di Invertebrati <sup>(2)</sup>. Tuttavia la presenza del

(4) A. ROSSI-FANELLI e A. ANTONINI, « Biochimia », 22, p. 336 (1957).

(5) J. KEILIN, « Biochem. J. », 64, p. 663 (1956); « Nature », 180, p. 428 (1957).

(6) A. GHIRETTI-MAGALDI, A. GIUDITTA e F. GHIRETTI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 22, p. 753 (1957).

(7) L. SMITH, « Arch. Biochem. Biophys. », 50, p. 299 (1954); B. CHANCE, « Nature », 169, p. 215 (1952).

(8) B. CHANCE e G. R. WILLIAMS, « Advan. Enzymol. », 17, p. 65 (1956).

citocromo  $c$  nei particolati, sia pure in quantità catalitiche, si può desumere dalla comparsa delle bande dei citocromi  $a$  e  $a_3$  quando si impiega il succi-

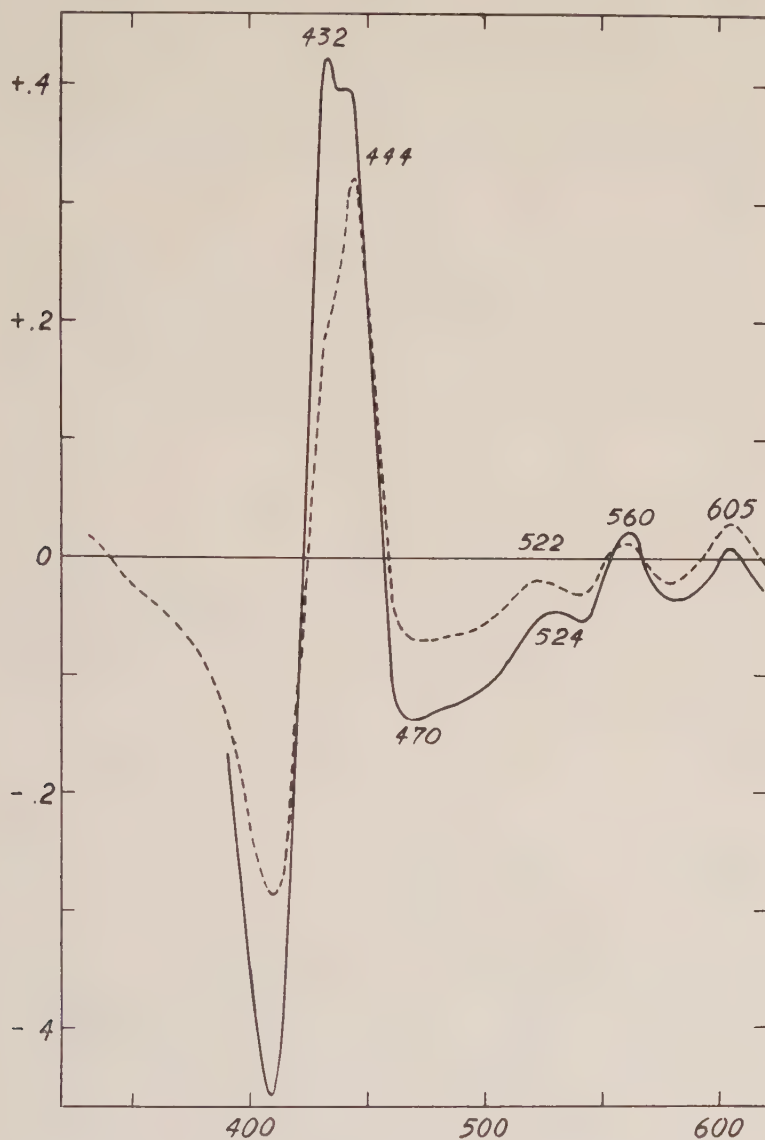


Fig. 1. - Spettro differenziale (ridotto meno ossidato) di una sospensione di particolato isolato dai muscoli della radula di *Aplysia limacina*.

Linea continua: ridotto con idrosolfito meno ossidato; linea tratteggiata: ridotto con succinato meno ossidato. Ascisse: lunghezze d'onda in  $m\mu$ ; ordinate: densità ottica.

nato come riducente, nonché dalla capacità del particolato di ossidare l'acido succinico in presenza di aria.

Lo spettro differenziale del composto del citocromo  $a_3$  con l'ossido di carbonio è rappresentato nella fig. 2. Il massimo nel Soret (a 424  $m\mu$ ) è

alquanto spostato verso le basse lunghezze d'onda rispetto a quello (430  $m\mu$ ) che presenta l'analogo composto dei Mammiferi <sup>(9)</sup> e dei Cefalopodi <sup>(2)</sup>.

*Attività enzimatiche dei particolati.* - I particolati di muscolo ossidano attivamente il succinato in presenza di aria, con e senza aggiunta di citocromo *c*. L'attività succinossidasica è stata studiata manometricamente <sup>(10)</sup>

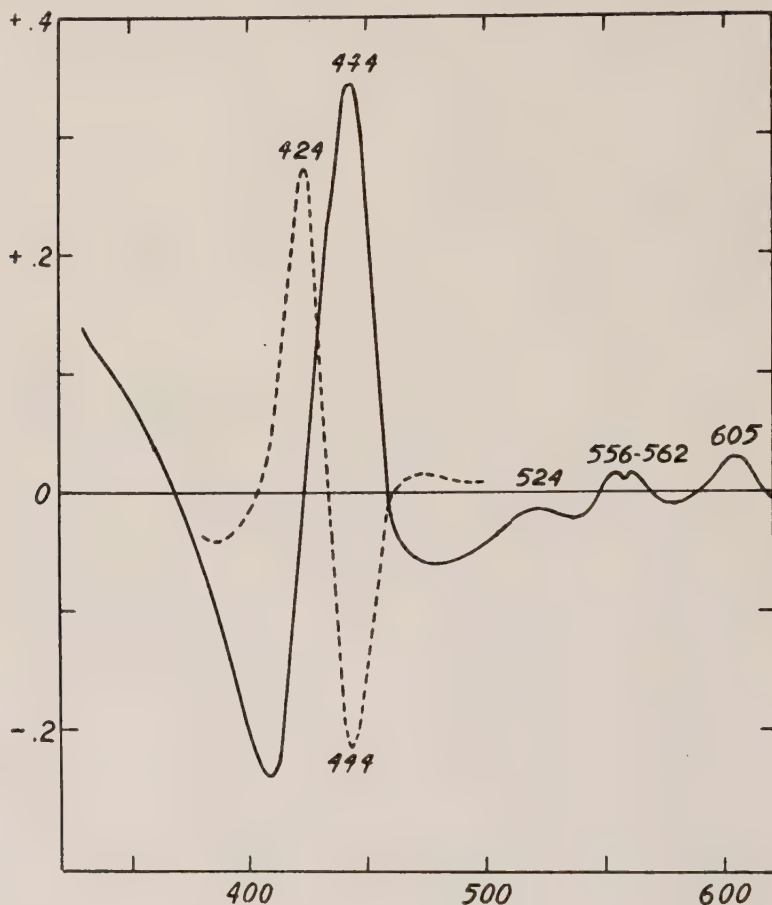


Fig. 2. - Spettro differenziale di una sospensione di particolato isolato dai muscoli della radula di *Aplysia limacina*.

Linea continua: ridotto con ascorbato meno ossidato. Linea tratteggiata: trattato con CO dopo riduzione con ascorbato meno ridotto con ascorbato.

in presenza di tampone di fosfato 0,1 M a pH 7,3. Il cit. *c* usato era quello di bue, preparato in laboratorio secondo il metodo di Keilin e Hartree <sup>(11)</sup>. L'attività citocromossidasica è stata studiata manometricamente secondo il

(9) B. CHANCE, « J. Biol. Chem. », 202, p. 385 (1953).

(10) E. C. SLATER, « Biochem. J. », 45, p. 1 (1949).

(11) D. KEILIN e E. F. HARTREE, « Proc. Roy. Soc. London », 122 B, p. 298 (1937).



metodo raccomandato da Slater <sup>(12)</sup>. Il cit. *c* di Mammifero era ridotto con ascorbato, o idrochinone o para-fenilendiammina (p. f. d.). L'aumento del consumo di ossigeno in presenza dei vari substrati è riportato nella Tabella I.

TABELLA I.

*Determinazione delle attività succino-ossidastica e citocromosidastica dei particolati di muscolo della radula di «Aplysia limacina».*

L'ossidazione del succinato è stata studiata con e senza aggiunta di citocromo *c*. Per la riossidazione del cit. *c*, l'acido ascorbico, l'idrochinone e la para-fenilendiammina (p. f. d.) erano usati come substrati. Concentrazione finale dei substrati: 0,01 M in tampone di fosfati; 0,03 M KOH nel pozzetto centrale. Volume finale 3,1 ml. Fase gassosa aria. Temp. 25° C.

	Q <sub>O<sub>2</sub></sub>	
	Esp. I	Esp. II
Succinato	2,5	6,0
» + Cit. <i>c</i> $3 \times 10^{-7}$ M	9,0	11,2
Ascorbato	10,0	0
» + Cit. <i>c</i> $6 \times 10^{-7}$ M	45,0	49,0
Idrochinone	5,0	4,0
» + Cit. <i>c</i> $6 \times 10^{-7}$ M	33,5	35,0
p. f. d.	—	9,0
» + Cit. <i>c</i> $6 \times 10^{-7}$ M	—	26,5

*Il Citocromo h dell'epatopancreas.* — L'epatopancreas di *Aplysia* è una ghiandola digestiva molto voluminosa, di colore verde o giallo bruno, facilmente separabile dal corpo. Esso contrae numerosi rapporti con l'intestino che decorre in un solco scavato nella sostanza epatica e avvolge l'organo come un nastro. Le cellule dell'epatopancreas sono sempre ripiene di numerosi granuli di origine alimentare <sup>(13)</sup>. Infatti in *Aplysia*, come in altri Invertebrati, per esempio Cefalopodi, l'assorbimento precede la digestione.

L'organo era prelevato da animali vivi appena giunti in laboratorio e liberato dall'intestino sotto acqua di mare. La massa dell'epatopancreas era omogenata in Waring blender per 1 minuto con acqua alcalina (pH 8,0 ca) per aggiunta di ammoniaca. Dopo centrifugazione a 800 g per 30 min. il

(12) E. C. SLATER, « Biochem. J. », 44, p. 305 (1949).

(13) P. ENRIQUES, « Mitth. Zool. Stat. Neapel », 15, p. 281 (1902).

sedimento veniva estratto di nuovo e ricentrifugato come sopra. Il metodo usato per l'estrazione del cit. *h* consisteva dei seguenti stadi.

1° Precipitazione con acetato basico di piombo. I supernatanti combinati erano portati a pH 8-9 con ammoniaca e trattati con 7 volumi di una soluzione al 25 % di acetato basico di piombo. Il precipitato, prima di essere scartato, era risospeso in acqua alcalina contenente 5 ml della soluzione di acetato di piombo per 100 ml e ricentrifugato come sopra. I supernatanti combinati erano portati a pH 6 con acido acetico diluito e l'eccesso di acetato di piombo precipitato con soluzione satura di solfato di sodio e allontanato mediante centrifugazione.

2° Precipitazione con solfato di ammonio. Al supernatante, neutralizzato a pH 7,3-7,5, veniva aggiunto solfato di ammonio fino al 65 % di saturazione. Dopo una notte a 2°C il precipitato formatosi veniva raccolto mediante filtrazione su Celite Hyflo, lavato con solfato di ammonio al 65 % e a pH 7,0, ridisciolti in acqua e separato dalla Celite per filtrazione. Dopo un secondo trattamento con solfato di ammonio al 65 % di saturazione (in tuba da dialisi), il precipitato era raccolto mediante centrifugazione, lavato, disciolto in acqua e dializzato contro acqua corrente.

3° Adsorbimento su gel di fosfato di calcio. Il dializzato era diluito fino a contenere circa 10 mgr di proteina per ml e trattato ripetutamente con piccole quantità di gel di fosfato di calcio fino ad adsorbire la massima parte delle proteine interferenti fortemente colorate in bruno. Dal supernatante, di colore giallo chiaro, il pigmento era precipitato con solfato di ammonio al 65 % di saturazione, centrifugato, ridisciolti e dializzato contro soluzione di tampone di fosfato a pH 7,4 0,002 M e, quando necessario, concentrato in essiccatore sotto vuoto.

Il grado di purificazione era seguito spettrofotometricamente dal valore del rapporto delle densità ottiche di assorbimento misurate a 276  $m\mu$  ed a 424  $m\mu$ . Quest'ultimo valore corrisponde al massimo della banda  $\gamma$  del pigmento nella forma ridotta. La concentrazione delle proteine era determinata spettrofotometricamente sec. Warburg e Christian <sup>(14)</sup>. Il gel di fosfato di calcio era preparato secondo il metodo di Keilin e Hartree <sup>(15)</sup>. Il massimo grado di purificazione del prodotto finale, calcolato come sopra, era cinque, sei volte maggiore di quello del primo precipitato con solfato di ammonio ( $D_{276}/D_{424} = 5,79$ ).

Lo spettro del citocromo *h* purificato è riportato nella fig. 3. Lo spettro del pigmento nella forma ossidata presenta nella zona del Soret una banda a 410-412  $m\mu$  e nel visibile due bande poco accentuate rispettivamente a 530-536  $m\mu$  e a 558-562  $m\mu$ . Dopo aggiunta di idrosolfito o ascorbato o cisteina compaiono tre bande nettamente distinte con massimi rispettivamente a 424  $m\mu$  (banda  $\gamma$ ), a 526  $m\mu$  (banda  $\beta$ ) e a 556  $m\mu$  (banda  $\alpha$ ).

(14) O. WARBURG e W. CHRISTIAN, (citato da H. N. KALCKAR, « J. Biol. Chem. », 167, p. 461 (1947).

(15) D. KEILIN e E. F. HARTREE, « Proc. Roy. Soc. London », 124 B, p. 397 (1938).

## CONSIDERAZIONI E CONCLUSIONI.

Il sistema dei citocromi che è stato messo in evidenza nei particolati isolati dai muscoli di *Aplysia* è, almeno per quanto risulta dall'analisi degli spettri differenziali, assai simile a quello dei Mammiferi e di altri Molluschi.

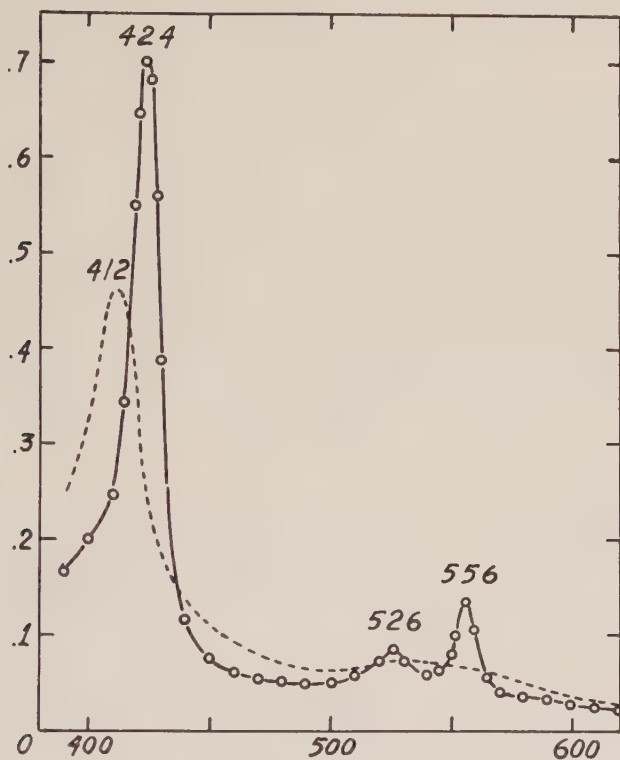


Fig. 3. - Spettro di assorbimento del pigmento estratto (citocromo *h*) dall'epatopancreas di *Aplysia limacina* nelle forme ossidata (linea tratteggiata) e ridotta (linea continua) con sodio idrosolfito.

Il fatto nuovo che deriva dagli esperimenti descritti è la presenza in *Aplysia* di un pigmento che, per analogia con quello estratto dall'epatopancreas di *Helix*, chiamiamo temporaneamente citocromo *h*. Tale pigmento ha infatti in comune con quello di *Helix* non solo il metodo di estrazione, ma la posizione delle bande  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  dello spettro nelle forme ossidata e ridotta. Il citocromo *h* è stato da noi estratto anche dall'epatopancreas di una chiocciola terrestre: *Cryptomphalus aspersus* e confrontato con quello di *Aplysia* (Tabella II). Aggiungiamo subito che i muscoli di *Aplysia* sembrano essere sprovvisti di citocromo *h*: non solo negli spettri differenziali dei particolati

non è stato possibile rilevare alcuna indicazione della presenza di tale pigmento, ma lo stesso metodo di estrazione, quando applicato ai muscoli della bocca e dello stomaco, ha sempre dato risultati negativi.

TABELLA II.

*Posizione delle bande di assorbimento del citocromo h estratto dall'epatopancreas di «Aplysia» e di chiocciola.*

	Ossidato			Ridotto		
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
<i>Aplysia limacina</i> . . .	—	536	410-412	556	526	424
<i>Cryptomphalus aspersus</i> (*)	—	536	408-410	556	526	423
<i>Helix pomatia</i> (**) . . .	—	536	408	556	526	422

(\*) Ringraziamo il prof. C. Sacchi per averci identificato questa specie.

(\*\*) Da J. Keilin (5).

**Fisiologia vegetale.** — *Reazioni metaboliche all'auxina.* — IV. *Su di una possibile base enzimatica dell'inibizione della crescita da parte di concentrazioni sopraottimali in auxina* (\*). Nota di ERASMO MARRÈ e ORESTE ARRIGONI, presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

Abbiamo precedentemente dimostrato come, per aumento della sua concentrazione fino al valore ottimale nei riguardi della crescita, l'auxina induca sui due sistemi del glutatione e dell'acido ascorbico ripercussioni sostanzialmente simili spostando i rapporti glutatione ridotto/glutatione ossidato (GSH/GS-SG) e acido ascorbico/acido deidroascorbico (AA/DHA) a tutto favore delle due forme ridotte [1]. Per concentrazioni sopraottimali, invece, il comportamento dei due rapporti improvvisamente diverge: il valore GSH/GS-SG continua a salire proporzionalmente all'aumento della concentrazione dell'auxina nel mezzo, mentre il valore AA/DHA rapidamente diminuisce in evidente e significativo parallelismo con la caduta dell'attività di crescita [2].

Questa divergenza delle curve della crescita e del rapporto AA/DHA da un lato, e del rapporto GSH/GS-SG dall'altro, appare di singolare inte-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano. Centro di studio per le ossido-riduzioni nei vegetali del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

resse. L'aumento della concentrazione in deidroascorbico in presenza di concentrazioni sopraottimali in acido indolacetico può interpretarsi, in base a precedenti ricerche, come una almeno delle cause della caduta della curva di crescita che si osserva per queste stesse concentrazioni dell'ormone. D'altra parte la dissociazione tra il comportamento del sistema del glutatione e quello dell'ascorbico, costituisce un fatto di per sé inaspettato in quanto gli equilibri di stato di riduzione dei due sistemi dovrebbero essere strettamente interdipendenti se questi, come fino ad oggi ritenuto, fossero compresi in una unica catena ossido-riduttiva in cui la deidroascorbico riduttasi trasferisca idrogeno dall'uno all'altro sistema [3, 4, 5].

Ci è sembrato che la dimostrazione dell'esistenza di un nuovo enzima, capace di trasferire elettroni dai piridinnucleotidi ridotti direttamente ad un composto di ossidazione parziale dell'acido ascorbico (tentativamente denominato acido monodeidroascorbico, MDHA), la MDHA riduttasi, ed il rilevamento della sua abbondanza nel materiale da noi studiato [6] permettessero di impostare su nuove basi lo studio del fenomeno sopra citato, e quindi di portare una qualche luce sul meccanismo dell'inibizione della crescita da parte delle concentrazioni sopraottimali in auxina.

In conseguenza della scoperta della MDHA riduttasi gli equilibri GSH/GS-SG e AA/DHA nella cellula risultano oggi regolati dalle reazioni di ossido-riduzione riportate nel seguente schema:

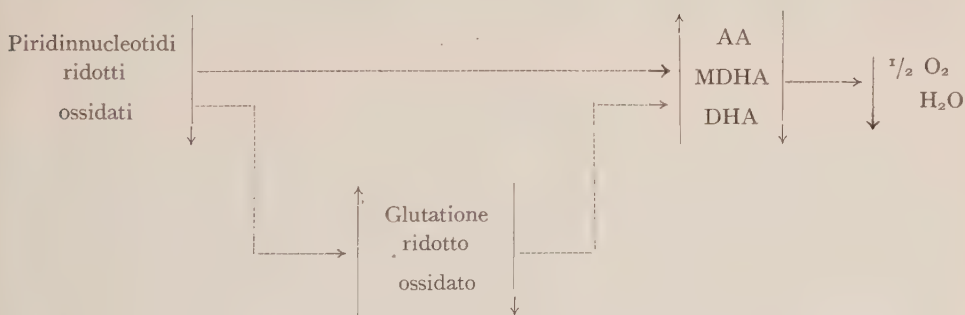


Fig. 1. — Schema delle vie di riduzione e di ossidazione del sistema dell'acido ascorbico.

da cui appare come lo stato di ossidazione del sistema dell'acido ascorbico dipenda, in linea generale, dal rapporto tra l'intensità di afflusso di elettroni dai piridinnucleotidi e l'intensità del deflusso di elettroni dal sistema stesso all'ossigeno; e come l'apporto di elettroni dai piridinnucleotidi sia condizionato dall'efficienza di due diverse vie, la prima delle quali comprende la glutatione riduttasi, il glutatione e la deidroascorbico riduttasi, e la seconda unicamente la « monodeidroascorbico » riduttasi. Dallo stesso schema appare come le due interpretazioni più semplici della contemporaneità dell'aumento del rapporto GSH/GS-SG e della diminuzione di quello AA/DHA possano essere: a) quella di un'azione inibente dell'acido indolacetico sulla deidroascorbico riduttasi, in quanto il blocco di questa intercetterebbe il flusso di idrogeno dal glutatione al deidroascorbico; b) quella di un'azione inibente



sulla « monodeidroascorbico » riduttasi cui seguirebbe la deviazione, sul sistema del glutatione, dell'idrogeno che altrimenti raggiungerebbe per via diretta il sistema dell'ascorbico (l'aumentato tenore in glutatione ridotto non potendo compensare il mancato apporto diretto).

Basandoci su queste premesse abbiamo impostato la presente ricerca. I risultati ottenuti sono nettamente favorevoli alla conclusione che l'aumento del livello dell'acido deidroascorbico in presenza di concentrazioni sopraottimali di acido indolacetico sia imputabile ad un'azione inibente diretta dell'ormone sulla « monodeidroascorbico » riduttasi, azione che è osservabile *in vitro*; e che e questo effetto possa, almeno in parte, spiegare l'azione inibente sulla crescita delle medesime concentrazioni in auxina.

### MATERIALI E METODI.

L'azione dell'auxina sull'attività monodeidroascorbico riduttasica è stata da noi studiata sia in preparati enzimatici solubili, parzialmente purificati, sia su preparati mitocondriali ottenuti dalla parte apicale del terzo internodio di piantine eziolate di pisello (*Pisum sativum*). La procedura seguita nell'allestimento di questi preparati e nella determinazione dell'attività dell'enzima in questione, è stata quella descritta in una precedente Nota [6]. In tutte le esperienze l'acido indolacetico veniva aggiunto ai preparati enzimatici 5 min. pr. prima del substrato. L'attività indolacetico ossidasica dei preparati sia solubili che mitocondriali è apparsa, da esperienze di controllo, del tutto irrilevante.

### ESPERIENZE E RISULTATI.

I dati della Tabella I dimostrano come l'acido indolacetico, a concentrazioni superiori a  $10^{-4}$ , inibisca significativamente l'attività monodeidroascorbico riduttasica di un preparato solubile ottenuto da internodi di pisello. Dalla stessa tabella si rileva pure come anche una auxina sintetica, l'acido 2,4-diclorofenossiacetico, (2,4 D) inibisca sensibilmente, nella stessa zona di concentrazione, l'attività « monodeidroascorbico » riduttasica.

I dati della Tabella II, ottenuti su sospensioni di mitocondri interi, dimostrano come anche in queste particelle altamente organizzate, in cui l'ossidazione dell'acido ascorbico ad acido « monodeidroascorbico » avviene presumibilmente, almeno in larga parte, per via citocromica [6, 7], l'indolacetico e il 2-4 D inibiscano nettamente l'attività « monodeidroascorbico » riduttasica, a concentrazioni che corrispondono con sufficiente esattezza a quella per cui inizia l'effetto inibente sulla crescita.

Infine i dati della Tabella III dimostrano come l'azione inibente delle auxine sia specifica per la « monodeidroascorbico » riduttasi: infatti né l'attività DPNH ossidasica, osservabile nei mitocondri senza aggiunta di acido ascorbico, né quella TPNH-glutatione riduttasica e glutatione-deidroascorbico riduttasica sono apprezzabilmente influenzate dagli acidi indolacetico e 2,4-diclorofenossiacetico a concentrazione  $10^{-3}$  M.

TABELLA I.

*Azione degli acidi indolacetico e 2,4-diclorofenossiacetico sulla attività « monodeidroascorbico » riduttasica di un preparato solubile, parzialmente purificato, ottenuto da internodi di pisello.*

Composizione dell'incubato: DPNH 100  $\gamma$ , Tris 0,1 M, pH 7,3, AA 60  $\gamma$ , enzima 0,1 cc contenente 99  $\gamma$  di N proteico, volume finale 3 cc.

Aggiunte	— $\Delta$ D.O. a 340 m $\mu$ /min. pr.	Inibizione %
Controllo . . . . .	0,030	—
AIA $10^{-4}$ . . . . .	0,029	3
AIA $8 \cdot 10^{-4}$ . . . . .	0,024	20
AIA $1,5 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	0,021	30
AIA $8 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	0,010	66
2,4-D $10^{-3}$ . . . . .	0,024	20
2,4-D $4 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	0,011	63

TABELLA II.

*Azione degli acidi indolacetico e 2,4-diclorofenossiacetico sull'attività DPNH ossidasica e MDHA riduttasica di mitocondri di internodi di pisello.*

Composizione dell'incubato: DPNH 100  $\gamma$ , mitocondri corrispondenti a 2 gr. di tessuto fresco sospesi in Tris 0,1 M, KCl 1,2 %, pH 7,3, volume finale 3 cc.

Aggiunte	A: senza AA	B: con AA (50 $\gamma$ )	Monodeidro- ascorbico riduttasi (B-A)	Inibizione %
	(DPNH ossidasi) — $\Delta$ D.O. a 340 m $\mu$ /min. pr.	(DPNH ossidasi + monodeidroascor- bico riduttasi) — $\Delta$ D.O. a 340 m $\mu$ /min. pr.		
Controllo . . . . .	0,018	0,039	0,021	—
AIA $5 \cdot 10^{-4}$ . . . . .	0,020	0,033	0,013	38
AIA $5 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	0,019	0,024	0,005	76
2,4-D $5 \cdot 10^{-4}$ . . . . .	0,021	0,032	0,011	47
2,4-D $5 \cdot 10^{-3}$ . . . . .	0,020	0,022	0,002	90

## TABELLA III.

*Inefficacia degli acidi indolacetico e 2,4-diclorofenossiacetico sulla glutatione riduttasi e sulla deidroascorbico riduttasi di mitocondri di internodio di pisello.*

Composizione dell'incubato: TPNH 100  $\gamma$ , mitocondri corrispondenti a 2 gr. di tessuto fresco sospesi in Tris 0,1 M, KCl 1,2 %, pH 7,3, volume finale 3 cc.

Aggiunte	— $\Delta$ D. O. a 340 m $\mu$ /min. pr.
Controllo . . . . .	0,010
GS-SG $10^{-3}$ M . . . . .	0,017
GS-SG $10^{-3}$ M + AIA $5 \cdot 10^{-3}$ . . . .	0,018
GS-SG $10^{-3}$ M + 2,4-D $5 \cdot 10^{-3}$ . . .	0,019
GS-SG $10^{-3}$ M + DHA $10^{-3}$ M . . .	0,023
GS-SG $10^{-3}$ M + DHA $10^{-3}$ + AIA $5 \cdot 10^{-3}$	0,024

## RIASSUNTO E CONCLUSIONI.

I risultati di questa ricerca dimostrano che le auxine, a partire da quelle concentrazioni per cui compare l'azione inibente sulla crescita e la caduta del rapporto AA/DHA, rivelano pure una decisa azione inibente sull'attività « monodeidroascorbico » riduttasica, tanto dei preparati in cui l'enzima sia presente allo stato solubile, quanto di quelli in cui esso è legato a strutture plasmatiche insolubili, altamente organizzate.

Poiché nessun altro degli enzimi interessati al ricambio dell'acido ascorbico o del glutatione risulta, in queste condizioni sperimentali, sensibilmente influenzato da queste concentrazioni di auxina, e poiché, d'altro lato, la « monodeidroascorbico » riduttasi è una delle due vie note che assicurano nella cellula il mantenimento di larga parte dell'acido ascorbico allo stato ridotto, sembra ragionevole concludere che la caduta del rapporto AA/DHA *in vivo* in presenza di concentrazioni sopraottimali di auxina sia conseguenza dell'inibizione da auxina della « monodeidroascorbico » riduttasi.

Una simile interpretazione dell'effetto delle alte concentrazioni in auxina sul sistema dell'acido ascorbico è tanto più suggestivo in quanto offre una soddisfacente spiegazione anche per il comportamento del rapporto GSH/GS-SG, che come si è detto seguita ad aumentare (contrariamente al rapporto AA/DHA) anche per le concentrazioni sopraottimali in auxina. È infatti evidente che una inibizione della « monodeidroascorbico » riduttasi non solo

non può diminuire l'originario flusso di elettroni dai piridinnucleotidi ridotti (in particolare dal TPNH) al glutatione ossidato; ma dovrebbe, se mai (ed a meno che ignote condizioni strutturali non lo impediscano) deviare verso il glutatione almeno parte della frazione di elettroni che non possono più defluire verso il sistema dell'acido ascorbico.

Per quanto riguarda il problema più generale del meccanismo d'azione dell'auxina, i risultati di queste esperienze sembrano ancora una volta indicare come il sister a dell'acido ascorbico rivesta una posizione di primo piano quale sede primaria delle reazioni della cellula all'auxina. Il coordinamento di questi risultati con quelli precedentemente raccolti circa l'azione di freno esercitata dall'acido deidroascorbico sulla crescita [8, 9] e su diversi aspetti dell'attività metabolica cellulare [10, 11], suggerisce infatti che nel fenomeno di inibizione di crescita da concentrazioni sopraottimali di auxina, l'inibizione della «monodeidroascorbico» riduttasi e la conseguente caduta del rapporto AA/DHA, possano costituire il momento iniziale della catena di reazioni per cui l'ormone raggiunge il suo effetto inibente finale sulla crescita. Affermazione che intendiamo peraltro formulare soprattutto a titolo di ipotesi di lavoro e valida, fino ad ora, solo per le condizioni sperimentali e di materiale in cui si è operato; e che è comunque ben lungi dall'escludere che altri meccanismi e fattori possano entrare in gioco nel complesso problema dei fenomeni di inibizione da auxina.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « *Physiol. Plantarum* », 10, 284 (1957).
- [2] E. MARRÈ, O. ARRIGONI e G. FORTI, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », 22, 85 (1957).
- [3] E. E. CONN e B. VENNESLAND, « *Jour. Biol. Chem.* », 192, 17 (1951).
- [4] L. W. MAPSON e D. R. GODDARD, « *Biochem. J.* », 29, 592 (1951).
- [5] E. MARRÈ e G. LAUDI, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », 20, 206 (1956).
- [6] O. ARRIGONI, G. ROSSI e E. MARRÈ, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* ». In corso di stampa.
- [7] S. HONDA, « *Plant Physiol.* », 30, 174 (1955).
- [8] E. MARRÈ e G. LAUDI, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », 20, 638 (1956).
- [9] F. TREZZI, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », 21, 1 (1956).
- [10] O. ARRIGONI, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », 22, 77 (1957).
- [11] E. MARRÈ, G. LAUDI e O. ARRIGONI, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », 19, 460 (1957).

**Fisiologia.** — *Sull'azione dell'acido pantotenico a livello della placca neuromuscolare nel soggetto curarizzato*<sup>(\*)</sup>. Nota di CARLO VITTORIO MORPURGO e DOMENICO SPINELLI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio R. MARGARIA.

È stata segnalata<sup>(\*)</sup> sulla base di esperienze cliniche una supposta azione antagonista dei pachicurari da parte dei pantotenici ed è stato pertanto proposto di utilizzarli, al posto della prostigmina, per abbreviare o per eliminare la curarizzazione residua alla fine di interventi chirurgici nel corso dei quali erano state iniettate d-tubocurarina o dimetiltubocurarina o gal-lamina. Come spiegazione è stata formulata la seguente ipotesi: l'iniezione di acido pantotenico favorirebbe la formazione del coenzima A e questo condizionerebbe un aumento di acetilcolina: questa, che è il mediatore chimico della stimolazione del muscolo, è ostacolata nella sua azione a livello della placca neuromuscolare dai pachicurari: poiché le sostanze che favoriscono l'accumulo di ACh a livello della sinapsi tra nervo e muscolo diminuiscono l'effetto del curaro, l'ac. pantotenico agirebbe favorendo appunto la formazione di ACh.

Allo scopo di controllare quest'ipotesi, abbiamo condotto alcune esperienze su dei volontari giovani e apparentemente sani, in condizioni di riposo.

Mediante elettrodi a placca, fissati con delle fasce elastiche sulla cute del cavo popliteo si stimolava elettricamente il nervo sciatico con un unico impulso elettrico, unidirezionale, rettangolare negativo della durata di 75 microsecondi. La risposta diretta del tricipite della sura veniva rilevata elettromiograficamente mediante elettrodi d'argento a placca fissati sulla cute in corrispondenza della parte distale del muscolo. L'elettromiogramma veniva registrato mediante amplificatori differenziali in collegamento diretto e osciloscopio catodico. Lo stimolo era sovramassimale e veniva ripetuto dieci volte a intervalli di due secondi per non provocare l'insorgere di fatica muscolare. Queste serie di singoli stimoli erano ripetuti ogni due minuti per registrare l'andamento dell'esperimento. Si procedeva quindi all'iniezione endovenosa di un'unica dose di cloruro di tubocurarina (12-15 mg) in quantità tale da ottenere una apprezzabile riduzione dell'intensità delle risposte elettriche del muscolo. Raggiunta la massima diminuzione della risposta o già nella fase di graduale scomparsa dell'effetto del curaro si procedeva all'iniezione endovenosa di 500-1000 mg di alcool pantotenico; una seconda di 500 mg di alcool pantotenico veniva praticata a distanza di 8-10 minuti dalla prima.

(\*) Dal laboratorio di Fisiologia dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

(1) E. GALEOTTO, «Acta Vitaminologica», X, 193 (1956).



L'esperimento veniva seguito oltre il 30° minuto dall'iniezione del curaro, fino a scomparsa dell'effetto.

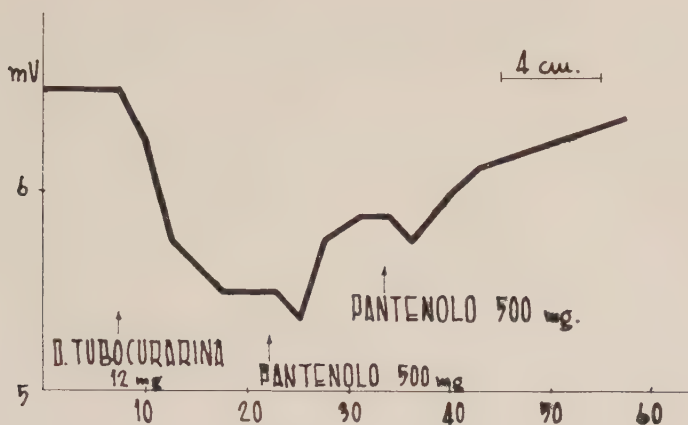


Fig. 1.

Sull'ordinata l'ampiezza della risposta elettromiografica in mV. nell'uomo, sull'ascissa il tempo in minuti. Si osserva una forte diminuzione della risposta elettrica muscolare in conseguenza dell'iniezione endovenosa di 12 mg. di d-tubocurarina ed un rafforzamento evidente dell'azione curarica come effetto di successive iniezioni endovenose di 500 mg. ognuna di pantenolo.

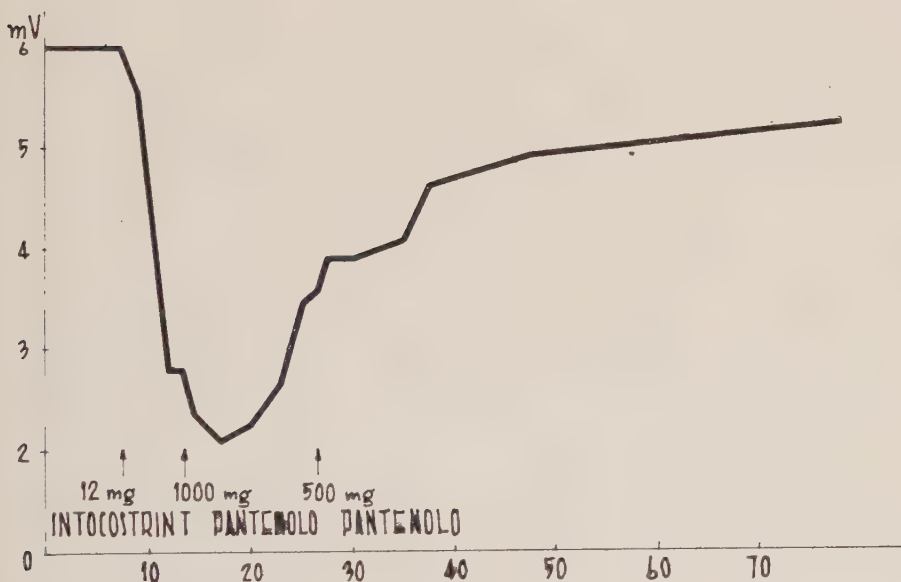


Fig. 2.

Sull'ordinata l'ampiezza della risposta elettromiografica in mV. nell'uomo trattato con d-tubocurarina e pantenolo. Sull'ascissa il tempo in minuti.

L'iniezione di alcool pantotenico accentua l'azione del curaro e la prolunga nel tempo (fig. 1). Infatti entro un minuto dall'introduzione di 500 mg di pantenolo si osserva un aumento dell'effetto curarico che dura 2-3 minuti. La seconda iniezione di 500 mg di alcool pantotenico eseguita a distanza

di 20 minuti produce un effetto analogo. Con dosi maggiori (1 g) di alcool pantotenico, il potenziamento dell'azione del curaro è ancor più accentuato (pari al 22,7 %).

È rilevabile inoltre un'estensione nel tempo dell'effetto curarico, poiché questo è ancora presente oltre il 30° minuto dall'introduzione del cloruro di tubocurarina.

Uno dei soggetti da noi sottoposti all'esperimento ha lamentato il persistere di diplopia dopo più di tre ore e mezza dalla somministrazione di 14 mg di curaro e di 1,5 g di alcool pantotenico.

Questi risultati depongono pertanto contro la presupposta esistenza a livello della placca neuromuscolare, di una azione di antagonismo dei curari naturali da parte dei pantotenici, e inducono a ricercare ad altri livelli nell'ambito del sistema nervoso l'eventuale spiegazione dei fenomeni clinici che avevano indotto a formulare la sopra citata ipotesi. Comunque gli effetti clinici dei pantotenici osservati dal Galeotto nel soggetto curarizzato necessitano di una conferma; nel caso contrario si potrebbe prospettare la possibilità di impiegare in determinate circostanze (ad esempio nel tempo finale di interventi addominali) i pantotenici quali farmaci sinergizzanti l'azione del curaro naturale.

#### BIBLIOGRAFIA.

- GALEOTTO E., «Acta Vitaminologica», X, 193 (1956). *Nota preliminare sull'impiego dei pantotenici quali antipachicurari.*
- GOODMAN L. S., GILMAN A., *The pharmacological basis of therapeutics*. The Macmillan Co., New York, 1955.
- JACQUES J. E., «The Lancet», 10, 861 (1951). *Pantothenic acid in paralytic ileus.*

**Fisiologia.** — *Sui rapporti che intercorrono fra temperatura e frequenza nel cuore integro e nel ventricolo isolato di embrione di pollo* (\*).

Nota di UMBERTO ZINGONI, presentata (\*\*) dal Corrisp. I. SPADOLINI.

Gli effetti determinati dalle variazioni di temperatura sulla frequenza del battito del cuore isolato o *in situ* sono spesso di difficile interpretazione poiché vengono influenzate contemporaneamente diverse strutture: le cellule del pace-maker, gli elementi del miocardio comune e le cellule nervose. Le difficoltà aumentano ancora quando si vogliano studiare gli effetti che le variazioni di temperatura provocano contemporaneamente sulla frequenza e sull'ampiezza del battito. È noto, infatti, che quando la frequenza oltrepassa certi limiti viene influenzata direttamente anche l'ampiezza della con-

(\*) Lavoro eseguito nell'istituto di Fisiologia umana di Firenze con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

trazione [1, 6] risultando limitato il tempo sistolico disponibile per il raggiungimento del massimo grado di contrazione.

Per studiare le relazioni fra temperatura (T) e frequenza (F) ed ancora fra T e forza di contrazione del cuore, si è presentata perciò la necessità di scindere gli effetti che le variazioni di T provocano sui diversi elementi sopraricordati. Ciò è stato possibile utilizzando il cuore di embrione di pollo prelevato prima della 68<sup>a</sup>-70<sup>a</sup> ora di incubazione in cui non vi sono elementi nervosi o cromaffini e che, dopo asportazione degli abbozzi atriali e della parte basale del ventricolo, può considerarsi costituito soltanto da cellule del miocardio comune le quali mantengono ancora notevole attività autoritmica.

Nella presente Nota sono descritte soltanto le relazioni che corrono fra T ed F, rispettivamente nel cuore intero (C. I.) ed in quella parte del ventricolo isolato (V. I.) che residua dopo l'asportazione del segmento sopra indicato <sup>(1)</sup>.

#### RISULTATI SPERIMENTALI.

*Cuore intero:* il cuore montato nell'apparecchio di perfusione non mostra, nelle nostre condizioni sperimentali, attività contrattile a T inferiore ai 22°-23°C; essa inizia, almeno entro certi limiti di tempo, a valori di T compresi fra 22° e 26°. Innalzando gradualmente la T del liquido di perfusione si constata sempre un progressivo aumento di frequenza che si manifesta in ciascun esperimento con andamento assai uniforme (fig. 1 a, b). Non abbiamo sperimentato con T superiore a 40°C.

Il  $Q_{10}$  medio di 8 esperimenti nei quali la T è stata innalzata di 8°-12° a partire da 25°-28° è risultato di  $2,6 \pm 0,32$ . Nella curva riportata nella fig. 2 il  $Q_{10}$  risulta di circa 2,7; questa differenza è dovuta al fatto che, oltre ai 16 valori relativi agli esperimenti suddetti, ve ne sono computati anche altri desunti da prove effettuate per scopi diversi. La caratteristica termica  $\mu$  è risultata di 19.300.

Abbassando successivamente la T fino a riportarla ai valori di partenza, la F diminuisce con lo stesso andamento. Nel cuore sottoposto a successivi innalzamenti e abbassamenti di T si instaura spesso un blocco parziale con ritmo generalmente di 3/1-4/1.

*Ventricolo isolato:* il V. I. nelle stesse condizioni sperimentali del C. I. si comporta in maniera notevolmente diversa. Il battito inizia a T comprese fra 23°-24° e 28°; alle basse T è spesso irregolare. In alcuni casi si richiede una T superiore ai 28° perché il battito abbia inizio, ma, in tal caso, esso permane quando si riporta la T a 28°-24°. La F che si osserva alle varie T è notevolmente inferiore a quella relativa ai C. I. (figg. 1 e 2). Non abbiamo sperimentato con T superiori a 42°.

(1) La tecnica di perfusione è stata descritta precedentemente [11].

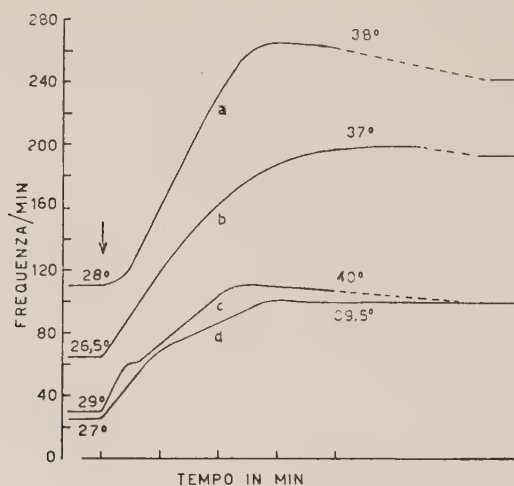


Fig. 1. - Andamento della frequenza per aumento della temperatura.

È riportata la temperatura iniziale e finale di ciascun esperimento; l'inizio dell'aumento di temperatura è indicato dalla freccia:

- a) cuore intero di 70 ore;
- b) cuore intero di 69 ore;
- c) ventricolo isolato di 70 ore;
- d) ventricolo isolato di 68 ore.

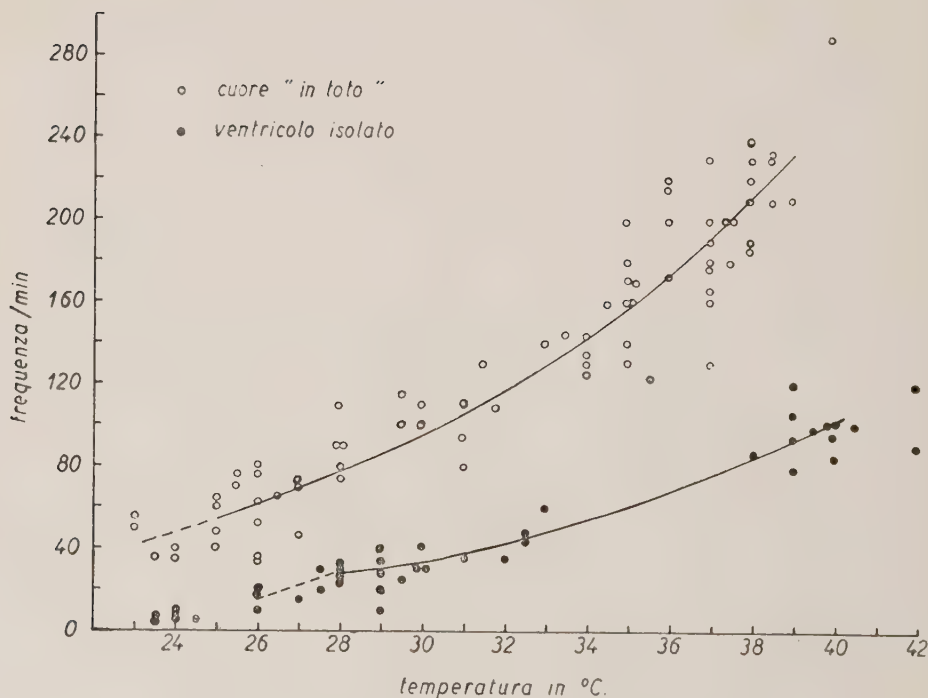


Fig. 2. - Frequenze corrispondenti alle temperature comprese fra 23° e 42°C.

I valori riportati sono desunti in parte da esperimenti condotti per il calcolo del  $Q_{10}$  (8 + 8 nella curva superiore e 13 + 13 nella inferiore), in parte da esperimenti condotti per altro scopo.

Innalzando la  $T$  abbiamo sempre constatato un aumento progressivo della  $F$  che si manifesta generalmente nel singolo esperimento con un andamento del tutto caratteristico; inizialmente per circa 40 sec la  $F$  aumenta rapidamente e raggiunge valori circa doppi di quelli di partenza, in seguito invece l'aumento è sensibilmente meno rapido, anzi vi è spesso un periodo intermedio di 20–30 sec. durante il quale al  $F$  rimane pressoché costante (fig. 1 *c*); ciò si osserva, in maniera opposta, diminuendo successivamente la  $T$ .

Il  $Q_{10}$  medio calcolato da 13 esperimenti condotti nella maniera già descritta per il C. I. è risultato di  $3 \pm 0,42$ ; nella fig. 2 sono stati riportati i 26 valori relativi alle prove suddette insieme ad altri 17 desunti da esperimenti effettuati per scopi diversi <sup>(2)</sup>.

### DISCUSSIONE.

È noto da tempo che allo stadio di sviluppo da noi considerato si è già stabilita nel cuore embrionale di pollo la predominanza del miocardio atriale come pace-maker sul miocardio ventricolare. Dai risultati di queste ricerche si possono desumere alcuni dati quantitativi del fenomeno. Confrontando le due curve riportate nella fig. 2 si osserva che il rapporto delle  $F$  fra

C. I. e V. I. per le singole  $T$  è pressoché costante; la media dei rapporti fra i valori di  $F$  per ogni grado di  $T$  risulta infatti di  $2,64 \pm 0,145$ . La costanza di questo rapporto dipende dal fatto che ambedue le curve hanno andamento pressoché esponenziale <sup>(3)</sup> con  $Q_{10}$  assai corrispondenti fra loro.

È assai probabile che uno stesso meccanismo sia responsabile dell'automatismo tanto atriale che ventricolare, meccanismo che appare di natura essenzialmente enzimatica in quanto espresso da valori di  $Q_{10}$  dell'ordine di quelli ordinariamente riscontrati dai vari autori nelle reazioni dei più svariati substrati biologici.

(2) Tanto nel C. I. che nel V. I., la  $F$ , dopo aver raggiunto un valore massimo in seguito all'innalzamento di  $T$ , diminuisce per qualche minuto pur rimanendo la  $T$  costante (fig. 1 *a*, *b*, *c*). Per il calcolo del coefficiente termico è stato considerato il valore stazionario di  $F$  che segue al detto valore massimo; ciò perché in esperimenti di controllo eseguiti innalzando la  $T$  molto lentamente (12–15 minuti) l'abbassamento che segue al valore massimo non si manifesta o è molto limitato.

(3) Secondo alcuni autori, la curva che esprime i valori di  $Q_{10}$  per le varie  $T$  è strettamente logaritmica [1, 3, 10], secondo altri ciò non si verifica [6].

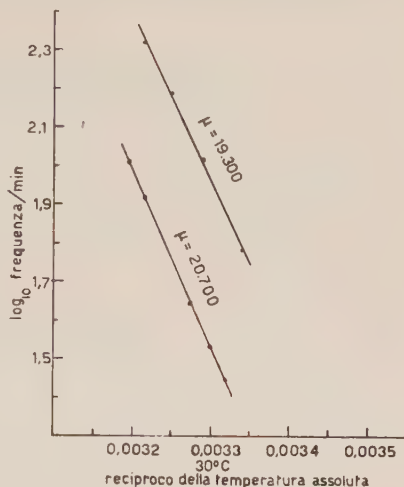


Fig. 3. - Il logaritmo della frequenza è in relazione lineare con il reciproco della temperatura assoluta fra 28° e 40° C nel ventricolo isolato (retta inferiore) e fra 26° e 38° C nel cuore intero (retta superiore).



Il  $Q_{10}$  relativo al V. I. è lievemente più alto di quello relativo al C. I., talché la curva che esprime il fenomeno sale un po' più rapidamente di quanto comporterebbe un valore di  $Q_{10}$  uguale a quello riferibile al C. I. <sup>(4)</sup>. Ciò dipende probabilmente dal fatto che le basse T (inferiori circa ai 28°) sono inadeguate a promuovere la perfetta attività di un pace-maker ventricolare non ancora pervenuto ad un sufficiente stadio di differenziazione morfologica e metabolica cui è già pervenuto il pace-maker atriale. Questa interpretazione sembra avvalorata dal fatto che nel V. I. l'aumento di T provoca inizialmente un aumento di F molto più rapido che in seguito (fig. 1 c, d); sarebbe quindi in questo primo momento che i meccanismi responsabili dell'automatismo entrano in attività. Per questa ragione anche il primo tratto della curva inferiore nella fig. 2, disegnato con tratteggio, ha una pendenza superiore a quella successiva. Secondo molti autori il  $Q_{10}$  è infatti tanto più elevato quanto più la T è bassa; Clark [1] trova, ad esempio, che il  $Q_{10}$  dell'orecchietta di coniglio è 3,1 per T fra 20° e 30° e 2,2 fra 30° e 40°; nel cuore di rana le differenze sono ancora più notevoli (cfr. anche Heilbrunn, 4).

Per esprimere i rapporti fra T ed F, Crozier ha sostituito al valore  $Q_{10}$  la caratteristica termica  $\mu$  equivalente al termine A dell'equazione di Arrhenius. Nonostante le critiche che sono state mosse a vari argomenti della teoria di Crozier [4, 5] molti autori preferiscono adottare il termine  $\mu$ .

Da ricerche compiute sul cuore di un gran numero di specie animali, tanto omeotermi che pecilotermi, è risultato che il  $\mu$  oscilla fra 5.000 e 33.000 con maggiore incidenza dei valori intorno a 8.000, 11.500, 16.500 e 21.000 [2]. Sizer [9] ha notato la singolare coincidenza fra questi valori e quelli desunti da molteplici reazioni enzimatiche. I valori di  $\mu$  da noi trovati sono 19.300 per il cuore integro fra 26° e 38° e 20.700 per il V. I. fra 28° e 40°, corrispondenti perciò a quelli calcolati da Crozier [2] per l'orecchietta di coniglio studiata da Clark a T comprese fra 20° e 30°.

Per quanto ci consta non erano state effettuate ricerche, idonee alla determinazione del  $Q_{10}$  del cuore embrionale di pollo. Soltanto analizzando i risultati delle osservazioni di Romanoff e coll. [8] si può dedurre un  $Q_{10}$  di circa 1,25, valore eccezionalmente basso dipendente sicuramente da condizioni sperimentali assai diverse dalle nostre.

I nostri risultati possono essere confrontati perciò soltanto con quelli ottenuti da esperimenti sul cuore adulto di vari animali, escluso il pollo; da tale confronto risulta che per stadi di sviluppo assai precoci il coefficiente termico del cuore embrionale ha già le caratteristiche di quello adulto.

Si presenta pertanto interessante lo studio del  $Q_{10}$  nel cuore del pollo adulto.

<sup>(4)</sup> L'elaborazione statistica indica che la differenza fra le medie dei 21 casi considerati è significativa ( $t = 2,28$ ;  $P < 0,05$ ).

# BIBLIOGRAFIA.

- [1] CLARK A. J., « J. Physiol. », 54, 275 (1920-21).
- [2] CROZIER W. J., « J. gen. Physiol. », 9, 531 (1926).
- [3] GIOTTI A., « Arch. Fisiol. », 53, 370 (1953).
- [4] HEILBRUNN L. V., *An Outline of General Physiology*, Saunders, Philadelphia, 1947.
- [5] JOHNSON F. H., EYRING H., POLISSAR M. J., *The Kinetic Basis of Molecular Biology*, J. Wiley & Son, New York, 1954.
- [6] KRUTA V., « Arch. int. Physiol. », 45, 332 (1937).
- [7] KRUTA V., « Acta physiol. pharmacol. neerlandica », 6, 143 (1957).
- [8] ROMANOFF A. L., SOCHEN M., « Anat. Rec. », 65, 59 (1936).
- [9] SIZER I. W., « Advances in Enzymology », 3, 35 (1943).
- [10] SNYDER C. D., FALLAS R. E., DU MONT F. ELMENDORF, « Zeit. allg. Physiol. », 15, 72 (1913).
- [11] ZINGONI U., « Arch. Fisiol. », 56, 223 (1956).

**Zoologia.** — *Archeostrongylus italicus gen. nov. et sp. nov., nuovo nematode borsato parassita di Hystrix cristata in Italia Centrale* (\*).  
Nota di ETTORE BIOCCA e GIANFRANCO FERRETTI, presentata (\*\*)  
dal Socio V. PUNTONI.

Durante ricerche sistematiche sui parassiti di animali della fauna italiana, abbiamo avuto occasione di trovare nell'intestino tenue di 3 *Hystrix cristata* catturate nella provincia di Roma (Santa Severa) <sup>(1)</sup> numerosi nematodi borsati di piccolissime dimensioni (meno di 2 mm di lunghezza) non riportabili ad alcuna specie o genere noto.

I parassiti erano pochi (8 femmine e 4 maschi) nell'esemplare giovane catturato nel gennaio 1956, mentre molto numerosi (oltre 100) nei due esemplari, un giovane e un adulto, uccisi nella stessa zona nel gennaio 1957.

Durante gli anni 1952-57 sono stati studiati nel nostro Istituto oltre 20 *Hystrix cristata*, tutte catturate nella provincia di Roma <sup>(2)</sup>; data la piccolezza dei parassiti non ci è possibile escludere che, pur presenti in qualche caso, possano essere passati inosservati.

La morfologia di questi parassiti è tale da non permettere ravvicinamenti precisi con alcun genere di nematode finora descritto: i caratteri della borsa caudale del maschio permettono di considerarli appartenenti a *Siron-*

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma (Direttore E. Biocca).

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) Ringraziamo il Ministero Agricoltura e Foreste per il permesso a noi concesso di cattura di animali a scopo scientifico. Gli animali sono stati catturati nella tenuta Patrizi di Santa Severa, grazie alla cortese collaborazione del proprietario.

(2) Ricerche eseguite con sussidi del Consiglio Nazionale delle Ricerche per studi sulla fauna parassitaria italiana.

*gylata* Raillet et Henry 1913, ma la presenza di una capsula boccale semplice, sprovvista di corona radiata, la piccolezza della borsa, la atipicità delle costole, come la presenza di grandi embrioni nell'utero rendono, a nostro avviso, particolarmente difficile la loro inclusione in famiglie note.

Ci limitiamo perciò a fornire la semplice definizione del genere e della specie. Per questo nuovo genere proponiamo il nome *Archeostrongylus* gen. nov., poiché alcuni dei suoi caratteri morfologici ci sembrano indicare una certa primitività filogenetica.

#### *Archeostrongylus* gen. nov.

Nematodi piccoli, con corpo diritto. Cuticola striata trasversalmente. Apertura boccale apicale, rotondeggiante, a simmetria di ordine sei. Capsula boccale cilindroide. Otto papille submediane, grandi e ben separate tra loro.

*Femmina.* Vulva nella parte media post-equatoriale del corpo; embrioni di grandi dimensioni nell'utero. Coda senza aculeo terminale.

*Maschio.* Borsa caudale piccola senza lobi ben distinti. Formula borsale: la costola dorsale si divide distalmente in due rami semplici; le costole dorsali esterne nascono dalla base della dorsale, sono sottili con estremità grande e rotondeggiante. Due costole laterali nascono da un tronco comune; una terza costola laterale è rudimentale, corta, con estremità grande e rotondeggiante; le costole ventrali sono separate e parallele. Spicoli simili, a punta complessa.

*Habitat:* tubo digerente di mammiferi.

*Specie tipo:* *Archeostrongylus italicus* gen. nov. et sp. nov.

L'unica specie finora nota di questo genere è stata trovata in *Hystrix cristata* catturata in Italia. Poiché isticci esistono non solo in alcuni Paesi del Sud Europa, ma anche in Africa, Asia minore, ecc., la conoscenza della provenienza dell'ospite e del parassita può avere notevole importanza. Per questa ragione proponiamo come nome di specie *italicus* ad indicare appunto l'origine geografica del parassita.

#### *Archeostrongylus italicus* sp. nov.

#### *Morfologia* <sup>(3)</sup>.

Vermi molto piccoli (maschi lunghi mm 1,2-1,4; femmine lunghe mm 1,4-1,9), corpo diritto, cilindrico, leggermente attenuato verso l'estremità anteriore nei due sessi. L'estremità posteriore del maschio termina con una piccola borsa aperta in avanti. Estremità posteriore della femmina di forma conica, smussa, termina senza punta terminale.

Cuticola striata trasversalmente con strie distanti circa 4  $\mu$ .

Apertura orale rotondeggiante, aperta apicalmente. Ai quattro angoli submediani del corpo, in corrispondenza dell'estremità anteriore, si osservano due grosse papille (complessivamente quindi otto), di cui l'anteriore leggermente più lunga e spatuliforme, la posteriore terminante con una espansione globosa. Lateralmente all'apertura boccale esistono due piccole formazioni, riferibili probabilmente agli anfidri. Le quattro coppie di papille e

(3) Esemplari misurati: 10 femmine e 10 maschi.

*Archeostromgylus italicus*

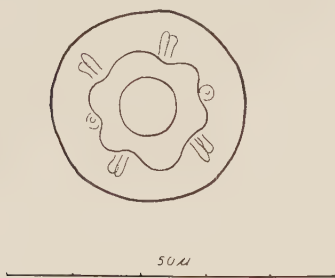


Fig. 1. - Estremità anteriore vista apicalmente.



Fig. 2. - Estremità anteriore vista lateralmente.

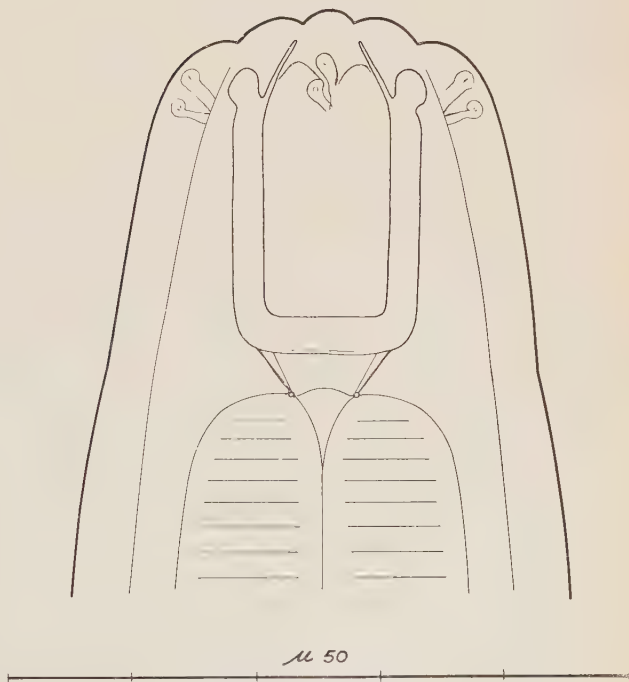


Fig. 3. - Estremità anteriore vista lateralmente.

*Archeostromgylus italicus*



Fig. 5. - Borsca caudale vista lateralmente.

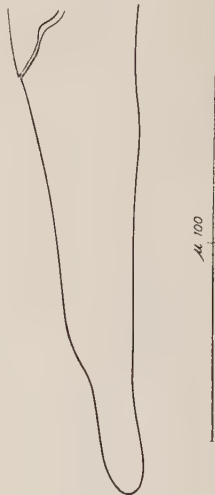


Fig. 7. - Estremità distale della femmina.

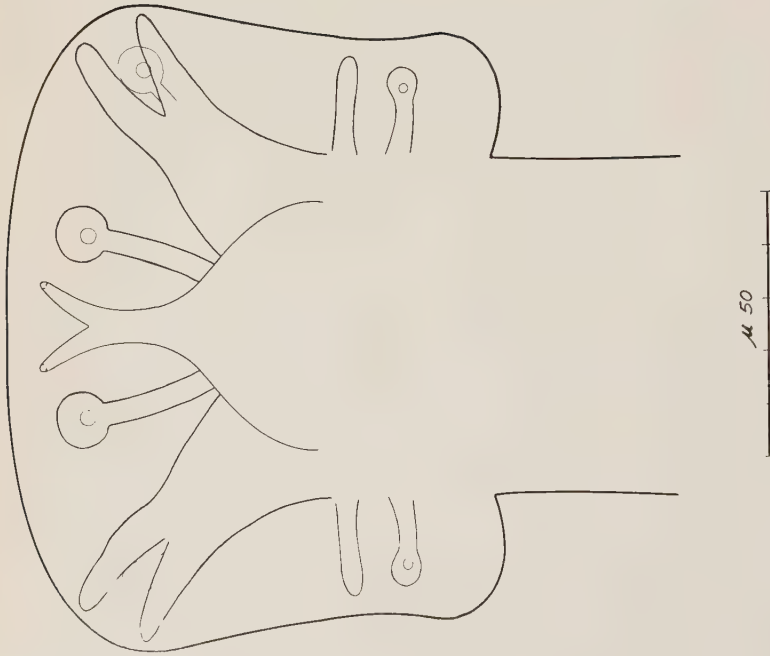


Fig. 4. - Borsca caudale vista ventralmente.

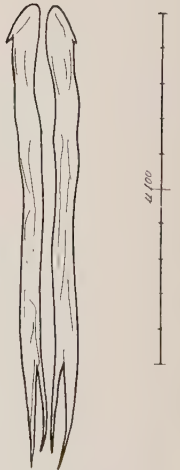


Fig. 6. - Spicoli.



gli anfdi delimitano sei mammelloni subeguali dell'estremità distale della capsula boccale, in forma analoga a quanto si osserva nei singamidi (Tavola I, fig. 1).

La capsula boccale è lunga, cilindroide nella sua parte centrale; la parte cilindroide è lunga 20-25 e larga 12-15  $\mu$ . In vicinanza dell'esofago la capsula assume la forma ad imbuto.

L'esofago, appena rigonfio nella sua porzione posteriore, si continua in un intestino rettilineo, tappezzato da grosse cellule granulose. L'anello nervoso circonda l'esofago in posizione leggermente posteriore alla metà lunghezza. Il poro escretore si apre nel margine ventrale del verme in vicinanza dell'estremità posteriore dell'esofago. Dieridi non apprezzabili.

*Femmina.* Lunghezza mm 1,460-1,860, larghezza massima mm 0,065-0,098; esofago lungo mm 0,135-0,155; anello nervoso distante dall'estremità anteriore mm 0,095-0,115. Poro escretore distante dall'estremità anteriore mm 0,155-0,180. Vulva nel terzo medio del corpo più ravvicinata però al terzo posteriore che al terzo anteriore, dista dall'estremità posteriore mm 0,550-0,705. Ovoiettore diretto in avanti, si divide in due tubuli a circa mm 0,090 dall'apertura vulvare. La parte muscolare è lunga circa 0,060 mm. Ano dista dall'estremità posteriore mm 0,094-0,112. La coda è allungata, conica e termina piuttosto smussa, senza punta terminale. Al microscopio al contrasto di fase sono visibili due piccole papille terminali riportabili ai fasmidi.

Nel corpo della femmina sono visibili uova voluminose in diversi periodi di sviluppo ed embrioni. Le uova più grandi hanno dimensioni oscillanti di  $\mu$  32-36  $\times$  52-56. Gli embrioni (4 o 5 in media) raggiungono dimensioni molto grandi di 0,420-0,530 mm; sono granulosi e lasciano malamente distinguere un esofago allungato. La loro estremità anteriore è trunca. L'estremità posteriore termina con due piccoli mammelloni.

*Maschio.* Lunghezza mm 1,220-1,355, larghezza massima mm 0,052-0,075; esofago lungo mm 0,120-0,148; anello nervoso distante dall'estremità anteriore del corpo mm 0,085-0,109; poro escretore distante dall'estremità anteriore del corpo mm 0,165-0,178.

Borsa caudale: piccola, lobi laterali appena distinti, lobo dorsale non differenziato. La borsa è continua ventralmente e, all'esame laterale, appare come una continuazione della linea del corpo, troncato obliquamente.

Formula borsale: costola dorsale robusta, biforcata distalmente. Costole dorsali esterne sottili, leggermente più corte della costola dorsale, prendono origine vicino alla base della costola dorsale e terminano a notevole distanza dal margine della borsa, con due grandissime formazioni papilliformi rotondeggianti. Due costole laterali prendono origine da un lungo tronco comune, sono quasi diritte e divergono leggermente tra loro durante tutto il percorso. La costola in posizione ventrale è alquanto più piccola dell'altra e ambedue terminano a breve distanza dal margine della borsa. Tra le due costole laterali si osserva una costola rudimentale, non chiaramente visibile in tutti gli esemplari, rappresentata da una grande formazione papilliforme rotondeggiante, che si continua in un peduncolo sottile ed obliquo; questa costola rudimentale sembra trovarsi in un piano diverso da quello delle altre due costole laterali, di cui raggiunge appena la metà lunghezza. La formazione papilliforme terminale analoga a quella delle costole dorsali esterne è quasi circolare e occupa lo spazio compreso tra la base delle due altre costole laterali e si sovrappone alquanto ad esse, specialmente a quella in posizione più ventrale. Le costole ventrali sono allontanate tra loro, quasi diritte e parallele. La costola ventrolaterale, leggermente più lunga, termina senza evidente dilatazione, mentre la ventroventrale termina con una espansione di modeste porzioni.

Le costole ventrali come le laterali, che si dirigono verso il margine della borsa, non raggiungono detto margine, il quale non presenta rientranze in vicinanza della estremità delle costole.

Spicoli ravvicinati tra loro, simili, quasi diritti, lunghi mm 0,118-0,140. L'estremità prossimale è alquanto più grossa ed è fornita di un acuto sperone laterale di modeste porzioni; il corpo possiede alcuni ispessimenti leggermente ondulati e la estremità distale termina con due punte, di cui l'esterna appena più grande e lunga.

Gubernaculum non apprezzabile.

*Habitat*: Intestino tenue.

*Ospite*: *Hystrix cristata*.

*Provenienza*: Lazio (Italia Centrale).

*Esemplari tipo e cotipi* presso l'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

*Misure in mm degli esemplari tipo.*

	Maschio	Femmina
Lunghezza . . . . .	1,325	1,660
Larghezza massima . . . . .	0,058	0,062
Esofago lungo . . . . .	0,145	0,148
largo . . . . .	0,026	0,028
Anello nervoso-estremità ant . . .	0,104	0,110
Poro escretore-estremità ant. . . .	0,170	0,175
Spicoli . . . . .	0,133	
Vulva-estremità post. . . . .		0,040
Ano-estremità post. . . . .		0,104

Viene descritto un nuovo nematode parassita: *Archeostrongylus italicus* nov. gen. et nov. spec. trovato nell'intestino di *Hystrix cristata* in Italia.

**Zoologia.** — *Suddivisione del genere Ancylostoma (Dubini, 1843), in quattro sottogeneri.* Nota di ETTORE BIOCCA e PHILIPPUS LODEWICUS LE ROUX (\*), presentata (\*\*) dal Socio V. PUNTONI.

Già nel 1916, Lane (1916) aveva sentito la necessità di proporre la suddivisione del genere *Ancylostoma* in due sottogeneri *Ancylostoma (Ancylostoma)* e *Ancylostoma (Ceylancylostoma)*. Gli argomenti forniti da Lane e le descrizioni dei due sottogeneri sono, a nostro avviso, assolutamente validi e accettabili.

Egli riuniva nel sottogenere *Ancylostoma (Ancylostoma)* quelle specie provviste di tre paia di denti chitinosi ventrolaterali (alcune specie con paio interno rudimentale) che contemporaneamente avessero nella borsa caudale del maschio i raggi laterali ben separati tra loro; riuniva invece nel

(\*) Ettore Biocca - Direttore dell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

Philippus Lodewicus Le Roux - Reader in medical Parasitology della London School of Hygiene and Tropical Medicine.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

sottogenere *Ancylostoma* (*Ceylancylostoma*) quelle specie con due sole paia di denti ventrolaterali (di cui l'interno più piccolo) e con i raggi laterali medio e posteriore decorrenti l'uno vicino all'altro.

La proposta del Lane non fu accettata perché non si volle attribuire ai caratteri morfologici indicati da Lane alcun valore sistematico. Lo stesso Lane negli anni successivi scrisse lavori contraddittori, e ciò creò uno stato di crescente confusione tra gli elmintologi.

In base all'accurato studio delle specie del genere *Ancylostoma* abbiamo potuto invece osservare come la distribuzione dei raggi nella borsa caudale del maschio abbia, per questo gruppo di parassiti, enorme importanza sistematica e presenti una eccezionale costanza.

Lo studio comparativo delle specie finora descritte <sup>(1)</sup> ci ha permesso inoltre di suddividere il genere *Ancylostoma* oltre che nei due sottogeneri già proposti da Lane, ancora in altri due sottogeneri.

I chiari caratteri distintivi che permettono di differenziare questi sottogeneri potrebbero forse giustificare maggiormente la creazione di nuovi generi piuttosto che di sottogeneri, tuttavia per evitare, almeno per ora, un troppo radicale cambiamento nella attuale sistematica di questi parassiti, preferiamo proporre la suddivisione del genere *Ancylostoma* in quattro sottogeneri.

Nella proposta dei nomi per questi sottogeneri abbiamo voluto, seguendo l'esempio di Lane, dare ad essi un nome che ricordi la prevalente distribuzione geografica.

È evidente che le migrazioni umane (Biocca, 1951), con il trasporto di carnivori domestici (cani e gatti) e l'acquisto di animali selvatici esotici nei giardini zoologici, possano diffondere parassiti in regioni molto lontane da quelle di origine e rendere difficile ricostruire poi le provenienze originali, per cui i nomi che proponiamo hanno semplice valore di presumibile indicazione.

Mentre nelle specie del sottogenere *Ancylostoma* (*Ancylostoma*) sembra potersi riconoscere una origine probabilmente africana e successivamente cosmopolita, in quelle del sottogenere *A.* (*Ceylancylostoma*) una primitiva distribuzione sudasiatica. Per i due nuovi sottogeneri proponiamo rispettivamente i nomi di *A.* (*Afrancylostoma*) subgen. nov. e *A.* (*Amerancylostoma*) subgen. nov. per indicare appunto la maggior distribuzione e la probabile origine delle specie di questi sottogeneri.

Forniamo quindi la seguente definizione del genere *Ancylostoma* e dei relativi sottogeneri.

Genus *Ancylostoma* (Dubini, 1843) Creplin, 1845.

Definizione. *Ancylostomatinae*. Estremità anteriore volta dorsalmente. Capsula boccale inbutiforme; presenza di denti ventrolaterali nel margine orale e 2 lancette triangolari

(1) Collezioni della London School of Hygiene and Tropical Medicine, personale del dott. L. P. Le Roux, dell'Istituto di Parassitologia di Roma, del Centro di Parassitologia del Giardino Zoologico di Roma.

nella profondità della capsula. Il dotto della glandola dorsale esofagea decorre lungo un ispessimento della parete della capsula e si apre all'estremità di una profonda incisura nel suo margine orale.

Borsa caudale. Costole ventrali ravvicinate e parallele; le costole laterali nascono da un tronco comune; la costola dorsale esterna nasce da un tronco comune con la dorsale, la quale si biforca distalmente in due rami corti, generalmente tridigitali. Spicoli simili, gubernaculum presente.

Femmina con vulva vicino all'unione del terzo medio col terzo posteriore del corpo.

Parassiti dell'intestino tenue di mammiferi.

Sono state finora descritte le seguenti specie del genere *Ancylostoma*: *bidens*, *buckleyi*, *caninum*, *ceylanicum*, *conepati*, *duodenale*, *duodenale* var. *galagoi*, *herschleri*, *iperodontatum*, *japonicum*, *longespiculum*, *malayanum*, *martinagliai*, *mephitis*, *minimum*, *mucronatum*, *mycetis*, *paraduodenale*, *pluridentatum*.

# 1. - Subgenus *Ancylostoma* (*Ancylostoma*) Lane, 1916 (Tav. I, figg. 1 e 2).

Definizione. Apertura boccale: tre paia di denti ventrolaterali al margine orale della capsula boccale, il paio interno può essere rudimentale; uno o più paia di denti dorsolaterali.

Borsa caudale: costole laterali ben separate tra loro.

Parassiti di carnivori e dell'uomo.

Specie tipo *Ancylostoma* (*Ancylostoma*) *duodenale* (Dubini, 1843) Lane, 1916.

Possono essere riunite con sicurezza in questo sottogenere numerose specie e precisamente *A.* (*Ancylostoma*) *buckleyi*, *caninum*, *conepati*, *duodenale*, *martinagliai*, *paraduodenale*, *poliodontatum*, *tubaeforme*.

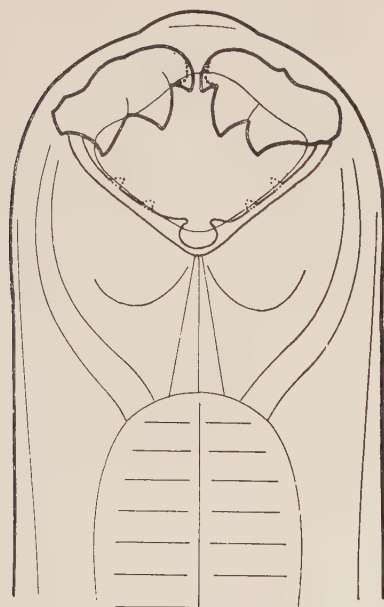
Proponiamo, per il rapido riconoscimento di queste specie, la seguente tavola dicotomica basata sul numero di denti e sulla rispettiva lunghezza degli spicoli.

## TABELLA.

A	3 paia di grandi denti ventrolaterali	
B	1 paio di denti dorsolaterali	
C	spicoli più corti di 1 mm	<i>A.</i> ( <i>A.</i> ) <i>caninum</i> (Ercolani, 1859)
C'	spicoli più lunghi di 1 mm	<i>A.</i> ( <i>A.</i> ) <i>tubaeforme</i> (Zeder, 1800)
C''	spicoli più lunghi di 2 mm	<i>A.</i> ( <i>A.</i> ) <i>conepati</i> (Solonet, 1911)
B'	2 paia di denti dorsolaterali	
D	spicoli più corti di 1 mm	<i>A.</i> ( <i>A.</i> ) <i>buckleyi</i> Le Roux e Biocca, 1957
D'	spicoli più lunghi di 1,5 mm	<i>A.</i> ( <i>A.</i> ) <i>martinagliai</i> Mönnig, 1931
B''	3 paia di denti dorsolaterali	<i>A.</i> ( <i>A.</i> ) <i>poliodontatum</i> Le Roux e Biocca, 1957
A'	2 paia di grandi denti ventrolaterali (terzo paio rudimentale)	
E	spicoli più lunghi di 2 mm; parassiti dell'uomo	<i>A.</i> ( <i>A.</i> ) <i>duodenale</i> (Dubini, 1843)
E'	spicoli lunghi circa 1,5 mm; parassiti di carnivori	<i>A.</i> ( <i>A.</i> ) <i>paraduodenale</i> Biocca, 1951

*Ancylostoma (Ancylostoma)*

I



$\mu$  100

2

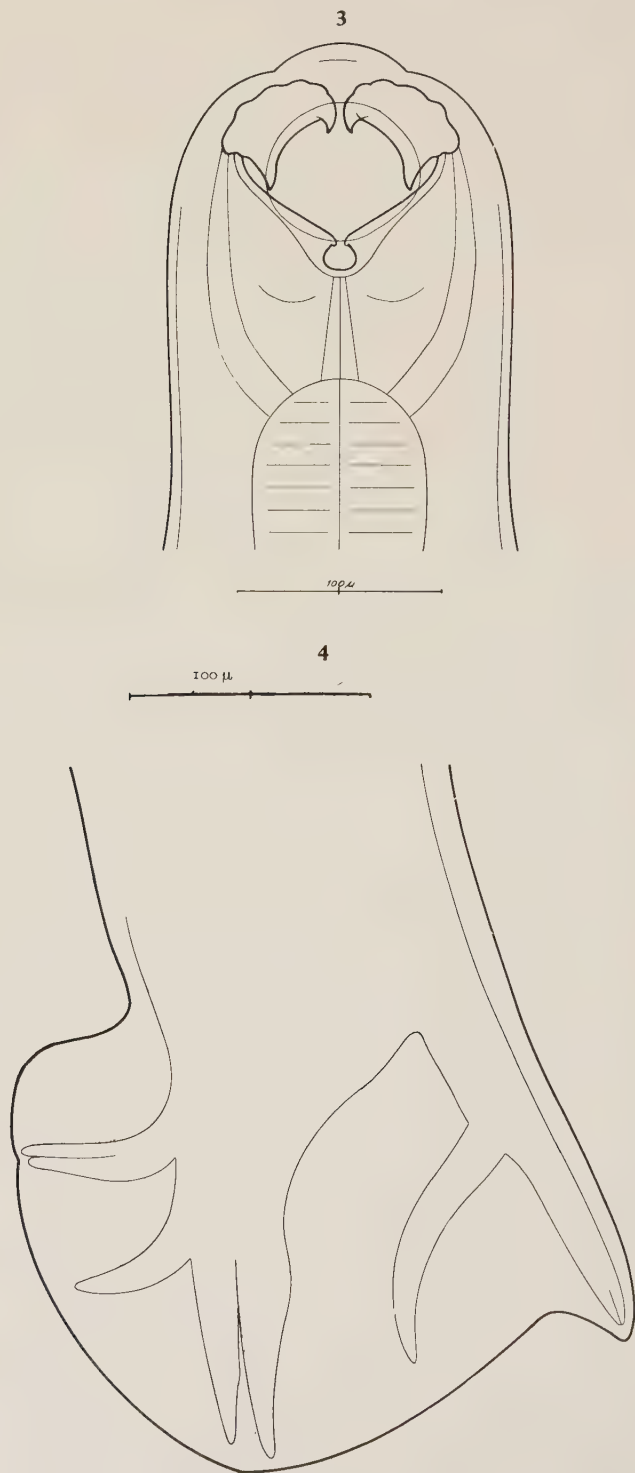
100  $\mu$



Figg. 1 e 2. - Vista dorsale dell'estremità  
anteriore e vista laterale della borsa caudale.



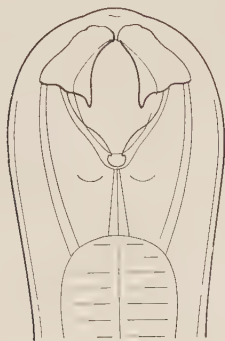
*Ancylostoma (Ceylancylostoma)*



Figg. 3 e 4. - Vista dorsale dell'estremità anteriore e vista laterale della borsa caudale.

*Ancylostoma (Afrancylostoma)*

5



6

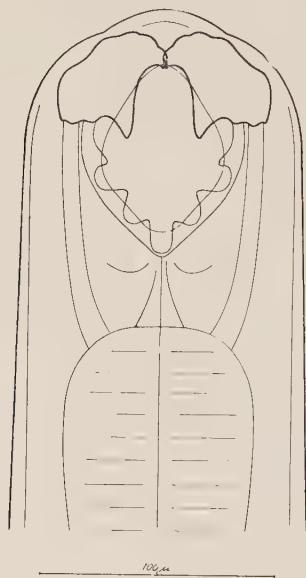
100 µ



Figg. 5 e 6. - Vista dorsale dell'estremità  
anteriore e vista laterale della borsa caudale.

*Ancylostoma (Amerancylostoma)*

7



8



Figg. 7 e 8. – Vista dorsale dell'estremità anteriore  
e vista laterale della borsa caudale.

2. - Subgenus *Ancylostoma* (*Ceylancylostoma*) Lane, 1916 (Tav. II, figg. 3, 4)

Definizione. Apertura boccale: due paia di denti ventrolaterali al margine orale; solamente un paio di denti dorsolaterali.

Borsa caudale: lobi laterali corti; costole laterali media e posteriore quasi diritte e ravvicinate tra loro, laterale esterna divergente; la costola dorsale esterna prende origine da un lungo tronco comune con la dorsale.

Parassiti di carnivori e accidentalmente di roditori e dell'uomo.

Specie tipo *Ancylostoma* (*Ceylancylostoma*) *ceylanicum* (Looss, 1911) Lane, 1916.

Attualmente possono essere distinte con chiarezza in questo sottogenere le specie *A. (Ceylancylostoma) malayanum* (Alessandrini, 1905) parassita di ursidi asiatici e la specie *A. (Ceylancylostoma) ceylanicum* (Looss, 1911), vastamente diffusa tra i carnivori selvaggi in Asia, tra i carnivori domestici in Asia e America e presente in un roditore (*Sciurus prevosti*) a Sumatra. Le due specie di questo sottogenere si differenziano rapidamente soprattutto in base alla lunghezza degli spicoli.

Spicoli più lunghi di 2 mm *A. (C.) malayanum* (Alessandrini, 1905)

Spicoli lunghi circa 1 mm *A. (C.) ceylanicum* (Looss, 1911).

Dall'esame di esemplari provenienti da ospiti diversi ci sembra che *A. (C.) ceylanicum* riunisca attualmente un gruppo di parassiti i quali probabilmente in futuro dovranno essere ulteriormente suddivisi. Occasionalmente sono stati rinvenuti rappresentanti di questa specie nell'intestino umano ed è nostra opinione che le larve di *A. (C.) ceylanicum* siano quelle che provocano nell'uomo la dermatite verminosa migrante o « creeping eruption » e non, come attualmente si crede, le larve di *A. (Afrancylostoma) braziliense*.

3. - Subgenus *Ancylostoma* (*Afrancylostoma*) subgen. nov. (Tav. III, figg. 5, 6).

Definizione. Apertura boccale: due paia di denti ventrolaterali, il dente interno piccolo e qualche volta rudimentale. Solamente un paio di piccoli denti dorsolaterali.

Borsa caudale: lobi laterali molto più lunghi del dorsale; costole laterali derivano da un lungo tronco comune, sono chiaramente separate, divergenti e arcuate; il tronco comune della dorsale e della dorsale esterna è molto corto.

Parassiti di carnivori.

Specie tipo *Ancylostoma* (*Afrancylostoma*) *braziliense* (De Faria, 1910).

Il De Faria trovò e descrisse in Brasile nel 1910 un nuovo anchilostoma che chiamò *braziliense*. Sotto l'influenza degli Autori anglosassoni e in contrasto con l'opinione di De Faria e Looss, tutti gli elmintologi (medici e veterinari) ammisero in seguito l'identità delle specie *braziliense* e *ceylanicum*. Per poter sostenere tale punto di vista si dovette necessariamente trascurare quasi per intero lo studio dei caratteri morfologici delle borse caudali degli anchilostomi, che, al contrario, hanno valore sistematico fondamentale.

Abbiamo infatti potuto stabilire in base allo studio di tali caratteri (Biocca, 1951) che *A. ceylanicum* non è sinonimo di *A. braziliense* ma che si tratta di due specie così diverse nella loro morfologia come nella rispettiva distribuzione geografica, da appartenere addirittura, secondo noi, a due sottogeneri distinti.

La ragione principale della confusione avvenuta in passato tra le due specie va ricercata nella relativa somiglianza delle capsule boccali e nel fatto che il De Faria (1910) nel dare la descrizione di *A. braziliense* fornì solo il disegno della borsa caudale vista dorsalmente, mentre Looss (1911) fornì per *A. ceylanicum* solo la vista laterale della borsa caudale stessa. Nel classico « Précis de Parasitologie » di E. Brumpt (1949), vengono infatti riportati per *A. braziliense*, la vista dorsale di *A. braziliense* e la vista laterale di *A. ceylanicum*. Lo stesso Brumpt, al quale indicammo le ragioni dell'equivoco, accettò la nostra spiegazione e avrebbe separato le due specie *A. braziliense* e *A. ceylanicum* nella prossima edizione del suo trattato se la morte non avesse privato la Parassitologia di uno dei suoi maggiori rappresentanti. Nel suo recente trattato « Introduction to parasitology » Chandler (1955) separa chiaramente le due specie.

Proponiamo perciò la creazione di un nuovo sottogenere *Ancylostoma* (*Afrancylostoma*) subgen. nov., con la specie tipo *Ancylostoma* (*Afrancylostoma*) *braziliense*. I caratteri di questo sottogenere sono intermedi tra quelli del genere *Ancylostoma* e *Uncinaria*.

Il nome di sottogenere *A. (Afrancylostoma)* è secondo noi giustificato dal fatto di essere questi parassiti ampiamente diffusi tra i carnivori selvaggi in Africa, che probabilmente è il continente di origine da cui sarebbero poi stati trasportati (forse con i carnivori domestici), in America, analogamente a quanto si ritiene sia avvenuto per il parassita umano *Necator americanus*.

*Ancylostoma* (*Afrancylostoma*) *braziliense* è probabilmente un nome comprensivo di parassiti diversi che potranno forse ulteriormente essere suddivisi in specie o varietà. Infatti parassiti con i caratteri del sottogenere sono stati ritrovati in molti ospiti diversi, però sempre carnivori; le segnalazioni di parassitosi nell'uomo non sembrano sufficientemente documentate (Beaver, 1956). Ci risulta dalla letteratura che tutte le volte che sono stati pubblicati disegni o fotografie di parassiti trovati nell'intestino umano e indicati come *A. (Afr.) braziliense*, non si trattava di questi parassiti, ma di *A. (C.) ceylanicum*.

4. - Subgenus *Ancylostoma* (*Amerancylostoma*) subgen. nov. (Tav. IV, figg. 7, 8).

Definizione. Apertura boccale: due paia di denti ventrolaterali, più di un paio di denti dorsolaterali.

Borsa caudale. Costole laterali relativamente corte, prendono origine da un tronco comune molto lungo e largo; le costole laterali media e posteriore sono dirette posteriormente descrivendo approssimativamente un angolo retto con l'asse longitudinale del tronco comune delle laterali, hanno le loro estremità ricurve ventralmente e ravvicinate; la



costola laterale esterna continua invece la direzione del tronco comune delle laterali. La costola dorsale esterna ha origine da un corto tronco comune con la dorsale.

Parassiti dei carnivori (finora rinvenuti solo in felidi).

Specie tipo *Ancylostoma (Amerancylostoma) pluridentatum* (Alessandrini, 1905).

Nel 1905 Alessandrini descrisse una nuova specie di anchilostomatide indicata prima come appartenente al genere *Uncinaria* e successivamente riportata al genere *Ancylostoma*, parassita dell'intestino tenue di un felino sud americano. Per l'eccezionale numero di denti nel margine dorsolaterale dell'apertura boccale, l'Alessandrini propose il nome di *Uncinaria pluridentata*. Nel 1926 Schwartz ridescrisse accuratamente la specie, osservata di nuovo in numerosi felini americani (*Felis mitis*, *onca*, *concolor*) – senza tuttavia dare un chiaro disegno laterale della borsa caudale stessa – ed avanzò l'idea che appartenesse a un genere nuovo, per il quale non propose un nome. Molto probabilmente l'opinione di Schwartz è giusta e sarebbe più rispondente al vero il creare un nuovo genere ma, per le ragioni prima ricordate, ci limitiamo a considerarla specie tipo di un sottogenere, per il quale proponiamo il nome *Ancylostoma (Amerancylostoma)* subgen. nov.

Anche in questo caso il nome *A. (Amerancylostoma)* ci sembra giustificato perché finora tali parassiti sono stati trovati solo in felini americani, con l'eccezione di un caso osservato in una tigre morta nel Giardino Zoologico di Londra e che può aver contratto l'infestazione nel giardino zoologico stesso. La specie *A. (Amer.) pluridentatum* può infatti infestare con facilità anche il gatto, come abbiamo potuto controllare in un gatto del Giardino Zoologico di Londra. In base allo scarso materiale esistente nelle varie collezioni non è possibile per il momento poter indicare se più di una specie o varietà compongano questo sottogenere. La conformazione delle costole laterali di questo sottogenere risulta alquanto somigliante a quella del genere *Necator*.

Alcune specie del genere *Ancylostoma* non risultano nelle tabelle dicotomiche relative ai diversi sottogeneri da noi proposti, poiché non esaurientemente descritte o perché da noi considerate sinonimi: precisamente le specie *Ancylostoma bidens*, *conepati*, *duodenale* var. *galagoi*, *gilsoni*, *herschleri*, *longespiculum*, *mephitis*, *minimum*, *mucronatum*, *mycetis*, *japonicum*.

Riteniamo che le seguenti specie:

*Ancylostoma bidens* (Molin, 1861) Texeira de Freitas, 1951;

*A. minimum* (Linstow, 1906) Lane, 1916;

*A. mucronatum* (Molin, 1861) York e Maplestone, 1926;

*A. mycetis* (Molin, 1861) York e Maplestone, 1926;

e *A. japonicum* (Fukuda e Katsurada, 1925)

siano conosciute in maniera insufficiente e tale da non permettere una identificazione certa, quindi vadano per ora considerate come «species inquirendae».

Così pure il parassita *A. duodenale* var. *galagoi* Van der Bergher, 1936, trovato in un lemure africano e considerato una varietà della specie *A. duodenale* appartiene anch'esso al sottogenere *A. (Ancylostoma)*: probabilmente non è una varietà ma una specie valida non completamente descritta. Abbiamo cercato nell'Istituto di Medicina Tropicale di Anversa gli esemplari tipo che purtroppo non si trovavano più nella collezione. Ringraziamo la Dott.ssa Vuylsteke per averci messo a disposizione tutti i disegni fatti sugli esemplari originali.

La specie *A. longespiculum* (Mönnig, 1938) Kyoto, 1953 è, secondo noi, da considerare sinonimo della specie *A. (Ancylostoma) tubaeforme* (Zeder, 1800) Biocca, 1955 e, quindi appartenente al sottogenere *Ancylostoma (Ancylostoma)*.

In un roditore asiatico *Sciurus prevosti* è stato descritto da Gêdoelst un parassita indicato col nome *A. gilsoni* Gêdoelst, 1916. I caratteri morfologici lo riportano senz'altro al sottogenere *A. (Ceylancylostoma)*, ma la descrizione originale non permette di stabilire con certezza se si tratti di specie valida o di *Ancylostoma (Ceylancylostoma) ceylanicum* adattato anche in questo ospite. Lo Schwartz infatti ritiene che il nome di specie *gilsoni* debba essere considerato sinonimo di *ceylanicum*. Così pure la specie *A. mephitis* Micheletti, 1925, trovata nel Giardino Zoologico di Roma nel carnivoro *Mephitis zorrilla* appartiene senz'altro al sottogenere *A. (Ceylancylostoma)*; riesce attualmente difficile, finché non sarà possibile studiare nuovi esemplari, poter stabilire se si tratti di una specie valida o di *A. (Ceylancylostoma) ceylanicum*.

La specie *A. herschleri* Mönnig, 1936 descritta in *Orycteropus afer* è l'unica la cui classificazione riesca ancora difficile. La distribuzione delle costole nella borsa caudale del maschio sembrerebbe riportarla al sottogenere *A. (Ceylancylostoma)*, ma la presenza di un solo dente ventrolaterale al margine della capsula boccale, se confermata, giustificherebbe la creazione di un nuovo sottogenere. L'ospite, così diverso dai comuni ospiti del genere *Ancylostoma*, confermerebbe anche questa possibilità.

Poiché si tratta di una specie che non ci è stato possibile studiare direttamente, in quanto non ne esistono esemplari nelle principali collezioni europee, preferiamo, per il momento, non definirne con esattezza l'esatta posizione sistematica.

Gli Autori propongono la suddivisione delle specie del genere *Ancylostoma* (Dubini, 1843) Creplin, 1845 in quattro sottogeneri: precisamente nei due sottogeneri già indicati da Lane *Ancylostoma (Ancylostoma)* Lane, 1916, *Ancylostoma (Ceylancylostoma)* Lane, 1916 e in due nuovi sottogeneri *Ancylostoma (Afrancylostoma)* subgen. nov. e *Ancylostoma (Amerancylostoma)* subgen. nov. Vengono descritti i caratteri dei quattro sottogeneri e viene fatta una rapida revisione della posizione sistematica delle specie finora descritte nel genere *Ancylostoma*.

## AUTORI CITATI.

- ALESSANDRINI G. (1905). *Su di alcune uncinarie parassite dell'uomo e di altri vertebrati*, « Boll. Soc. Zool. ital. », 14, 23-48.
- BEAVER P. C. (1956). *The records of A. braziliense as an intestinal parasite of man in North America*, « Am. Jour. Trop. Med. Hyg. », 5, 737-738.
- BERGHE VAN DER (1936). *On the occurrence of a species of Ancylostoma closely related to A. duodenale in an african lemur*, « Jour. Parasit. », 22, 224-226.
- BIOCCA E. (1951). *On Ancylostoma braziliense (De Faria, 1910) and its morphological differentiation from A. ceylanicum*, « Jour. of Helm. », 25, 1-10.
- BIOCCA E. (1951). *On Ancylostoma paraduodenale, a new species from felines, closely related to A. duodenale*, « Jour. of Helm. », 25, 11-18.
- BIOCCA E. (1951). *Les ancylostomes et l'origine des Indiens d'Amérique*, « L'Anthropol. », 29, 7-12.
- BIOCCA E. (1954). *Ridescrizione di Ancylostoma tubaeforme (Zeder, 1800) parassita del gatto, considerato erroneamente sinonimo di Ancylostoma caninum (Ercolani, 1859) parassita del cane*, « Riv. parassitol. », 15, 267-278.
- BRUMPT E. (1949). *Précis de Parasitologie*. Masson, Paris.
- CHANDLER A. C. (1955). *Introduction to Parasitology*. Wiley, New York.
- DE FARIA G. (1910). *Contribution towards the classification of brazilian entozoa. - III. Ancylostomum braziliense n. sp. parasite of cats and dogs*, « Mem. Inst. O. Cruz », 2, 286-293.
- DUBINI A. (1843). *Nuovo verme intestinale umano (Agchylostoma duodenale) costituente un sesto genere dei nematodi propri dell'uomo*, « Ann. Univ. Med. Milano », 106, 5-13.
- ERCOLANI G. B. (1859). *Nuovi elementi teorico-pratici di medicina veterinaria*, p. 513-514, Bologna.
- GEDOELST L. (1917). *Nématodes parasites du Sciurus prevosti de Sumatra*, « Rev. Zool. Afr. », 5, 153-162.
- FUKUDA AKIRA und FUJIRO KATSURADA (1925). *Über eine neue Species Necator (Ancylostoma japonicum)*, « Trans. Jap. Path. Soc. », 15, 252-253.
- LANE C. (1916). *The genus Ancylostoma in India and Ceylon*, « Ind. Jour. Med. Res. », 4, 74-92.
- LE ROUX L. P. e BIOCCA E. (1957). *Su una nuova specie del genere Uncinaria e su due nuove specie del genere Ancylostoma*, « Rendic. Acc. Naz. Lincei », 22 (serie VIII), 192-199.
- LOOSS A. (1911). *The anatomy and life history of Agchylostoma duodenale*, « Rec. Sch. Med. Cairo », 4, 209.
- MICHELETTI E. (1929). *Intorno ad una nuova specie di Ancylostoma*, « Ann. Med. Nav. Colon. », 2, 246-257.
- MÖNNIG H. (1931). *A new hookworm Ancylostoma martinagliai from a jackal*, « Onderst. Jour. S. Afr. Vet. Med. Ass. », 2, 125-127.
- MÖNNIG H. (1938). *Ancylostoma herschleri n. sp. from the antbear, Otycteropus afer, with a note on a new variety of A. caninum*, « Vjch. Naturf. Ges. Zurich », 83, 1-5.
- NODA RYOJI (1952). *On a cat hookworm, Ancylostoma longespiculatum Monnig 1938*, « Bull. Naniwa Univ. Ser. B. Agr. and Nat. Sc. », 2, 11-18.
- SCHWARTZ B. (1927). *Description of Ancylostoma pluridentatum, a hookworm of carnivores, and a review of the genus Ancylostoma*, « Proc. U. S. Nat. Mus. », 72, 1-9.
- SOLANET E. (1911). *Agchylostoma conepati nova specie, parasito de Conepatus suffocans (Zorrino)*, Buenos Aires, 1, 74.
- YORKE W. and MAPLESTONE P. A. (1926). *The nematode parasites of vertebrates*. London.
- TEIXEIRA DE FREITAS J. F. (1951). *Alguns Strongyloidea parasitos de Procyon cancrivorus*, « Rev. Brasil. de Biol. », 11, 189-202.

**Zoologia.** — *La validità di* *Bulinus* (*Physopsis*) *abyssinicus* (*Martens*), *l'ospite intermedio di* *Schistosoma haematobium* *in* *Somalia*. Nota di GEORG MANDAHLE-BARTH (\*), presentata (\*\*) dal Socio V. PUNTONI.

Lipparoni (1952)<sup>(1)</sup> e Pellegrini (1953)<sup>(2)</sup> sono stati i primi a segnalare la presenza di *Physopsis* (*Bulinus*) *abyssinicus* (*Martens*) in Somalia. La specie era stata creata da Martens (1866) su esemplari dell'Etiopia del Sud, disgraziatamente senza una più precisa indicazione della località e ridescritta e disegnata poi da Jickeli (1874). Zavattari (1956) ritiene che *B. abyssinicus* non sia specificamente distinto dal largamente diffuso *B. (Physopsis) globosus* (*Morelet*) e la sua principale ragione sembra basata, non credo giustamente, sull'affermazione di Mozley (1951, p. 6) « *Physopsis africana* e *Physopsis ovoidea* sono ambedue sinonimi di *Physopsis globosa*, o sono così vicine ad essa, che la loro identificazione è difficile ». L'affermazione di Mozley è innegabilmente giustificata nei riguardi di queste forme ricordate<sup>(3)</sup>.

Io sono responsabile per la identificazione di *B. abyssinicus* nei lavori di Lipparoni e Pellegrini, per cui trovo naturale di cercar di chiarire la posizione sistematica di *B. abyssinicus* e di esporre le ragioni per le quali la considero una specie valida. A questo riguardo desidero precisare che le specie « comprendenti tutto », proposte da Amberson e Schwartz (1953), Mozley (1951) e altri, non rappresentano un progresso e particolarmente non lo rappresentano quando si tratti di molluschi legati alla bilharziosi, poiché non tutte le forme di *Biomphalaria* e *Bulinus* hanno la stessa importanza, come ospiti intermedi di *Schistosoma*. Maffi (1957) è anche dell'opinione che una soprasemplificazione non sia di aiuto nella soluzione del problema per l'identificazione delle specie.

È opinione comune, ma falsa, che esistano tra tutte le specie di molluschi, chiare differenze anatomiche: è poi ben lungi dall'esser vera, specialmente nei gruppi più primitivi, quali i polmonati di acqua dolce. Nella famiglia Planorbidae troviamo una quantità di buoni caratteri che permettono di sistemare le molte specie in differenti generi e questi di nuovo in sottofamiglie, ma dentro i singoli generi è difficile o qualche volta impossibile trovare buoni caratteri anatomici differenziali tra le varie specie. Come

(\*) WHO Snail identification Centre, Danmarks Akvarium, Charlottenlund, Danmark.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1-2) Lavori eseguiti sotto la Direzione dell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

(3) Disgraziatamente Mozley le considera cospecifiche; egli usa il nome *Physopsis globosa* per la sua specie collettiva, sebbene il nome *Physopsis africana* abbia 18 anni di priorità.



caratteri di specie, le caratteristiche anatomiche sono di regola non molto migliori di quelle legate al guscio e sono altrettanto variabili. Le variazioni nelle strutture anatomiche sono dovute in parte all'età del mollusco (e molto spesso anche al metodo di fissazione!) e in parte al fatto che i molluschi e specialmente quelli di acqua dolce, frequentemente vivono in popolazioni isolate, nelle quali possono svilupparsi alcuni caratteri particolari. Se per esempio una certa specie usualmente possiede una guaina della verga

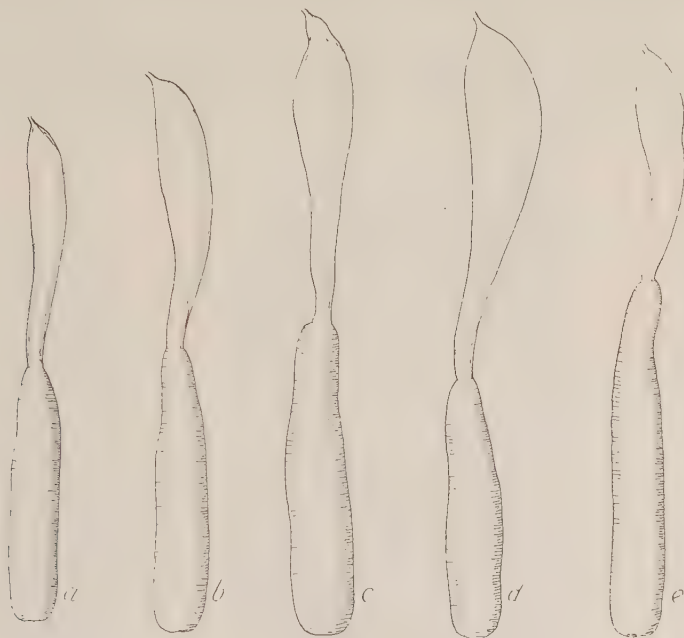


Fig. 1. — Organi copulatori tipici.

a. *Physopsis* giovane      b-c. *B. (Ph.) abyssinicus*      d. *B. (Ph.) africanus*      e. *B. (Ph.) globosus*.

(vergic sheath) uguale in lunghezza al prepuzio, è spesso possibile trovare una popolazione con « vergic sheath » relativamente più lungo o più corto, ma in tutti gli altri aspetti esattamente simile alla forma usuale. I caratteri più costanti e meno variabili si trovano nella radula e nella microscultura del guscio. I caratteri trovati nella struttura e nelle proporzioni degli organi genitali sono più variabili, ma anche utili, se i loro limiti di variazione sono ben conosciuti, mentre gli organi digerenti, il sistema nervoso e gli organi palleali non hanno valore per la identificazione di specie di Planorbidae africane.

Il genere *Bulinus* è suddiviso in due sottogeneri: *Bulinus* s. str. e *Physopsis*. I caratteri differenziali sono il sollevamento lineare (ridge) nella superficie ventrale del rene, la troncatura della columella, e la microscultura del guscio disposta più o meno spiralmente. I tre caratteri sono generalmente presenti in *Physopsis* e assenti in *Bulinus* s. str. Se questi tre caratteri fossero sempre presenti in *Physopsis*, sarebbe ragionevole considerare il gruppo



come un genere distinto, ma poiché non sono sempre presenti in tutti gli esemplari di *Physopsis* è meglio considerare *Physopsis* come un sottogenere di *Bulinus* s. l. I caratteri specifici, nel sottogenere *Physopsis*, vengono ricercati principalmente nelle proporzioni dell'organo copulatore e nel guscio, mentre la radula è di minor valore da un punto di vista tassonomico.

Le proporzioni dell'organo copulatore, il che significa la lunghezza e la larghezza relative del « vergic sheath » e del prepuzio, sono difficilmente utilizzabili, poiché le proporzioni dipendono sia dall'età del mollusco, sia dal metodo di fissazione. Tutti gli esemplari giovani di *Physopsis* hanno un organo copulatore sottile, con « vergic sheath » uguale in lunghezza al prepuzio, mentre gli esemplari maturi e bene sviluppati mostrano alcune differenze notevoli. In *B. africanus* (Krauss) il « vergic sheath » diventa circa 2 volte più lungo e largo del prepuzio, mentre normalmente *B. globosus* (Morelet) ha un organo copulatore con un « vergic sheath » corto che misura solo un po' più della metà lunghezza del prepuzio e la stessa larghezza. In *B. nasutus* (Martens) e *B. abyssinicus* le proporzioni degli esemplari giovani sono mantenute allo stadio adulto, ma alcune volte il prepuzio diviene un po' più lungo del « vergic sheath ». Un bene sviluppato *B. abyssinicus* ha in genere un « vergic sheath » relativamente più largo di un bene sviluppato *B. nasutus*. Non esistono dubbi sulla relatività di questi caratteri, ma è necessario insistere sull'importanza del metodo di fissazione, poiché negli esemplari contratti il prepuzio e non il « vergic sheath » subisce una contrazione. Le proporzioni che abbiamo ricordato sono tutte prese da esemplari alquanto contratti, cioè da esemplari contratti in maniera che il piede riempia l'apertura del guscio.

I caratteri del guscio consistono nell'apparenza generale del guscio, nella forma dei giri della spira, nello sviluppo della troncatura della columella e specialmente nella microscultura, che è visibile a un ingrandimento di 25 volte.

La microscultura tipica del sottogenere *Physopsis* consiste in piccole cavità e noduli disposti spiralmente per lo più nella spira, ma a volte presenti fino nella parte superiore dell'ultimo giro. *B. abyssinicus* differisce da tutti gli altri *Physopsis* (e anche da tutti i *Bulinus* s. str.) in questo aspetto, poiché la microscultura nella spira di *B. abyssinicus* è rappresentata da elevazioni « wrinkled », confluenti, irregolari e verticali, che nel primo giro formano quasi una costellazione.

Questa scultura particolare di *B. abyssinicus* deve essere indicata piuttosto come una corrugazione ed è chiaramente differente dalla scultura delle spire di tutti gli altri *Physopsis*. La struttura spirale è generalmente forte e distinta in *B. nasutus* e *B. africanus*, come regola più debole in *B. globosus* e mancante del tutto in *B. ugandae*.

Anche nella forma generale del guscio *B. abyssinicus* differisce dagli altri membri del sottogenere *Physopsis*. Le spire sono « shouldered », il che significa che il lato superiore del giro vicino alla sutura è piatto e quasi



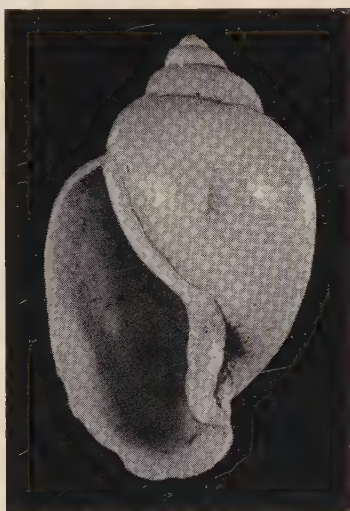
1



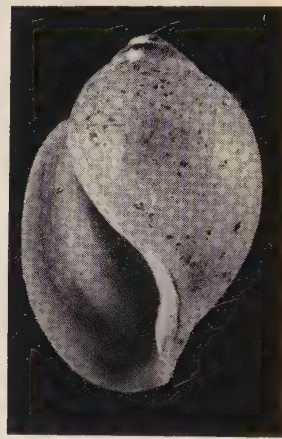
2



3



4



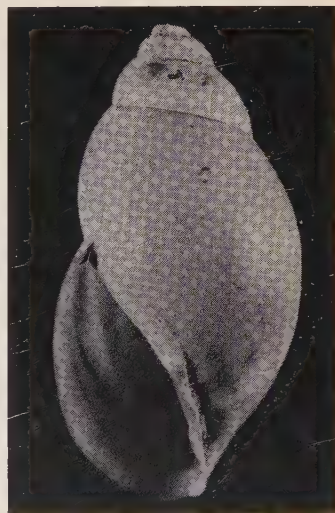
5



6



7



8

1. *B. (Ph.) africanus ovoideus*. Mostra la microscultura tipica di *Physopsis*. Ingrandito circa 25×; 2. *B. (Ph.) abyssinicus*. Mostra la microscultura. Ingrandito circa 25×; 3. *B. (Ph.) abyssinicus*. Gelib distretto, Somalia; 4. *B. (Ph.) abyssinicus*. Villabruzzi, Somalia; 5. *B. (Ph.) abyssinicus*. Scuro e con guscio sottile dal Nassibingo descec, Somalia; 6. *B. (Ph.) globosus*. Sassa River, Angola; 7. *B. (Ph.) africanus*. Jahannesburg, Transvaal; 8. *B. (Ph.) nasutus*, Akoli (paludi), Uganda.





orizzontale, partendo quasi ad angolo retto sul giro sottostante, mentre negli altri *Physopsis* i giri sono raramente « shouldered », in genere formando angoli acuti. L'ultimo giro di altri *Physopsis* ha in genere lati chiaramente curvi, mentre in *B. abyssinicus* l'ultimo giro ha lati diritti che danno al guscio un aspetto quasi quadrato. L'apertura di *B. abyssinicus* è più sottile e più angolare di quella di altri *Physopsis*. L'apice è a punta e l'ombelico, di regola, non completamente chiuso. Il colore del guscio è molto chiaro, colore che raramente si riscontra in altri *Physopsis*.

Da ciò che abbiamo esposto apparirà chiaro che *B. abyssinicus* è piuttosto diverso dagli altri *Physopsis* e del tutto distinto. Di fatti è uno dei meglio caratterizzati e più facilmente identificabili di tutti *Bulinus* africani e nessun dubbio può esser sollevato contro la sua validità come specie distinta. Inoltre i suoi caratteri specifici sembrano essere molto costanti. Il materiale, che ho avuto opportunità di studiare, consiste di 12 diversi lotti. Di questi, 11 sono del tutto tipici in tutti gli aspetti, e uno solo piuttosto aberrante. Questo lotto consiste di numerosi esemplari raccolti e gentilmente inviati dal Dr. M. Maffi che mi informa che gli esemplari sono stati raccolti da « Narcic jungo descer », una piccola, fangosa e leggermente acida raccolta di acqua nell'Isola di Alessandra nel fiume Giuba. Tutti questi esemplari hanno un guscio piuttosto sottile e bruno scuro, generalmente con una microscultura poco sviluppata, ma alcuni mostrano la caratteristica scultura corrugata di *B. abyssinicus*, del quale hanno gli stessi caratteri anatomici e di forma del guscio. Sembra molto probabile che i gusci aberranti di questa popolazione siano un risultato dell'influenza delle condizioni locali, poiché è ben noto che i molluschi viventi in acque fangose e leggermente acide in genere hanno gusci più scuri e sottili dei molluschi della stessa specie che vivono in condizioni più favorevoli.

#### BIBLIOGRAFIA.

- AMBERSON J. M. e E. SCHWARTZ (1953), « Trans. Roy. Soc. Trop. Med. Hyg. », 47, 451-502.  
 JICKELI C. F. (1874), « Nova Acta Leop. Carol. », 37, 210.  
 LIPPARONI E. (1952), « Riv. Parass. », 13, 309-14.  
 MAFFI M. (1957), « Riv. Parass. », 18, 69-76.  
 MARTENS E. V. (1866), « Malakozool Bl. », 13, p. 100.  
 MOZLEY A. (1951), *The Snail Hosts of Bilharzia in Africa*. London.  
 PELLEGRINI D. (1953), « Riv. Parass. », 14, 15-17.  
 ZAVATTARI E. (1956), « Riv. Parass. », 17, 193-202.

**Anatomia.** — *Contributo istologico ed istochimico alla conoscenza del sistema neurosecretorio ipotalamo-ipofisario* (\*). Nota di ELIO RAVIOLA, presentata (\*\*) dal Socio A. PENSA.

Nel citoplasma delle cellule dei nuclei sopraottico e paraventricolare, lungo le fibre del tratto sopraottico-ipofisario e nella neuroipofisi è presente un materiale di aspetto finemente granulare che si colora in blu con il metodo di Gomori alla ematossilina cromica-floxina ed in rosso con il metodo pure di Gomori alla paraldeide-fucsina. Esso è da identificarsi con il materiale dallo Scharrer (1928), dal Bargmann (1949) e da numerosi altri Autori attribuito alla attività secretoria dei neuroni di detti nuclei ipotalamici e da essi definito neurosecreto.

Io mi sono proposto di riesaminare il comportamento istochimico di detto materiale allo scopo di risolvere alcune questioni tuttora controverse circa la sua natura. Ho allestito con sezioni contigue di uno stesso pezzo, appartenente ad uno stesso animale, tre serie: ho trattato la prima con il metodo di Gomori alla ematossilina cromica-floxina, la seconda con i metodi istochimici per lo studio dei glucidi, dei lipidi, dei protidi e dei cromolipoidi; mi sono servito della terza serie per i controlli di specificità ai metodi istochimici. Per lo studio dei protidi mi sono anche avvalso della reazione di Danielli e della reazione di Weiss, Tsou e Seligman, che non erano state finora mai utilizzate in questo campo.

Le ricerche riguardano il sistema ipotalamo-ipofisario del cane.

Ho ottenuto i seguenti risultati:

1° le cellule dei nuclei sopraottico e paraventricolare del cane posseggono una certa quantità di materiale debolmente positivo alle reazioni per i polisaccaridi, a differenza delle fibre che ne sono prive; però l'esame comparativo tra sezioni seriate contigue, trattate le une con il metodo di Gomori all'ematossilina cromica-floxina e le altre con i metodi istochimici, dimostra che non vi è corrispondenza topografica tra materiale neurosecretorio e materiale positivo alle reazioni per i polisaccaridi.

Si può dunque concludere che il neurosecreto non ha i caratteri istochimici propri di un polisaccaride. Ciò concorda con le affermazioni dello Sloper (1954, 1955) e di Howe e Pearse (1956) e contrasta con le conclusioni dello Schiebler (1951, 1952).

Materiale positivo alle reazioni per i polisaccaridi, avente gli stessi caratteri morfologici di quello presente nelle cellule nervose secretive dell'ipotalamo, è contenuto nel citoplasma di neuroni non secretori di altri distretti del sistema nervoso centrale; la natura chimica di tale materiale

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia umana e Istologia della Università di Pavia diretto dal prof. Gennaro Palumbi.

(\*\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.



non è stata da me completamente chiarita; ho potuto però stabilire che detto materiale:

- a) è estratto dai liquidi fissatori contenenti alcool;
- b) è reso alcool insolubile dalla formalina 10 %;
- c) diviene negativo alle reazioni dei polisaccaridi dopo acetilazione;

2° il materiale neurosecretorio che, come è noto, si conserva nelle sezioni in paraffina appare Sudan-negativo. Ritengo perciò in accordo allo Sloper e a Howe e Pearse che il neurosecreto non abbia le caratteristiche istochimiche di un lipide;

3° il neurosecreto è negativo alla reazione di Danielli per la tirosina, il triptofano e l'istidina; negativo alle reazioni di Chèvremont e Frédéricq e di Barnett e Seligman per i gruppi riducenti liberi delle proteine; positivo, solo quando raccolto in grandi ammassi, alla reazione di Weiss, Tsou e Seligman per le funzioni aminiche primarie,  $\epsilon$ -NH<sub>2</sub> della lisina,  $\delta$ -NH<sub>2</sub> della ornitina ed  $\alpha$ -NH<sub>2</sub> di aminoacidi terminali.

Cellule neurosecretorie di piccolo volume intensamente positive alle prime tre reazioni possono contenere o meno materiale Gomori-positivo;

4° il neurosecreto è positivo alle reazioni di Chèvremont e Frédéricq previa riduzione con tioglicolato di sodio (modif. di Adams, 1956), di Barnett e Seligman previa riduzione con tioglicolato di sodio e di Adams e Sloper per i gruppi disolfurici legati alle proteine: esso contiene quindi una rilevante quantità di cistina. Ciò è in accordo con quanto osservato dal Barnett (1954), dallo Sloper e da Howe e Pearse;

5° nell'ipotalamo di cane sono presenti due tipi di pigmento; uno contenuto nel citoplasma di numerose cellule gliali localizzate in prossimità delle pareti e del pavimento del terzo ventricolo; l'altro nel citoplasma di pochi neuroni del nucleo sopraottico e paraventricolare o di neuroni sparsi nella sostanza bianca interposta fra i due nuclei. Essi posseggono diverse caratteristiche istochimiche, ma entrambi sono di natura cromolipoidea.

È da notare che sia l'uno che l'altro tipo di pigmento si colorano con l'ematossilina cromica e la paraldeide-fucsina dei due metodi di Gomori, danno positiva la reazione di Chèvremont e Frédéricq anche senza previa riduzione con tioglicolato di sodio e si colorano intensamente con la tecnica Acido performico - Alcian blu di Adams e Sloper.

I risultati delle mie ricerche mi permettono dunque di escludere che il neurosecreto ipotalamo-ipofisario nel cane abbia i caratteri istochimici di un complesso glico-lipo-proteico come sostenuto dallo Schiebler.

Esso possiede, unicamente in modo netto, la proprietà istochimica di reagire positivamente ai metodi per i disolfuri legati alle proteine. Esso contiene quindi cistina, analogamente agli octapeptidi ciclici ad effetto anti-diuretico-vasopressorio ed ossitocico rappresentati secondo Du Vigneaud e coll. (1953, 1954) negli ormoni postipofisari.

Nonostante però che nella molecola di detti octapeptidi siano contenuti la tirosina ed un gruppo aminico primario non implicato in legami peptidici, il neurosecreto è risultato ai miei esami negativo alla reazione di Danielli

e positivo alla reazione di Weiss, Tsou e Seligman solo però quando è raccolto in grandi ammassi. Questi reperti suggeriscono l'idea che detti aggruppamenti chimici siano presenti nel materiale neurosecretorio o in concentrazione assai scarsa o in qualche modo mascherati.

Ho potuto infine stabilire che nell'ipotalamo di cane il neurosecreto non è il solo materiale colorabile con i due metodi di Gomori e positivo alle reazioni per i disolfuri: anche i pigmenti cromolipoidi posseggono tali caratteristiche. La positività dei cromolipoidi alle reazioni istochimiche per i gruppi disolfurici non è però probabilmente dovuta alla presenza di aggruppamenti -S-S- ma piuttosto di aggruppamenti chimici di natura diversa e non ancora perfettamente precisata. Questo fatto va tenuto in debita considerazione nel valutare i reperti offerti dalle reazioni per i disolfuri a livello di neuroni appartenenti ad altri distretti del sistema nervoso.

Il semplice rilievo dei dati morfologici non mi ha fornito una prova inconfutabile in favore della esistenza di una « via neurosecretoria » a direzione obbligata ipotalamo-ipofisaria come postulato da Scharrer B. ed E. Scharrer (1944), dal Palay (1945) e dal Bargmann.

**Anatomia.** — *Osservazioni comparative sulla struttura della corteccia cerebellare di mammiferi neonati* (\*). Nota di LUIGI CATTANEO, presentata (\*\*) dal Socio A. PENSA.

Intendo riassumere in questa Nota le differenze sostanziali rilevabili nella corteccia cerebellare di animali neonati che alla nascita non sono atti alla deambulazione, quale il gatto, rispetto a quella di animali che invece, già alla nascita, sanno camminare, quale la cavia. Tali differenze ho potuto dimostrare in preparati allestiti con vari metodi di impregnazione argentea, specialmente con il metodo della reazione nera del Golgi.

**GATTO NEONATO.** — Ciò che principalmente caratterizza la corteccia cerebellare del gatto neonato è il notevole spessore dello strato dei granuli esterni e, inoltre, lo stadio di sviluppo molto arretrato che ancora mostrano le cellule del Purkinje. Queste infatti presentano un corpo globoso od ovale dal cui polo periferico si stacca appena un abbozzo dendritico di forma grossolanamente triangolare con contorno frangiato e quasi senza ramificazioni; presentano invece bene evidente un neurite che emerge dal polo profondo del corpo cellulare.

Ciascun corpo delle cellule del Purkinje è circondato da un fitto e ben circoscritto intreccio di fibre; tali intrecci sono formati principalmente dalle

(\*) Lavoro eseguito nel Centro di studio del sistema nervoso della Università di Pavia, diretto dal prof. Antonio Pensa.

(\*\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

fibre rampicanti che, attraversato lo strato dei granuli interni e giunte in corrispondenza delle cellule del Purkinje, si dividono in molteplici e fini ramificazioni le quali si arrestano attorno ai pirenofori delle cellule del Purkinje, avvolgendoli.

Alla costituzione dei grovigli pericellulari in questione partecipano però anche le collaterali discendenti delle cellule stellate profonde che, come è noto, in un tempo successivo diventeranno la componente principale dei canestri pericellulari; infine ho notato che vi prendono parte anche quelle fibre parallele, provenienti dalla biforcazione dei neuriti dei granuli interni, che decorrono nella parte più profonda dello strato molecolare, attraversando i vari grovigli pericellulari che incontrano lungo il loro cammino.

CAVIA NEONATA. — La corteccia cerebellare della cavia neonata ha un aspetto già alquanto simile a quello proprio dello stadio adulto; diversifica da quella del gatto neonato per il fatto che lo strato dei granuli esterni è ridotto a sole tre o quattro file di elementi, mentre invece è più sviluppato lo strato dei granuli interni. Le cellule del Purkinje hanno poi un aspetto che si può ritenere definitivo, presentando esse ormai le spalliere dendritiche dispiegate pressoché nella loro interezza, a quasi tutto lo strato molecolare.

I corpi delle cellule del Purkinje sono liberi dall'avvolgimento delle ramificazioni delle fibre rampicanti, ormai invece abbarbicate ai dendriti ed alle loro ramificazioni: i pirenofori rimangono circondati quasi soltanto dalle ramificazioni delle collaterali discendenti dei neuriti delle cellule stellate profonde, formanti i canestri pericellulari.

I canestri che circondano i corpi delle cellule del Purkinje non sono singole entità indipendenti fra loro e dai plessi nervosi circostanti; al contrario, esse sono ampiamente connesse tra di loro per scambi abbondantissimi di fibre e, inoltre, sono affondati, con la loro parte profonda, nella zona più periferica della rete nervosa dello strato dei granuli, con la quale si continuano. L'intreccio nervoso che ne risulta è particolarmente fitto e vi si riscontrano anche fibre di altra origine, quali: i neuriti delle cellule del Purkinje, diretti in profondità, e le ramificazioni terminali delle loro collaterali retrograde; piccoli ciuffi di fini e corte fibrille che si staccano dalle fibre muschiose; le fibre rampicanti, che passano per raggiungere lo strato molecolare, e loro collaterali.

CONCLUSIONI. — Il raffronto comparativo tra la corteccia cerebellare del gatto neonato, il quale non è atto alla deambulazione, e quella della cavia neonata, animale che invece subito alla nascita è in grado di camminare, rivela le seguenti, fondamentali differenze:

1° Lo strato dei granuli esterni, nel gatto neonato, è molto alto, con grande ricchezza di elementi; al contrario, nella cavia neonata, è ridotto a poche file di cellule.

2° Le cellule del Purkinje, nel gatto neonato, sono ancora molto arretrate nel loro sviluppo, presentando una espansione dendritica appena abboz-

zata; nella cavia neonata, mostrano invece un aspetto definitivo, con spalliere dendritiche dispiegate pressoché nella loro interezza.

3° Le fibre rampicanti, nel gatto neonato, si arrestano con le loro ramificazioni attorno ai corpi delle cellule del Purkinje, formando plessi avvolgenti in unione con le collaterali discendenti dei neuriti delle cellule stellate profonde; esse contraggono quindi, con dette cellule, sinapsi neurosomatiche. Nella cavia neonata invece, le fibre rampicanti sono abbarbicate attorno ai dendriti delle cellule del Purkinje, contraendo quindi con queste sinapsi neurodendritiche. I corpi delle cellule del Purkinje sono, nella cavia neonata, avvolti dalle collaterali discendenti dei neuriti delle cellule stellate profonde, formanti i canestri; questi non appaiono però come entità distinte, ma essendo in continuità fra loro e con la rete nervosa dello strato dei granuli interni, si presentano come i punti nodali di un plesso che occupa lo strato dei corpi delle cellule del Purkinje, plesso che, pur essendo connesso ampiamente con quello dello strato molecolare, sembra piuttosto essere la parte più periferica della rete nervosa dello strato dei granuli interni.

È da notarsi che le differenze che si notano fra cavie e gattini neonati finiscono per annullarsi con l'accrescimento, quando i gattini acquistano facoltà deambulatorie. I rapporti e le connessioni diventano pressapoco uguali nelle due specie prese in considerazione.

Mi riservo di esporre in una Nota più estesa, oltre che ulteriori particolari, anche i riferimenti bibliografici.

**Embriologia.** — *La prima proliferazione corticale della gonade indifferenziata in embrioni di pollo sterilizzati con raggi gamma* (\*). Nota di GUGLIELMO MARIN, presentata (\*\*) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

In un lavoro precedente [1] ho cercato di risolvere le contraddizioni esistenti nella letteratura sui primi stadi della gonadogenesi nell'embrione di pollo. È noto che nei Vertebrati le gonadi fanno la loro comparsa già in uno stadio precoce dello sviluppo embrionale, sotto forma di due ispessimenti pari dell'epitelio celomatico in cui si annidano le cellule germinali. Questo primo abbozzo, detto *cresta genitale*, rimarrà a costituire la parte periferica, corticale, della gonade indifferenziata, mentre la parte centrale, midollare, si forma in un secondo tempo per immigrazione di cellule da altra sede. La gonade quindi si costituisce in due tempi, a cui corrispondono due regioni morfologicamente e topograficamente distinte e che hanno diversa origine e diverso significato funzionale. Il fatto che la gonade adulta, in ciascun sesso, derivi dallo sviluppo prevalente, se non esclusivo, di uno solo

(\*) Ricerca compiuta nell'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata dell'Università di Padova con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.



di questi territori, ha acuito l'interesse per l'origine, i rapporti reciproci, l'inizio dell'attività funzionale dei territori stessi, in quanto si è voluto attribuire ad essi, anche prima del differenziamento sessuale, una azione sessualizzante specifica.

L'origine del territorio midollare negli Uccelli è una questione da tempo controversa: Firket [2] l'attribuisce ad una prima proliferazione dell'epitelio corticale che avrebbe luogo durante il settimo giorno di incubazione; più recentemente Witschi [3] e la Dantchakoff [4] fanno derivare la medulla della gonade dal blastema mesonefrico, mentre Vannini [5] ne descrive la formazione al quinto giorno dallo stesso blastema che darà origine all'interrenale. Nel mio precedente lavoro [1] studiai con particolare attenzione la prima proliferazione corticale, giungendo ad una conclusione conciliativa sull'origine della medulla: essa cioè si formerebbe nella sua parte somatica all'epoca e con le modalità descritte da Vannini, mentre la prima proliferazione corticale avrebbe essenzialmente lo scopo di fornirle gli elementi germinali. Ammisi tuttavia che nel corso di questa proliferazione passassero nella medulla anche cellule somatiche, ma non potei stabilire se le immagini osservate fossero realmente immagini di proliferazione somatica o non piuttosto effetto del disordine creato nel cortex dalla moltiplicazione e migrazione in profondità dei gonociti. Il comportamento autonomo degli elementi somatici poteva esser apprezzato solo in assenza di cellule germinali. Bisognava cioè sterilizzare la gonade senza danneggiare o alterare comunque lo sviluppo del soma. A questo risultato diversi autori erano giunti, con scopi diversi dal mio, a mezzo di radiazioni ionizzanti: Dantschakoff e Lacassagne [6]; Wolff e Salzgeber [7] con i raggi X; Dulbecco [8] con i raggi gamma emessi dal radium.

Usai anch'io i raggi gamma del radium perché possono esser somministrati con intensità sufficientemente bassa per permettere uno sviluppo quasi normale degli embrioni. Le uova, incubate in termostato, furono aperte all'inizio del secondo giorno di incubazione; su ciascuna di esse fu disposto a circa 3 mm. dal blastoderma un ago di platino con parete di 0,5 mm. di spessore, contenente 1 mgr. di radium<sup>(1)</sup>. Fissazione degli embrioni in liquido di Sanfelice, inclusione in paraffina, sezione seriata in fette di 6 micron, colorazione con ematossilina-eosina. Maggiori particolari sulla tecnica e le dosi di radiazioni usate sono esposti in un'altra Nota dove vengono considerati alcuni effetti biologici della irradiazione [9].

Ottenni in questo modo otto embrioni completamente privi di cellule germinali (quelli in cui la sterilità risultò parziale furono scartati): tre di questi furono fissati all'età di 6 giorni di incubazione, due a 6 giorni e 5 ore e tre a 6 giorni e mezzo. Furono scelti questi stadi perché la proliferazione corticale ha luogo sempre tra la fine del sesto e la prima metà del settimo giorno di incubazione. Tutti gli embrioni avevano un grado di sviluppo

(1) Il radium mi fu gentilmente fornito dal prof. B. Bonomini, direttore del Reparto Radiologico della Clinica Chirurgica dell'Università di Padova.



somatico regolare per la loro età, ma mentre quattro erano perfettamente conformati, gli altri quattro presentavano note di celosomia, cioè tendenza più o meno spiccata dei visceri a far ernia entro il canale ombelicale rimasto ampio per imperfetta costituzione della parete addominale.

Le gonadi apparvero pressoché normali per forma, dimensioni, aspetto generale. Negli individui malformati risultarono alterati i loro rapporti cogli organi circostanti (trattandosi di malformazione che interessa sostanzialmente la posizione reciproca dei visceri); le gonadi stesse potevano presentare un aspetto lobato o una tendenza alla suddivisione in masse minori, ma queste anomalie compaiono con una certa frequenza anche in embrioni normali.

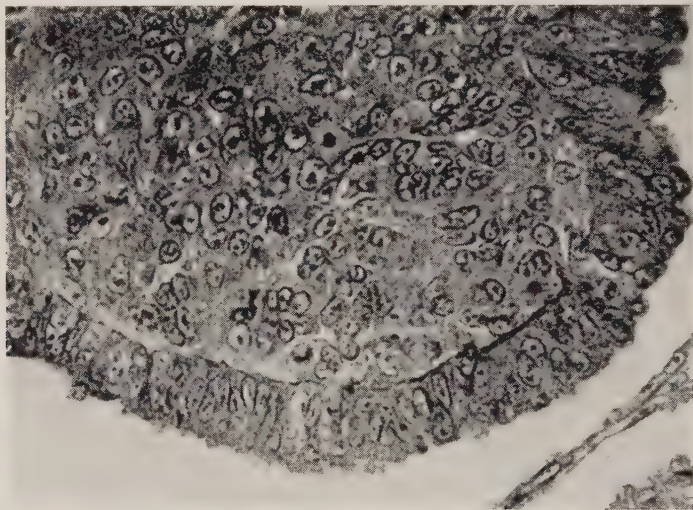


Fig. 1. - Embrione sterile a 6 giorni di incub.  
Gonade sinistra. 580  $\times$ .

Negli esemplari di 6 giorni il cortex è perlopiù ben distinto dalla medulla per la presenza di una linea di demarcazione molto netta e regolare, e conserva quasi sempre uno spessore uniforme e una struttura a palizzata caratteristica (fig. 1). Solo occasionalmente possono osservarsi modesti focolai di proliferazione: ivi il limite fra i due territori è indistinto per breve tratto e si notano cellule corticali allungate singole o in piccoli gruppi che sembrano insinuarsi nella compagine dei cordoni midollari (fig. 2). Quando queste immagini sono più accentuate, anche la struttura del cortex può perdere in quel punto la sua regolarità.

Gli embrioni di 6 giorni e 5 ore ripetono il quadro descritto per i precedenti; uno dei due esemplari osservati presenta tuttavia immagini di proliferazione corticale più numerose ed estese. È interessante notare che in genere l'attività proliferativa appare più intensa nel lato mediale della gonade, come cioè negli embrioni normali, che quivi presentano pure un maggior addensamento di gonociti.

Negli esemplari di 6 giorni e mezzo le gonadi sono sensibilmente più grosse e il loro aspetto non è uniforme nei tre casi. In un caso sono molto simili alle precedenti: offrono un quadro di quasi completo riposo con rari e modesti focolai proliferativi corticali. In un altro caso il cortex è in attiva proliferazione: il limite profondo è conservato solo per brevi tratti e la struttura a palizzata perlopiù sconvolta, con frequentissime immagini di cellule allungate che si spingono fra gli elementi della medulla (figg. 3 e 4). Su tutta la sezione della gonade si osservano numerose mitosi; quelle presenti nella medulla indicano come essa si stia accrescendo anche in maniera autonoma, per moltiplicazione dei propri elementi, e non solo per apposizione di cellule di provenienza corticale. Il terzo embrione di 6 giorni e mezzo pre-

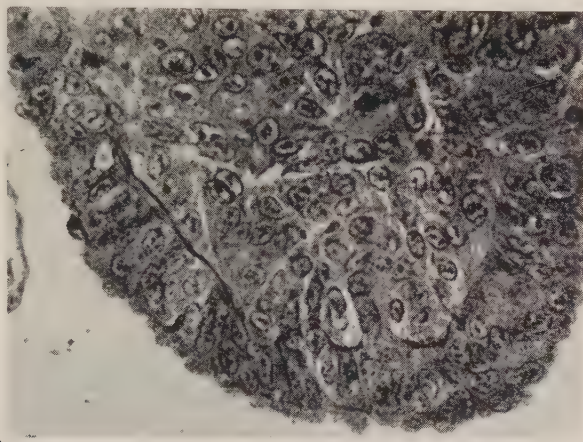


Fig. 2. — Embrione sterile a 6 giorni di incub.  
Gonade sinistra, 580  $\times$ .

senta gonadi con caratteristiche intermedie a quelle degli altri due, cioè immagini di proliferazione corticale di media intensità.

In conclusione il quadro presentato dalla gonade sterile ripete esattamente quello osservabile nella gonade normale: una proliferazione di cellule somatiche singole (non a cordoni) che raggiunge la sua massima intensità verso la metà del settimo giorno. Anche in assenza di gonociti permangono quelle stesse immagini che nella gonade normale potevano esser interpretate come effetto della moltiplicazione e migrazione in profondità dei goni. Si può quindi affermare l'esistenza di una proliferazione somatica autonoma, dovuta ad attività primitiva del cortex, che si svolge contemporaneamente a quella degli elementi germinali. Questo fatto conferma l'autonomia del substrato somatico, il quale segue una sua evoluzione non influenzato dagli elementi germinali; inoltre toglie valore all'ipotesi di una migrazione autonoma dei gonociti dal cortex alla medulla, e suggerisce invece il loro trasporto passivo da parte degli elementi somatici proliferanti.

D'altra parte, prima del differenziamento sessuale cortex e medulla non esercitano sui goni alcuna azione differenziatrice, per cui essi stessi

possono considerarsi fino a quello stadio sessualmente indifferenziati. La proliferazione del cortex non deve esser quindi necessariamente considerata espressione di una modificazione nell'equilibrio delle valenze sessuali.



Fig. 3. - Embrione sterile a 6 giorni e mezzo di incub.  
Gonade sinistra. 580  $\times$ .

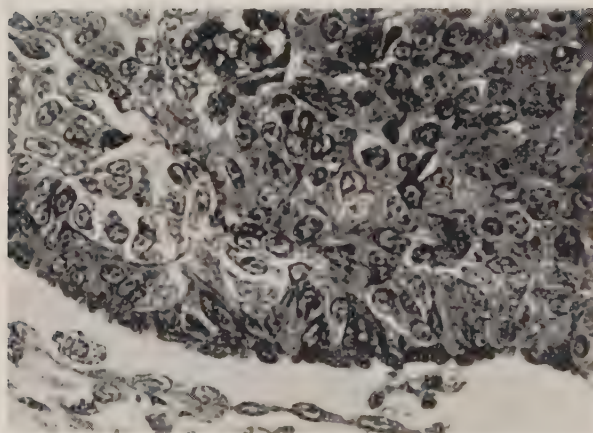


Fig. 4. - Embrione sterile a 6 giorni e mezzo di incub.  
Particolare della gonade sinistra. 580  $\times$ .

Se vogliamo perciò tentare un'interpretazione della prima proliferazione corticale, possiamo considerare il fenomeno come un'attività del substrato somatico del cortex necessaria a veicolare i gonociti da un territorio all'altro; si tratterebbe inoltre di un processo morfogenetico indipendente dall'equilibrio dei fattori di mascolinità e femminilità, che interessa i due territori gonadici quando essi sono ancora sessualmente indifferenziati.



## OPERE CITATE.

- [1] G. MARIN, *Osservazioni sulla gonadogenesi e sul differenziamento sessuale nell'embrione di pollo*, « Arch. It. Anat. Embriol. », vol. LXI fasc. 1 (1956).
- [2] J. FIRKET, *Recherches sur l'organogenèse des glandes sexuelles chez les oiseaux*. « Arch. de Biol. », T. XXIX (1914).
- [3] E. WITSCHI, *Origin of asymmetry in the reproductive system of birds*. « Am. Journ. Anat. », vol. LVI (1935).
- [4] V. DANTCHAKOFF, *Le devenir du sexe*. « Act. Scient. Ind. », Hermann, Paris (1933).
- [5] E. VANNINI, *Sull'origine interrenale del tessuto midollare della gonade nell'embrione di pollo*. « Atti R. Accad. d'Italia », Memorie Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., vol. XIV (1942).
- [6] V. DANTSCHAKOFF e A. LACASSAGNE, *Sterilisation par les rayons X de l'ébauche gonadique du Poulet. Ses effets sur le développement de la gonade*. « C. R. Soc. de Biol. », vol. 109 (1932).
- [7] ET. WOLFF e B. SALZGEBER, *Sur un nouveau procédé permettant d'obtenir l'intersexualité expérimentale chez l'embryon d'oiseau: l'irradiation des gonades embryonnaires à l'aide des rayons X* « C. R. Soc. de Biol. », vol. 143 (1949).
- [8] R. DULBECCO, *Azione dei raggi gamma del radio sullo sviluppo della gonade e sui caratteri somatici del sesso nell'embrione di pollo*. « Atti Acc. Naz. Lincei », Mem. Sc. fis. mat. nat., Serie VIII, vol. II, sez. III, fasc. I (1948).
- [9] G. MARIN, *Sviluppo e differenziamento sessuale di embrioni di pollo irradiati con raggi gamma*. « Boll. di Zool. » (in corso di pubblicazione).

**Patologia.** — *Sulla biosintesi indotta di penicillinasi in spore batteriche nel corso del germogliamento* (\*). Nota di GIUSEPPE PONTIERI e GIUSEPPE FALCONE, presentata (\*\*) dal Socio L. CALIFANO.

Nel processo di germinazione delle spore batteriche si possono distinguere quattro fasi (Knaysi, 1951): nella prima, in cui si nota la comparsa di una zona translucida nell'interno, la cellula diventa permeabile ai coloranti, perde la resistenza al calore e si rigonfia; nella seconda si ha rottura equatoriale o polare del rivestimento della spora; la terza e la quarta fase sono, infine, rispettivamente caratterizzate dalla liberazione della nuova forma bacillare e dallo sviluppo di questa.

Rapida germinazione delle spore batteriche può essere ottenuta aggiungendo ad una sospensione acquosa di spore piccole quantità di aminoacidi, zuccheri, derivati degli acidi nucleinici o di altre sostanze. In questi casi, la germinazione, svelabile in base alla perdita della resistenza al calore, non va oltre la prima delle fasi descritte da Knaysi in quanto, perché possa avvenire la trasformazione di esse in forme vegetative, è necessaria la presenza di sali inorganici, aminoacidi e glucosio (Hachisuka et al., 1955) o di un terreno naturale (Fitz-James, 1955).

(\*) Lavoro svolto nell'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Napoli.

(\*\*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

L'efficacia delle sostanze stimolanti la prima fase della germinazione è differente nelle diverse specie, così ad esempio, mentre per la germinazione delle spore di *B. subtilis* basta la sola L-alanina (Hills, 1950), per quella di *B. cereus* sono necessarie, oltre a questo aminoacido, anche la L-tirosina e la adenosina (Hills, 1950; Powell et al., 1955).

Mentre è noto che nelle spore sono presenti enzimi proteolitici (Levinson et al. 1953), una alaninoracemasi (Stewart et al., 1953), una nucleotidasi ed una nucleosidasi (Lawrence, 1955 a, 1955 b), e si effettua ossidazione del glucosio (Church et al., 1955, 1956) non ci sono indagini sulla gradualità della comparsa, durante il germogliamento, di attività enzimatiche assenti o almeno non svelabili nelle spore. È noto però che, durante la germinazione, le capacità ossidative di spore di *B. megatherium* aumentano progressivamente (Levinson et al., 1953, 1955, 1956).

Le ricerche di Fitz-James lasciano supporre che nelle spore in via di germinazione, la sintesi di acido ribonucleinico, prosegue di pari passo con la sintesi proteica. Ciò potrebbe spiegare il rapido aumento delle attività enzimatiche delle spore in via di germinazione (Amaha et al., 1952; Levinson et al., 1953, 1955, 1956; Hachisuka et al., 1956) sia che la sintesi di nuovo materiale enzimatico avvenga a spese del pool interno di aminoacidi, anche se nelle spore molto scarso, (Nahada et al., 1956) o di una sorgente esogena di azoto. Questa ipotesi viene suffragata dal fatto che alcuni analoghi degli aminoacidi inibiscono la germinazione (Nahada et al., 1956).

Pollock (1953) per primo ha dimostrato la formazione di un enzima di adattamento nelle spore. Spore provenienti da cellule di *B. cereus*, formanti penicillinasi adattativa, contengono questo enzima mentre le spore formate da cellule non adattate sono incapaci di sintetizzarlo. D'altro canto, quando le spore vengono messe in un terreno naturale di cultura, contenente penicillina, la biosintesi dell'enzima relativo ha luogo prima ancora che si abbia la comparsa di forme vegetative.

Da queste ricerche, però, non risulta chiaro se la sintesi adattativa si effettui a spese del pool di aminoacidi delle spore germoglianti oppure per utilizzazione degli aminoacidi del terreno. È noto, infatti, che per la formazione degli enzimi di adattamento non è sufficiente la sola presenza dell'induttore nel mezzo; altrettanto necessari sono la utilizzazione del pool di aminoacidi o di una sorgente esogena di azoto (Stainer, 1951; Monod, 1942; Spiegelman et al., 1953).

Il problema della presente ricerca è quello di chiarire se la sintesi adattativa si effettui a spese del solo pool di aminoacidi della spora germogliante o se è necessario un apporto di azoto esogeno.

A tale scopo si sono usate spore germoglianti in terreno sintetico, spore cioè che si trovano nella prima fase di Knaysi ed in cui i processi della biosintesi indotta sono indipendenti dall'ulteriore evoluzione e sviluppo. In tali condizioni la spora, divenuta permeabile, permette la penetrazione dell'induttore e va incontro a modificazioni chimiche notevolissime (eliminazione di aminoacidi e di un peptide) indicanti degradazione delle pro-



teine della spora con conseguente formazione delle nuove molecole proteiche.

L'uso del terreno sintetico costituito da L-alanina, L-tirosina ed adenosina, ed il suo allontanamento prima dell'aggiunta dell'induttore, ci hanno permesso di escludere la possibilità che nella biosintesi della penicillinasi venga adoperata una sorgente esogena di azoto. I risultati riportati nella fig. 1 dimostrano che dopo un periodo di lag si ha nelle spore germoglianti un aumento progressivo della produzione di penicillinasi quando l'induttore è presente nel terreno. Se poi l'induttore è aggiunto dopo allontanamento del terreno, la sintesi di penicillinasi presenta andamento analogo.

Nahada e collaboratori (1956) hanno dimostrato l'esistenza di un pool di aminoacidi molto basso nelle spore quiescenti. Durante la germinazione, in cui si ha liberazione di aminoacidi e di un peptide, tale pool verosimilmente si accresce, e, dalle nostre ricerche risulta che esso diventa sufficiente a fornire molecole necessarie per la sintesi della molecola della penicillinasi.

La formazione di un enzima adattativo, infatti, non deve essere riguardata come la trasformazione di una molecola dallo stato inattivo a quello attivo (Spiegelman et al., 1953), sia perché è necessaria una sorgente di energia, sia perché risulta impossibile, ed in qualche solo caso difficile, la sintesi contemporanea di due enzimi adattativi, metabolicamente non correlati. Il fenomeno della diauxia messo in evidenza da Monod offre la più chiara prova dell'impossibilità della sintesi contemporanea di due enzimi e dimostra una stretta interazione tra i sistemi precursori degli enzimi.

Spiegelman ed Halvorson (1953) hanno osservato inoltre che la diminuzione del pool di aminoacidi nelle cellule di lievito effettuata facendo metabolizzare glucosio in assenza di azoto, causa diminuzione della capacità a sintetizzare enzima adattativo in maniera proporzionale al grado di im-

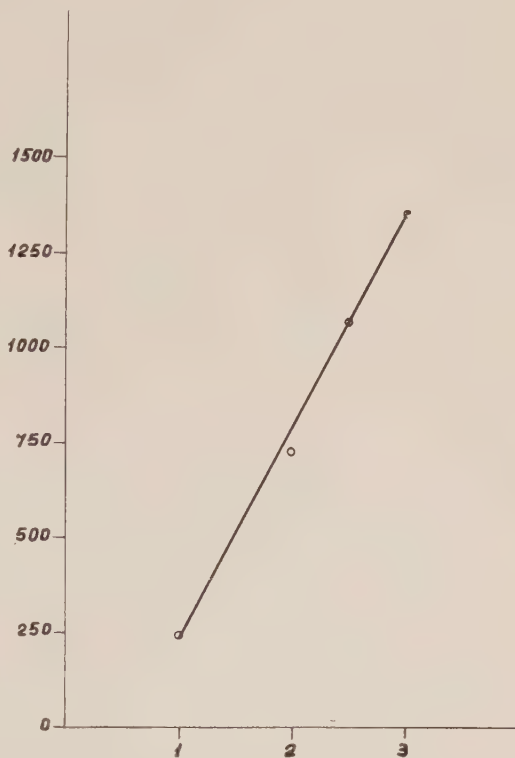


Fig. 1. — Biosintesi indotta di penicillinasi in spore di *B. cereus* (30 mg/ml) incubate a 37° C in terreno di germogliamento in presenza di penicillina (10.000 U. I./ml).

Sulle ordinate le U. I. di penicillina/ml idrolizzate in acido penicilloico. Sulle ascisse il tempo in ore.

verimento del pool. Per contro la ricostituzione di questo che si effettua già dopo 15 m' di permanenza delle cellule affamate in terreno con idrolizzato di caseina, restaura la capacità perduta.

#### PARTE SPERIMENTALE.

*Microorganismo:* *B. cereus* nr. 201 della collezione dell'Istituto di Patologia generale dell'Università di Napoli.

*Terreno di sviluppo:* Aspariginato di sodio gr. 1; glucosio gr. 1;  $\text{MgSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  gr. 0,2;  $(\text{NH}_4) \text{H}_2\text{PO}_4$  gr. 1,5;  $\text{CaCl}_2$  gr. 0,1;  $\text{KCl}$  gr. 0,1;  $\text{FeCl}_3$  tracce; agar gr. 20;  $\text{H}_2\text{O}$  fino a 1000 ml. (Howie et al., 1940). A questo terreno si aggiungeva « casamino acid » della Difco in concentrazione del 0,5 % secondo quanto consiglia Fitz-James (1954). Culture di 7 giorni di sviluppo a 37°C. venivano tenute a + 2°C. per altri 5 giorni; si otteneva così una sporificazione pressoché completa.

*Sospensione delle spore:* le spore sono state raccolte in acqua distillata, lavate sei volte alla centrifuga a + 2°C e quindi liofilizzate. Prima delle prove le spore sono state lavate tre volte con acqua distillata, previo riscaldamento a 60°C per un'ora.

*Terreno di germogliamento:* mg. 300 di spore sono state sospese in 10 ml. di un terreno della seguente composizione: L-alanina 0,05 M; L-tirosina 0,005 M; adenosina 0,002 M in puffer di fosfati 0,0067 M a pH 7,2. In tale terreno si avvera germinazione in proporzione dell'85-95 %.

*Produzione della penicillinasi:* sono state condotte due serie di esperimenti: in una, penicillina G sodica (10.000 U. I./ml) è stata aggiunta contemporaneamente a glucosio (0,33 M) ad una sospensione di spore nel terreno di germinazione dopo che questa era stata tenuta per 30 m' a 37°C. Nella seconda serie di esperimenti, le spore dopo 30 m' di permanenza a 37°C nel terreno sintetico, venivano lavate due volte con acqua distillata e risospese in puffer di fosfati 0,0067 M a pH 7,2, contenente glucosio 0,33 M. A tale sospensione veniva aggiunta penicillina (10.000 U. I./ml.).

In ogni esperimento sono state eseguite prove coll'aggiunta alla sospensione di spore di azide di sodio in concentrazione 0,001 M al fine di inibire la biosintesi indotta.

L'assenza di penicillinasi come enzima costitutivo nelle forme vegetative è stata previamente controllata.

*Misura dell'attività penicillinasi:* la produzione dell'enzima è stata misurata col metodo di Tucker (1954).

#### BIBLIOGRAFIA.

- AMAH M. and SAGAGUCHI K., « J. Agr. Chem. Soc. Japan », 26, 353 (1952).  
CHURCH B. D. and HALVORSON H., « Bacteriol. Proc. », 41 (1955).  
CHURCH B. D. and HALVORSON H., « Bacteriol. Proc. », 45 (1956).  
FITZ-JAMES P. C., « Bioch. Bioph. Acta », 14, 346 (1954).  
FITZ-JAMES P. C., « Canad. J. Microbiol. », 1, 525 (1955).

- HACHISUKA Y., KATO N. and KUNO T., «Chem. Abstr.», 48, 12887 (1954).  
 HACHISUKA Y., ASANO N., KANEKO M. and KANBE T., «Science», 124, 174 (1956).  
 HILLS G. M., «J. Gen. Microbiol.», 4, 38 (1950).  
 HOWIE J. W. and CRUIKSHANK J., «J. Path. Bacteriol.», 2, 234 (1940).  
 KNAYSIG G., *Elements of bacterial cytology*, Comstock Publishing Co. Inc. Ithaca, N. Y.  
 LAWRENCE N. L., «J. Bacteriol.», 70, 577 (1955).  
 LAWRENCE N. L., «J. Bacteriol.», 70, 583 (1955).  
 LEVINSON H. S. and SEVAG M. G., «J. Gen. Microbiol.», 36, 617 (1953).  
 LEVINSON H. S. and SEVAG M. G., «J. Bacteriol.», 67, 615 (1954).  
 LEVINSON H. S. and HYATT M. T., «J. Bacteriol.», 70, 368 (1955).  
 LEVINSON H. S. and HYATT M. T., «J. Bacteriol.», 72, 176 (1956).  
 MONOD J., *Recherches sur la croissance des cultures bactériennes*, Actualités scientifiques et industrielles, No 911, Paris, Hermann et Cie., 1942.  
 NAHADA D., MATSURHIRO A. and MIWATANI T., «Med. J. Osaka Univ.», 6, 1047, (1956).  
 POLLOCK M. R., «J. Gen. Microbiol.», 8, 186 (1953).  
 POWELL J. F. and HUNTER J. R., «J. Gen. Microbiol.», 13, 59 (1955).  
 STAINER R. Y., «Ann. Rev. Microbiol.», 5, 35 (1951).  
 STEWART B. T. and HALVORSON H. O., «J. Bacteriol.», 65, 160 (1953).  
 SPIEGELMAN S. and HALVORSON H. O., *Adaptation in Micro-organisms*. Third Symposium of the Society for General Microbiology, University Press, Cambridge, 1953.  
 TUCKER R. G., «Nature», 173, 85 (1954).

**Biologia.** — *Influenza dell'ormone tiroideo sull'attività mitotica del romboencefalo di un Anfibio anuro*. Nota (\*) di GIORGIO M. BAFFONI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

In una precedente Nota ho riferito sull'andamento dell'attività mitotica dello strato ventricolare nel romboencefalo di un Anfibio anuro (*Bufo*) durante il periodo larvale (1); da tali osservazioni è risultato che nella parte più craniale del romboencefalo l'attività mitotica dello strato ventricolare (germinale) persiste fino ad un mese dopo la metamorfosi; inoltre che essa è costantemente più elevata nella porzione dorsale (piastra alare) che in quella ventrale (piastra basale); ed infine che durante la seconda metà di vita larvale nella piastra alare si verifica un notevole aumento dell'attività proliferativa, in stretto rapporto con la formazione delle cellule nervose che si differenziano nell'abbozzo impari dorsale del cervelletto e, con un certo ritardo, si osserva una lieve accentuazione nella piastra basale, che è stata ritenuta dovuta alla formazione dei centri motori che si differenziano alla metamorfosi, analogamente a quanto dimostrato per i centri sensitivi dell'VIII paio di nervi cranici da Stefanelli e Zacchei (2).

(\*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata «G. B. Grassi» dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

(1) G. M. BAFFONI e E. ELIA, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (s. VIII), 22, p. 109 (1957).

(2) A. STEFANELLI e A. M. ZACCHEI, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (s. VIII), 7, p. 358 (1949).

Nell'intento di precisare le eventuali relazioni tra lo sviluppo dell'abbozzo cerebellare e le modificazioni dei centri funzionalmente connessi con il cervelletto, ho eseguito osservazioni sull'andamento mitotico e sul differenziamento dell'area somato-sensitiva del midollo spinale (da cui si formano le vie spino-cerebellari) ed esperienze con ormone tiroideo onde cogliere gli eventuali rapporti tra lo sviluppo del cervelletto e quello dei centri che si formano dall'attività proliferativa della piastra basale del romboencefalo.

In questa Nota riferisco le osservazioni sugli effetti della tiroxina nello sviluppo del romboencefalo.

Ricordo che la somministrazione di ormone tiroideo a larve di Anfibi anuri anticipa i processi della metamorfosi (Gudernatsch<sup>(3)</sup>) e che negli animali trattati, specie se con forte dose di ormone, l'esaltazione del metabolismo cellulare accelera i processi del differenziamento; l'esaltazione della attività metabolica coinvolge tutte le cellule, ma poiché ogni diverso tipo di esse ha un determinato ritmo di differenziamento, si ritiene che l'accelerazione dello sviluppo in alcuni organi sia maggiore che in altri e che pertanto insorgano quelle tipiche «disarmonie» (Cotronei<sup>(4)</sup>) che compromettono la sopravvivenza degli animali trattati; infatti questi, dopo aver emesso un rudimentale arto anteriore, in genere non procedono oltre nelle modificazioni metamorfiche e muoiono.

Champy, che per primo si è interessato dell'influenza della tiroxina sul ritmo mitotico dei vari organi in un Anfibio anuro (*Rana temporaria*)<sup>(5)</sup>, ha constatato che nell'ora serrata della retina l'attività mitotica aumenta nei primi tre giorni di trattamento, quindi resta costante (formazione di un *plateau* nella curva) ed infine decresce. Più di recente Weiss e Rossetti<sup>(6)</sup> hanno osservato che nella zona attigua a frammenti di agar impregnati con colesterolo-tiroxina e trapiantati nel mielencefalo di *Rana* le mitosi aumentano nei primi tre giorni dall'operazione, ma subito dopo diminuiscono.

Al fine di avere una valutazione comparativa, ho scelto come oggetto delle esperienze lo stesso Anfibio anuro (*Bufo bufo* L.) che avevo utilizzato per seguire l'andamento dell'attività proliferativa nello strato ventricolare del romboencefalo durante lo sviluppo larvale<sup>(7)</sup>. Un lotto di girini, provenienti da uova deposte dalla stessa femmina, all'inizio del periodo larvale (tuorlo riassorbito e con abbozzo di arti posteriori = stadio III secondo Taylor e Kollros<sup>(7)</sup>), è stato allevato in acqua contenente dosi elevate di ormone (tiroxina *Roche* alla concentrazione di  $5 \cdot 10^{-7}$ ); la scelta

(3) I. F. GUDERNATSCH, « Arch. Entw.-Mech. », 35, p. 457 (1912).

(4) G. COTRONEI, « Bios » (Genova), 2, p. 27 (1913); « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. V), 25, p. 48 (1916).

(5) Ch. CHAMPY, « Arch. Morphol. Gén. Expér. » (Paris), n. 4, p. 1 (1922).

(6) P. WEISS e F. ROSSETTI, « Proc. Nat. Acad. Sci. », 37, p. 540 (1951).

(7) Per praticità ho preferito attenermi alla classificazione di A. C. TAYLOR e J. J. KOLLROS in *Rana pipiens* (« Anat. Rec. », 94, p. 7, 1946), invece che alla seriazione di R. CAMBAR e J. D. GIPOULOUX in *Bufo bufo* (« Bull. Biol. France-Belgique », 90, p. 198, 1956).



dello stadio e della dose sono motivati dal fatto, messo in luce da Cotronei <sup>(8)</sup>, che l'effetto dell'ormone tiroideo è tanto maggiore quanto più precocemente inizia il trattamento e più forte è la dose. Dopo cinque giorni di trattamento, gli animali in esperienza presentavano la pinna codale ridotta e la perforazione opercolare da cui fuoriusciva l'arto anteriore sinistro, ed inoltre manifestavano profonde disarmonie (fig. 1): infatti gli arti posteriori e l'arto anteriore sinistro, nonostante che la forma del capo ricordasse molto quella dell'animale metamorfosato, presentavano un aspetto rudimentale, sotto certi riguardi simile a quello di larve tra stadio VII e VIII; l'aspetto e lo sviluppo delle vescicole encefaliche, inoltre erano dissimili sia dai controlli a pari età che dagli animali in metamorfosi (fig. 2).

Gli animali sono stati fissati a varie epoche del trattamento (1, 2, 3 e 5 giorni), cinque per volta, in liquido di Sanfelice ed inclusi in celloidina-paraffina; i pezzi inclusi sono stati sezionati trasversalmente in serie di  $7\mu$  di spessore e trattati con il reattivo di Schiff secondo il metodo di Feulgen-Rossembeck standardizzato da Stowell <sup>(9)</sup>. In almeno due degli individui meglio orientati, oltre ai computi delle mitosi, separatamente per la piastra alare e per la piastra basale, sono state calcolate con gli usuali metodi <sup>(1,10)</sup> le densità mitotiche (numero di mitosi nell'unità di superficie =  $10.000\mu^2$ ) al fine di poter comparare i dati con quelli ricavati dall'osservazione eseguita durante il normale sviluppo larvale.



Fig. 1. — Aspetto delle larve di *Bufo* dopo 5 giorni di trattamento con tiroxina.

Negli animali al termine del trattamento con ormone tiroideo, l'aspetto del romboencefalo è dissimile da quello dei controlli a pari età (stadio IV) e degli stessi animali in metamorfosi (st. XX): esso ventralmente è più alto, contiene un numero molto maggiore di elementi ed uno strato di sostanza bianca più spesso (fig. 2), ma le maggiori differenze morfologiche si osservano nella parte dorsale; infatti le labbra romboidali non sono fuse, come avviene allo stadio IX nello sviluppo normale, ma si presentano come due cercini massicci costituiti da elementi indifferenziati (fig. 2).

Tali osservazioni confermano, estendendole al sistema nervoso, che l'accelerazione e l'anticipazione degli eventi della metamorfosi provocano disarmonie che si manifestano in una minor compiutezza di sviluppo degli apparati o delle loro parti; nel caso in esame, il mancato compiersi della morfogenesi cerebellare va imputato alla rapida accelerazione mitotica, provocata dall'ormone tiroideo, che impedisce il conseguimento di quell'armonia di sviluppo che esige un periodo di tempo molto più lungo.

(8) G. COTRONEI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. V), 23, p. 453 e 519 (1914); « Arch. Ital. de Biol. », 61, p. 305 (1914).

(9) R. E. STOWELL, « Stain Technol. », 20, p. 45 (1945).

(10) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), 23, p. 90 (1957).



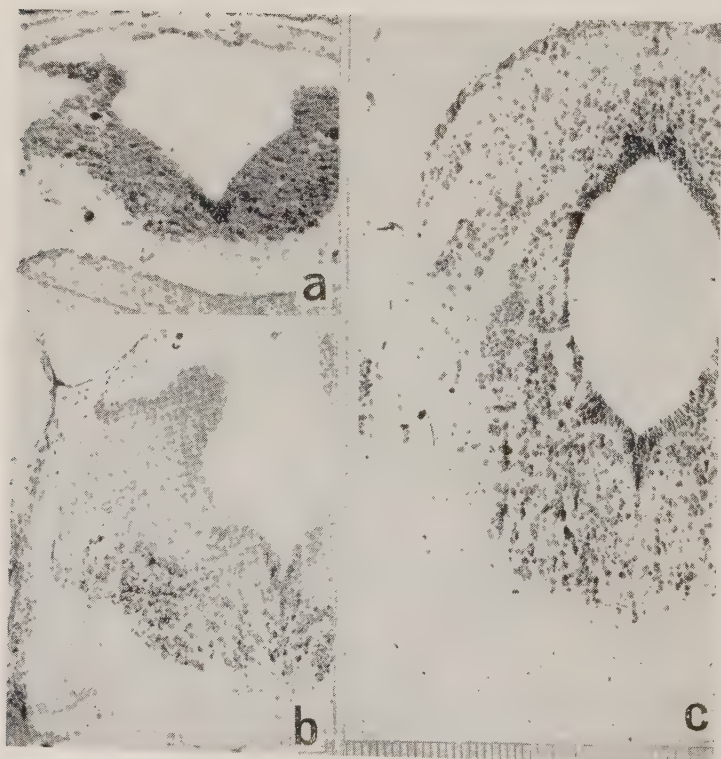
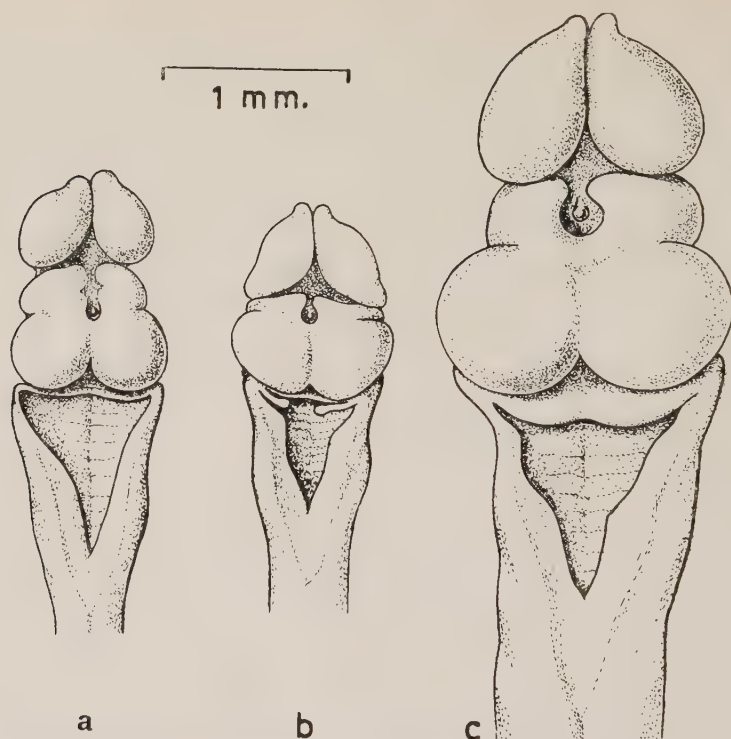


Fig. 2. - Disegni alla camera lucida di encefali e microfotografie al livello del metencefalo in larve di *Bufo* trattate con tiroxina (b), rispetto ai controlli a pari età (a) ed in metamorfosi (c). (Ogni intervallo della scala delle microfotografie = 10  $\mu$ ).

TABELLA.

	PIASTRA ALARE			PIASTRA BASALE		
	n. mitosi	area	Densità	n. mitosi	area	Densità
Dopo 1 giorno . . .	19	2,35 dmm <sup>2</sup>	8,08	9	2,08 dmm <sup>2</sup>	4,32
Dopo 2 giorni . . .	46	2,87 »	16,03	14,5	2,25 »	6,44
Dopo 3 giorni . . .	93,5	3,91 »	23,97	35	3,30 »	10,57
Dopo 5 giorni . . .	43	3,90 »	11,14	20,6	2,92 »	7,01
A pari età (St. III-IV)	22	3,80 »	5,8	7	2,45 »	2,85
A pari stadio (St. XX)	75	3,30 »	23,0	20	5,20 »	3,84

Per quanto riguarda l'attività proliferativa (ved. tabella e fig. 3), va osservato che dopo un giorno di trattamento si verifica un incremento mitotico, che però non è statisticamente significativo rispetto ai controlli non trattati ( $P = 12-7\%$ ); un deciso aumento della densità mitotica si osserva invece dopo due giorni e maggiormente al terzo giorno; al termine del trattamento (dopo cinque giorni) l'attività è in declino.

La curva (fig. 3) che raffigura l'andamento della densità mitotica nello strato ventricolare del romboencefalo di *Bufo* trattati con tiroxina, differisce da quelle osservate negli organi della condizione terrestre (cioè la pelle, gli abbozzi degli arti e l'intestino, che presentano un progressivo aumento dell'attività mitotica<sup>(5)</sup>), ma per certi aspetti concorda con quella riscontrata nell'ora serrata della retina<sup>(5)</sup>: infatti ambedue presentano gli stessi caratteri delle curve di accrescimento di culture di microrganismi in mezzo limitato (Buchanan<sup>(11)</sup>) e di cellule in culture *in vitro* non rinnovate; anche in questo caso l'esaurimento dell'attività proliferativa va imputata a difetto di materiale nutritivo che, secondo Cotronei<sup>(12)</sup>, provoca il blocco dell'accrescimento e la condizione disarmonica della metamorfosi. In *Bufo* manca il plateau osservato da Champy in *Rana*; poiché neppure le osservazioni di Weiss e Rossetti<sup>(6)</sup> compiute nel mielencefalo di *Rana* hanno riscontrato il plateau, la differenza deve essere ritenuta piuttosto espressione di diversa reattività regionale del tessuto nervoso che effetto della diversa velocità con cui si realizzano le modificazioni provocate dall'ormone tiroideo nei due Anfibi (dopo 8 giorni in *Rana* e dopo 5 in *Bufo*).

Considerando l'attività mitotica separatamente nelle due piastre, risulta che i valori più elevati si verificano nella piastra alare: infatti al terzo giorno

(11) R. E. BUCHANAN, « Journ. Inf. Dis. », 23, p. 109 (1918).

(12) G. COTRONEI, « Mem. Soc. Ital. Sci. dei XL » (s. III), 21, p. 1 (1919).

di trattamento essi sono pari a quelli dei controlli a pari stadio (st. XX: perforazione opercolare del 1° arto anteriore); i valori della piastra basale, invece, pur non raggiungendo quelli della piastra alare, dopo tre giorni superano ogni altro valore osservato durante il normale sviluppo nei girini di controllo <sup>(1)</sup>.

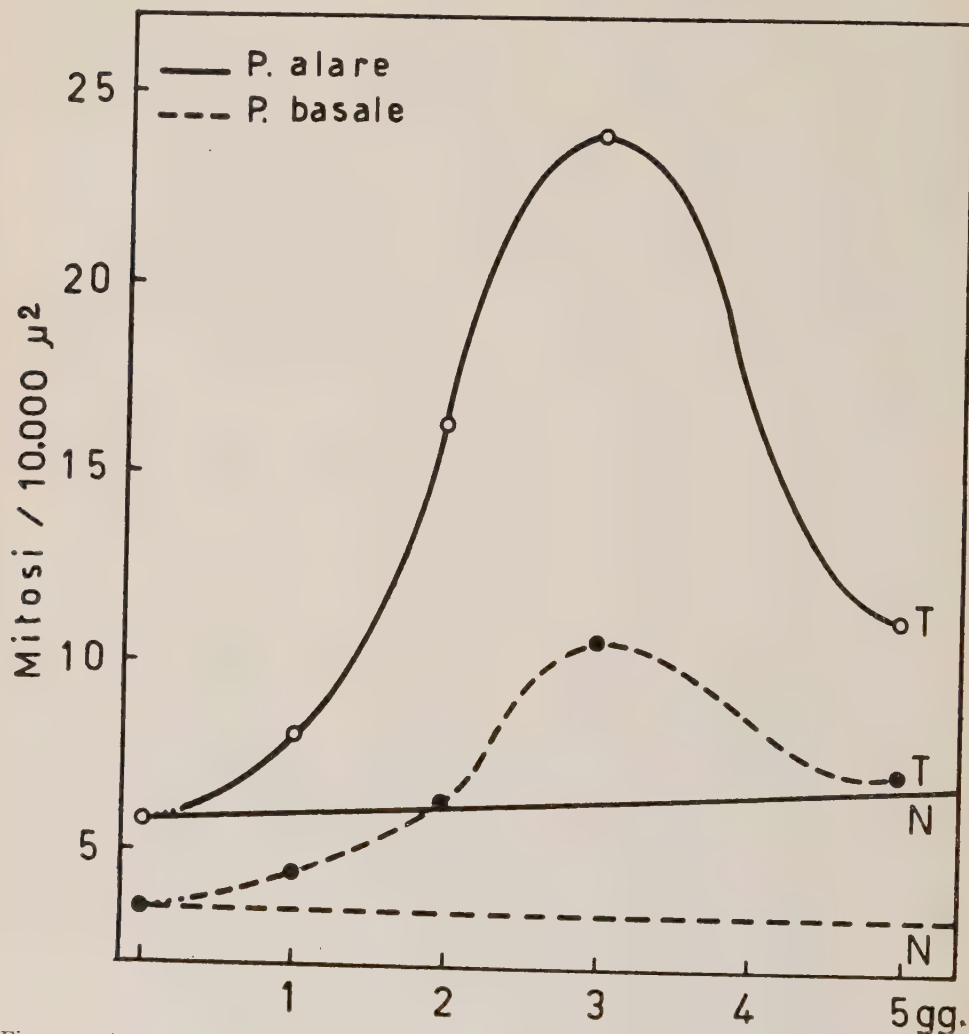


Fig. 3. - Andamento dell'attività mitotica nello strato ventricolare del romboencefalo di *Bufo bufo* trattati con tiroxina (T) e di controlli a pari età (N).

Poiché il ritmo proliferativo non si accentua con la stessa intensità nelle due porzioni del romboencefalo, viene confermato che l'ormone tiroideo non esalta uniformemente l'attività metabolica, e quindi anche il ritmo mitotico, ma che nel neurasse vi sono zone più sensibili (piastra basale del romboencefalo) e zone meno sensibili (piastra alare); ciò emerge ancor più chiaramente da osservazioni, che mi riprometto di documentare in futuro, sul midollo spinale, dove per azione della tiroxina l'attività proliferativa si accentua solo in zone circoscritte (al livello delle future intumescenze) e con un diverso

andamento nella porzione motoria (nella piastra basale raggiunge il massimo al secondo giorno) ed in quella sensitiva (nella piastra alare raggiunge il massimo al terzo giorno).

Inoltre i risultati della presente ricerca, che sostanzialmente concordano con quelli ricavati da Champy nell'*ora serrata* della retina <sup>(5)</sup>, dimostrano che l'ormone tiroideo accelera non soltanto i processi del differenziamento cellulare provocando una precoce senescenza cellulare, ma anche il ritmo mitotico in zone limitate del neurasse. L'andamento dell'attività proliferativa nelle due porzioni romboencefaliche esaminate, però, non rispecchia la successione osservata nel periodo larvale (ove aumenta prima nella piastra alare e solo molto più tardi nella piastra basale), ma inizia simultaneamente dappertutto. Ciò significa che l'ormone tiroideo, stimolando l'attività metabolica cellulare, mobilita tutte le energie di sviluppo dell'organismo nel tentativo di attuare in brevissimo tempo tutte le modificazioni che si attuano ordinatamente nel periodo larvale; ne consegue che le disarmonie di sviluppo non sono provocate solamente dal diverso ritmo di differenziamento dei vari tipi cellulari, ma anche dallo scatenamento dell'attività mitotica, la quale, non seguendo una ordinata successione di tempo e di luogo, è impossibilitata a realizzare una completa morfogenesi (la mancata fusione delle labbra romboidali ne è l'esempio).

Da un punto di vista generale, credo si possa asserire che l'ormone tiroideo, eccitando l'attività metabolica, accelera tutti i processi biologici in atto nelle cellule dell'organismo; infatti, per quanto riguarda il sistema nervoso è stato visto che:

a) provoca una precoce senescenza nelle cellule differenziate (l'accumulo di pigmento melanico nei neuroni romboencefalici - ved. fig. 2 - può esserne indice) ed una precoce involuzione in quelle funzionalmente connesse con gli organi della condizione larvale;

b) anticipa ed accelera il differenziamento nelle cellule di tutti gli apparati legati alla condizione terrestre che abbiano subito la « determinazione istogenetica particolare »;

c) esalta il ritmo mitotico negli elementi indifferenziati, che abbiano subito solo la « determinazione istogenetica generale » (per queste definizioni e concetti ved. Stefanelli <sup>(13)</sup>).

L'esaltazione dell'attività metabolica, esercitata dall'ormone tiroideo sullo strato ventricolare del romboencefalo, non può essere ritenuta effetto di quella riscontrata in corrispondenza degli abbozzi degli organi della locomozione terrestre <sup>(6,14)</sup>, poiché ambedue iniziano contemporaneamente e precocemente (si rendono manifeste già al primo giorno di trattamento).

Pertanto l'ormone tiroideo, stimolando l'attività metabolica dell'organismo, evoca una diversa risposta anche nelle cellule di uno stesso tessuto;

(13) Ved.: AL. STEFANELLI « Mem. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), I, p. 27 (1947); « Quart. Rev. Biol. », 26, p. 17 (1951); « La Ric. Sci. », 25, p. 2278 (1955).

(14) E. MELLAMBY e H. B. FELL, « Journ. Intern. d'Embryol. » (Bruxelles 1955). (Cit. da A. J. THOMAS, *Les facteurs de la croissance cellulaire*, Paris 1956).



in quelle zone del neurasse che conservano attitudini proliferative, le cellule rispondono allo stimolo metabolico accelerando il proprio ritmo mitotico; anche se tali zone del tubo neurale normalmente entreranno in rapporto funzionale con gli apparati della condizione tetrapoda terrestre, l'influenza dell'ormone tiroideo non può ritenersi dipendente dalla periferia, ma, per quanto effetto secondario (dovuto primariamente allo stimolo metabolico), deve considerarsi esercitata *direttamente* sulle cellule indifferenziate; una conferma di ciò è provata dai risultati delle esperienze di Weiss e Rossetti <sup>(6)</sup>, i quali hanno riscontrato esaltazione dell'attività proliferativa solo nella zona mielencefalica circostante alla sorgente di ormone, cioè all'infuori di ogni eventuale stimolo da parte degli apparati della vita terrestre. L'influenza diretta dell'ormone tiroideo sul ritmo mitotico del sistema nervoso centrale è in armonia con recenti osservazioni sul differenziamento cellulare di neuroni dell'area laterale motoria (Beaudoin <sup>(15)</sup>) e del nucleo mesencefalico del V (Kollros e McMurray <sup>(16)</sup>) di Anfibi anuri, le quali hanno constatato una influenza acceleratrice locale ad opera dell'ormone tiroideo.

Coordinando in una sintesi i risultati emersi dalle ricerche di questi ultimi anni circa l'effetto dell'ormone tiroideo sul sistema nervoso centrale degli Anfibi anuri si delinea un diverso comportamento dei centri nervosi, che può spiegarsi solo tenendo presente un criterio ecologico: infatti l'ormone ha un'influenza *diretta* sull'attività proliferativa e sul differenziamento di quei centri nervosi che si sviluppano nella condizione larvale in previsione del futuro adattamento alla condizione terrestre, ha invece un'influenza *indiretta* su quei centri nervosi che sono funzionalmente connessi con gli organi della condizione acquatica (centri della linea laterale <sup>(17)</sup>, cellule di Mauthner <sup>(18,6)</sup>, midollo spinale caudale, ecc.) che normalmente si involgono dopo la metamorfosi in seguito alla sparizione degli organi larvali.

Il fatto che la tiroxina influenza l'attività mitotica del romboencefalo *non per effetto* dell'azione esercitata sulla morfogenesi dagli organi della condizione terrestre, ma *direttamente* e con diversa intensità nelle varie porzioni dello strato ventricolare, dimostra che in questo caso la morfogenesi è indipendente dal campo periferico e pertanto conferma la mia precedente interpretazione: cioè che la morfogenesi del cervelletto degli Anfibi è regolata da fattori intrinseci <sup>(1)</sup>. Ricordo che analoghe conclusioni sono state recentemente raggiunte da Perri <sup>(19)</sup> in un'analisi sperimentale sullo sviluppo delle corna anteriori del midollo spinale di Anfibi anuri.

(15) A. R. BEAUDOIN, « Anat. Rec. », 118, p. 420 (1954).

(16) J. J. KOLLROS e V. McMURRAY, « Journ. Exptl. Zool. », 131, p. 1 (1956).

(17) G. M. BAFFONI e G. CATTE, « Riv. di Biol. » (Perugia), 43, p. 373 (1951).

(18) G. M. BAFFONI e G. CATTE, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), 9, p. 282 (1950); G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (s. VIII), 14, p. 138 (1953).

(19) T. PERRI, « Arch. Zool. Ital. », 41, p. 369 (1956).



CONCLUSIONI. — L'ormone tiroideo influisce in diversa misura sulle varie regioni e porzioni del neurasse. L'azione della tiroxina si esercita non soltanto accelerando i processi del differenziamento cellulare, ma anche esaltando l'attività mitotica in zone del neurasse che conservano capacità morfogenetiche in rapporto alla formazione dei centri nervosi legati agli apparati della condizione terrestre. L'ormone tiroideo esalta l'attività proliferativa dello strato ventricolare del romboencefalo direttamente, cioè indipendentemente da influssi del campo periferico.

## COMMEMORAZIONI

### Commemorazione del Socio Carmelo Ciaccio

tenuta (\*) dal Socio LUIGI CALIFANO

Carmelo Ciaccio ha, come ricercatore, sin dall'inizio della Sua attività una Sua inconfondibile fisionomia che conserva sino alla fine, pur attraverso le oscillanti vicende della vita non facile, il perfezionamento della coltura, l'evoluzione delle cognizioni, lo sviluppo della tecnica. Egli ha, già giovanissimo, l'impronta del ricercatore e più, forse, dell'osservatore dei fatti biologici che vuole conoscere ed interpretare; tesa, dunque, la mente al nuovo od anche all'arcano. La storia della Sua esistenza rivela, mi pare, due peculiari aspetti del Suo spirito: l'uno che lo porta alla ricerca di un campo di azione Suo e non già di altri, il secondo quello della aderenza della vita al destino segnato, quello, cioè, della indagine scientifica, nonostante le aspre condizioni dell'ambiente e la presso che assoluta mancanza nonché di aiuto ma anche di guida e di insegnamento.

Egli è stato essenzialmente un autodidatta, allievo presso che di nessuno nel campo della Istologia, che fu e rimase la Sua attività scientifica preminente, assolutamente di nessuno in quello della Patologia generale nella quale si affermò e della quale comprese l'essenziale significato per la conoscenza della essenza dei fenomeni patologici.

Si laureò a Napoli nel 1902 dopo un internato di due anni nell'Istituto di Anatomia patologica diretto da Otto von Schrön e per un anno dopo la laurea continuò tale internato. « Negli anni 1904-1905-1906 dovetti », come modestamente dice in un suo curriculum, « per ragioni economiche recarmi in condotta, dove seguitai a lavorare attivamente in un laboratorio, istituito a mie spese ».

Nel 1906-1907 fu nominato assistente ordinario dell'Istituto di Anatomia chirurgica di Palermo e conservò tale posto fino al 1920 quando, vin-

(\*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

citore di concorso in Patologia generale, assurse alla Cattedra di Messina che illustrò per oltre trenta anni di fecondo lavoro e di insegnamento.

Carriera quella precedente la cattedra esposta in poche righe ma carriera assolutamente inconsueta e certo la non più adatta per la ricerca scientifica. È medico condotto e con mezzi personali mette su un laboratorio che certo fu modestissimo, e quando entra nella vita universitaria c'entra di lato in un Istituto di tutt'altra disciplina che l'Istologia normale o patologica o la Patologia generale, in un laboratorio, certo di modeste possibilità, perché di attività collaterale alla cattedra di Anatomia chirurgica. È interessante rilevare che alla fine della carriera, quando cioè il Ciaccio lasciò l'insegnamento per limiti d'età, perdurando in Lui ancora vivo l'interesse alla ricerca, lavorò anche questa volta in un Suo laboratorio personale e pubblicò alcune note che recano l'intestazione: «Laboratorio privato». Così, iniziò la Sua vita di ricercatore, così la concluse, espressione tal fatto, in ambo le epoche, del prevalere dell'amore alla ricerca sulle angustie e difficoltà delle circostanze, della volontà all'indagine, direi dell'impeto scientifico nella Sua personalità.

Il nome di Carmelo Ciaccio è dei più popolarmente noti tra i biologi, legato com'è ad un metodo istologico che, largamente applicato, ha molto contribuito alla conoscenza di fatti importanti della Biologia normale e patologica. Non è a credere, però, che per questo solo, che si potrebbe dire fortunato evento, la Sua figura di ricercatore vada onorata. Il Suo pensiero scientifico è multiforme, irrequieto, sempre teso a intendere fatti noti alla luce di nuove acquisizioni, avido di conoscere dei nuovi fatti l'essenza ed il meccanismo.

La scoperta del batteriofago lo interessa subito e pubblica un lavoro in cui è bene impostato il meccanismo della lisi che procede in un primo tempo senza evidenti fenomeni proteolitici che si avverano, invece, successivamente, meccanismo che noi possiamo accettare ancora oggi nel senso che la scompaginatura della citoarchitettura batterica dovuta alla moltiplicazione del fago non è fenomeno enzimatico ma condiziona l'autolisi di ciò che resta dei costituenti cellulari. Lo interessa la scoperta dell'insulina ed egli ne cerca l'influenza su alcune tappe del metabolismo lipidico, lo attrae la dimostrazione dei fattori lipotropi, come lo interessa lo sviluppo delle conoscenze sul metabolismo fosforilativo degli zuccheri che egli approfondisce nei riguardi del tessuto nervoso e così via. Argomenti, dunque, nuovi e vari che Egli prende a trattare con l'antico spirito di autodidatta, con le inerenti limitazioni e arresti che ciò comporta, pur sempre, però, con indirizzò e concezioni personali, dunque con proprio contributo di pensiero.

Dove, però, il Ciaccio ha segnato una tappa significativa nel progresso delle conoscenze è nella istopatologia dei lipidi. È vero che tali ricerche sono state rese possibili dall'impiego del metodo o meglio dei metodi da Lui trovati o escogitati, ma è pur vero che Egli ha saputo vedere con essi molto addentro ai molti fatti presi ad indagare. Il fenomeno, ad esempio, della lipofanerosi fu da Lui bene identificato nella liberazione dei lipoidi costitu-

zionali della cellula, gli istolipoidi come Egli li designò, concezione viva nelle attuali conoscenze sulla struttura del citoplasma, come attuale è la sistemazione che Egli fece delle varie forme di metamorfosi grassa da Lui distinte in base a puri metodi istochimici, fatto concettuale notevole date le limitazioni inerenti agli stessi metodi. Di sicuro significato è anche la concezione fondata su reperti sperimentali che nella infiltrazione lipidica da intossicazione il fegato perde la capacità al metabolismo degli acidi grassi, funzione che Egli indica con il nome di lipodieresi, mentre è conservata la capacità alla fissazione, cioè la funzione lipopessica.

Di interesse è certamente anche la dimostrazione delle cosiddette cellule lipoidee interstiziali presenti nel connettivo di alcuni organi, cellule talvolta pigmentate e che contengono lipidi ben dimostrabili in minute goccioline, cellule che in alcune condizioni patologiche si rinvenivano pure nell'avventizia perivenosa e che, probabilmente, sono da interpretare come cellule avventiziali infarcite da lipoidi ma sulla cui natura e significato dopo le ricerche del Ciaccio le conoscenze non sono ulteriormente progredite, come non significativamente progredite dopo Ciaccio sono le nozioni su quelli che Egli chiamò cromolipoidi che, secondo Lui che li ha scoperti, sono lipidi insaturi in via di autoossidazione. Lipocromi o cromolipoidi furono dal Ciaccio dimostrati in cellule del surrene e nelle cellule nervose e ricerche recenti su queste ultime sembrano piuttosto confermare l'antica opinione di Ciaccio e non quella di ricercatori posteriori.

Varie altre ricerche istologiche hanno particolare significato ed hanno contribuito allo sviluppo degli studi, così la dimostrazione di fibre reticolari nella parete dei capillari già indicata da Mallory ma meglio e più dettagliatamente studiata da Ciaccio è stata largamente confermata in seguito, così le indagini sull'apparato di Golgi conservano valore nel senso che i metodi in uso per la sua dimostrazione determinano separazione di lipoidi di quella zona del citoplasma, anche detta zona di Golgi, che ha certamente una sua peculiare strutturazione submicroscopica e certamente è sede funzionale, ma la cui apparenza microscopica è un aspetto artificiale non preesistente nella cellula vivente.

Le indagini sulla struttura delle capsule surrenali sono assai interessanti a leggere specie se si tiene conto dell'epoca in cui furono eseguite, quando degli ormoni corticoidi non si aveva alcun sentore ma che sin da allora dimostrarono la complessità e varietà dei lipidi istochimicamente rilevabili nel tessuto. È naturale che non si possono identificare i vari ormoni corticoidi in altrettanti aspetti istochimici e nemmeno è possibile la separazione nei tre gruppi funzionali fondamentali, ma è pur vero che quelle ricerche furono la prima visualizzazione del particolare contenuto di quelle cellule e quindi diedero la prima idea che in esse il metabolismo lipidico fosse predominante e complesso.

Un altro argomento che appassionò Ciaccio fu quello della cosiddetta leucocitosi digestiva, fenomeno intravisto da Virchow e studiato da tanti ma sul quale l'attenzione fu vivacemente attratta dopo che Widal enunciò



la sua concezione della crisi emoclasica proponendone la determinazione quale mezzo utile a svelare l'insufficienza epatica. Ciaccio ha pubblicato sulla leucocitosi digestiva molti lavori il primo dei quali è del 1922.

Il fatto saliente messo da Lui in evidenza è che la leucocitosi, preceduta o no da leucopenia, è da riportare, non già come ritenevano molti, e Widal tra questi, a passaggio dall'intestino di prodotti della digestione proteica non completamente idrolizzati ma è principalmente in rapporto con la secrezione di acido cloridrico da parte della mucosa gastrica, meccanismo ammesso di poi da un allievo di Pawlov, il Tschishikow il quale in animali operati di fistola gastrica dimostrò che, in realtà, dopo somministrazione di un pasto proteico si avverano due leucocitosi una dopo poco più di un'ora, la seconda dopo quattro ore. La prima coincide con la secrezione del succo gastrico, la seconda con il passaggio di esso nel duodeno. Il fatto messo in evidenza da Ciaccio è di certo importante per due ragioni: 1° perché pose i primi significativi dubbi sulla reazione emoclasica di Widal che le indagini successive hanno, difatti, svuotato di ogni significato, 2° perché aprì la via alle ricerche sulla influenza regolatrice del sistema nervoso autonomo nella leucopoiesi, fatto importante anche se tuttora non chiaro nella sua estensione e nel suo meccanismo. Debbo, però, dire che oltre alla dimostrazione del fatto, queste ricerche di Ciaccio hanno un particolare pregio e cioè quello che affiora in tutta la produzione scientifica di Lui e cioè la logica del ragionamento sia nello svolgimento delle proprie indagini, come nella valutazione e interpretazione dei risultati sperimentali e delle deduzioni degli altri studiosi dell'argomento. È verosimile che alcune delle argomentazioni di Ciaccio sieno esse stesse suscettibili di critica, ma è certo che sono espressione di una mente fervida, atta alla interpretazione ed alla deduzione. Il lavoro riassuntivo pubblicato nel 1928 in Archivio di Scienze biologiche non è sperimentale e non reca dati valutabili, ma è un'esposizione polemica della situazione sull'argomento e si legge ancora oggi con gusto e con profitto.

Se l'indagine istologica ed ematologica è la parte maggiore dell'opera scientifica di Ciaccio non è a credere che sia la esclusiva. Quando la Patologia generale, da disciplina prevalentemente a indirizzo morfologico, si trasformò sotto l'influenza del Galeotti, in Fisiopatologia e Biochimica patologica, il Ciaccio comprese presto il significato di tale evoluzione e la Sua mente, per natura dinamica e causalistica, seguì il nuovo indirizzo, che, del resto già traspariva nelle stesse indagini morfologiche. Specialmente si interessò di fisiopatologia del ricambio e pubblicò, come ho già accennato, numerose note sul metabolismo glicidico del sistema nervoso in varie condizioni sperimentali, ed anche studiò con frutto alcune questioni riguardanti l'assorbimento intestinale degli zuccheri dimostrando l'interessante fatto che la simultanea introduzione di glucosio e di saccarosio impedisce la iperglicemia da glucosio, fatto importante perché espressione della azione concatenata dei vari enzimi che intervengono nell'assorbimento degli zuccheri a livello della mucosa.

L'indirizzo fisiopatologico e biochimico, già affiorante nelle ricerche istologiche, si inserisce ora anche negli ulteriori studi istochimici ed Egli riprende

le Sue ricerche di un tempo e le rielabora alla luce delle moderne acquisizioni. In note pubblicate nel 1930 cerca di chiarire il meccanismo della cromizzazione sui lipidi, istochimicamente distingue fosfolipidi e galattolipidi, mentre in una memoria del 1942 studia le cellule cromaffini della midolla surrenale e anche recentemente nel 1954 dimostra una reazione specifica istochimica per i gruppi carbossilici dei cromolipidi.

Una delle ultime pubblicazioni di Ciaccio è quella dei due capitoli Istochimica, ed Istofisica dell'Enciclopedia medica italiana, scritti, specie il primo, che si possono considerare un po' come il suo testamento scientifico perché riguardano il Suo maggiore argomento di studio la Istochimica o Microistochimica come si compiaceva di dire. È una rassegna prevalentemente tecnica con indicazioni minute dei vari metodi e con alcune considerazioni generali. Naturalmente, è in particolare svolta la tecnica per la dimostrazione istochimica dei lipidi ed Egli espone con evidente passione i Suoi metodi ma nel testo non è riportata una sola figura propria ma numerose di altri Autori e nella bibliografia non è citato un solo Suo lavoro ma solo sono scrupolosamente annotate le opere di consultazione generale, segno della obiettività dell'Uomo che vuole rendere servizio agli studiosi senza personalismi.

Tale qual fu, Carmelo Ciaccio è stata una figura notevole della Patologia generale per la Sua singolare personalità di studioso, per i molti contributi apportati in vari campi, soprattutto perché alcune delle Sue ricerche sopravvivono oltre l'Uomo, si integrano e si completano con quelle di successivo svolgimento.

Particolare è la Sua posizione nei riguardi dell'Istochimica, disciplina in alacre sviluppo con cultori e giornali specializzati. Non c'è dubbio che, nonostante le limitazioni inerenti ai metodi stessi, risultati molto importanti per la Biologia normale e patologica siano stati da essa raggiunti e molti altri se ne avranno in avvenire. Ciaccio è da riconoscere come il precursore o uno dei precursori in tale indirizzo. Quando la tecnica istologica era diligente industriosa svolgentesi in tentativi, talvolta particolarmente fortunati, comunque lontana dall'esprimere definiti rapporti biochimici, Ciaccio nelle Sue ricerche e nei Suoi metodi ebbe l'indirizzo biochimico e già dalle prime pubblicazioni parla di Istochimica e di Microistochimica e si sforza di rapportare il fatto morfologico a specifici costituenti e perciò il nome di Carmelo Ciaccio entra, a buon diritto, nella storia della Scienza.

Accanto al ricercatore, risalta la figura di Ciaccio come Maestro, tanto che in Messina essa è stata e permane una delle più eminenti e più note di Maestro e di Insegnante.

L'Istituto di Patologia generale di quella Città è stato un centro cui convergevano ricercatori già avviati e giovani all'inizio della carriera di studiosi, attratti dalla personalità scientifica di Lui, guida non solo nei campi di Sua specifica attività ma in molti altri per quella Sua particolare disposizione alla interpretazione ed alla indagine.

Numerosissimi Allievi si sono formati a quella Scuola vari dei quali sono ascesi a cattedre Universitarie tra cui in primo luogo Giuseppe Sola-



rino in Patologia generale a Bari. Molti altri Allievi sono in Cliniche, in Ospedali, in Laboratori così che l'opera di Carmelo Ciaccio è stata, anche dal punto di vista didattico, efficace e reale.

La morte lo colse quasi in piena attività e noi ci figuriamo che il Suo Spirito così sia placato perché Egli si spense come era vissuto; la Sua fu vita di lavoro e di sacrificio, di anelito alla ricerca della verità e pertanto fu vita costruttiva e ben vissuta.

#### BIOGRAFIA.

Nacque a Monteleone-Calabro il 2 giugno 1877 da Eugenio e da Teresa Pardea.

Si laureò in Napoli nel 1902.

Dal 1900 al 1903 interno nell'Istituto di Anatomia patologica di Napoli, diretto dal prof. O. von Schrön.

Dal 1904 al 1906 Medico condotto.

Dal 1906-7 Assistente dell'Istituto di Anatomia chirurgica di Palermo diretto dal prof. Parlavecchio.

Nel 1909 libero docente in Istologia patologica.

Nell'epidemia colerica del 1911 fu incaricato dalla Direzione di Sanità di dirigere i Laboratori batteriologici di Nocera e di Chieti.

Direttore del Laboratorio batteriologico dell'Ospedale di Messina nella prima guerra mondiale.

Nel 1920 vinse il concorso per Professore straordinario di Patologia generale e fu chiamato alla Cattedra di tale disciplina dalla Facoltà di Messina.

Professore ordinario dal 1923 fino al 1947, quindi Professore fuori ruolo e poi emerito.

Medaglia d'oro al merito scientifico del Ministero della Pubblica Istruzione.

Socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei dal 15 luglio 1935 e Socio Nazionale dal 5 ottobre 1947.

Socio della Accademia Peloritana, della Accademia Cosentina, della Accademia Pugliese di Scienze, della Association des Anatomistes, della Histochemical Society e di varie altre Società ed Associazioni scientifiche.

Mori in Messina il 1° settembre 1956.

#### PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica alla Classe la dolorosa notizia della morte del Socio Nazionale Ugo Amaldi, della Categoria I, Sezione Matematica, avvenuta in Roma l'11 novembre u. s. e ricorda brevemente, con commosse parole, la figura e l'opera del grande scienziato e la sua devozione all'Accademia, alla vita della quale partecipò sempre assiduamente, ricoprendo anche, dal 1950 al 1954, la carica di Segretario accademico della Classe.

Il Presidente, dopo avere messo in evidenza che il prof. U. Amaldi si è dedicato, fino agli ultimi giorni di vita, con appassionato fervore e con mirabile abnegazione, alle imprese per la pubblicazione delle Opere di Vito Volterra e di Tullio Levi Civita, delle quali è stato il fervido animatore, prima come Presidente dei due Comitati e poi come coordinatore dei lavori degli stessi, eleva un pensiero di affettuoso e reverente omaggio alla memoria del

carissimo Consocio, la cui scomparsa rappresenta un grave lutto per la scienza e per l'Accademia.

Il Presidente dà quindi la parola al Socio Califano che commemora il compianto Collega Carmelo Ciaccio.

Il prof. Giordani ringrazia il Socio Califano per la sua elevata orazione e rinnova ai familiari del prof. Ciaccio, presenti alla commemorazione, i sentimenti di cordoglio dell'Accademia e suoi personali per la scomparsa del valoroso patologo.

### PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato, pervenuto all'Accademia in data 9 corrente, da parte dell'ing. Narciso Desirello, contenente, come risulta dall'annotazione sulla busta, otto nuove leggi fisiche nucleari atomiche. Presenta poi un altro plico, senza titolo, del sig. Augusto Dalla Valle, pervenuto oggi 14 dicembre.

La Classe, constatata l'integrità dei suggelli, delibera che i plichi di cui trattasi siano trasmessi all'archivio accademico, ove saranno conservati a disposizione degli interessati.

### COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente informa la Classe, nell'eventualità che la notizia possa interessare qualche Socio, che dal 15 marzo al 15 settembre 1958 si svolgeranno, a Utrecht, presso il Laboratorio Hubrecht, delle riunioni di embriologia dedicate al tema generale « A morphological and physiological analysis of regulative and non-regulative processes in the development of 'mosaic' eggs of several terrestrial and freshwater invertebrates ».

Sempre nel 1958, e precisamente dall'11 al 21 settembre, avrà luogo a Piacenza, per iniziativa dell'Ente Manifestazioni Fieristiche Piacentine, la III Mostra Internazionale degli Idrocarburi e delle nuove fonti di energia e la VII Mostra Nazionale del Metano, alle quali verrà abbinato, come negli scorsi anni, il Convegno Tecnico Economico Internazionale sugli Idrocarburi.

Il prof. Giordani ricorda quindi che, nella seduta segreta a Classi riunite del 9 novembre u.s., si prese in esame una richiesta del prof. Gaetano Napolitano, Capo del Servizio delle Informazioni della Presidenza del Consiglio dei Ministri, intesa ad ottenere la collaborazione dell'Accademia alla compilazione del Notiziario Mensile « Libri e Riviste », pubblicato da quel Servizio. Le Classi riunite ritennero, in quell'occasione, e la Presidenza ne diede notizia al prof. Napolitano, che una collaborazione dell'Accademia, come Ente, non fosse possibile, perché avrebbe richiesto l'organizzazione di un apposito ufficio, ma che i singoli Soci, qualora desiderassero collaborare personalmente al Notiziario, avrebbero potuto rivolgersi agli uffici dell'Accademia che, a loro volta, si sarebbero messi in contatto con il Servizio delle Informazioni della Presidenza del Consiglio. Si ha ora notizia che il problema è

tuttora allo studio da parte dell'ufficio proponente, il quale si è riservato di fare ulteriori comunicazioni.

### PRESENTAZIONI DI LIBRI

Il Socio Montalenti, anche a nome del Collega Chiarugi, presenta tre volumi contenenti le relazioni e le comunicazioni presentate alla I, alla II e alla III riunione dell'Associazione Genetica Italiana, svoltesi rispettivamente a Roma, il 27 e 28 marzo 1954, a Pavia, il 24 e 25 aprile 1955 e a Pisa il 29 e 30 aprile 1956, congiuntamente con la IV, V e VI riunione annuale della « Biometric Society: Regione italiana ». Tali volumi fanno seguito, idealmente, ai due pubblicati, in precedenza, sempre come supplementi alla « Ricerca scientifica », che vengono anch'essi presentati dal Socio Montalenti e che portano rispettivamente i titoli: « Genetica ed ematologia. Convegno tenutosi in Milano il 4 marzo 1951 presso l'Istituto di Genetica dell'Università » e « Convegno di genetica tenutosi in Napoli nei giorni 1 e 2 giugno 1952 presso l'Istituto di Genetica dell'Università ».

Questa serie di Convegni, interrotta soltanto nel 1953, perché nell'agosto di quell'anno vi fu il IX Congresso Internazionale di Genetica a Bellagio, dimostra l'attività di ricerca continua e intensa degli studiosi di Genetica in Italia negli ultimi anni.

Il Socio Montalenti conclude, rivolgendo un ringraziamento al Consiglio Nazionale delle Ricerche, la cui generosità ha concesso di pubblicare i suddetti volumi, e auspicando che il contributo del Consiglio possa continuare anche in avvenire.

Il Socio Polvani presenta il volume contenente gli Atti del III Congresso Internazionale sui fenomeni d'ionizzazione nei gas, svoltosi, per iniziativa della Società Italiana di Fisica a Venezia, presso la Fondazione Giorgio Cini, dall'11 al 15 giugno c.a. Tale volume è potuto uscire a soli quattro mesi dalla fine del Congresso perché ciclostilato ma, a differenza di quanto generalmente avviene nelle pubblicazioni al ciclostile, le memorie contenute nel volume stesso sono state tutte riviste in bozza dai rispettivi Autori e le figure sono eseguite su clichés, come si è soliti fare per le pubblicazioni a stampa.

Il Socio Polvani ricorda poi che nel volume figura una commemorazione del prof. Giorgio Valle, che fu Socio dei Lincei, tenuta dal prof. Vittorio Gori, chiamato a far parte dell'Accademia nello scorso giugno e purtroppo prematuramente deceduto il 2 settembre c. a.

Dopo aver elevato un pensiero di reverente omaggio alla memoria dei due Colleghi scomparsi, il Socio Polvani ringrazia gli Enti che, oltre alla Società Italiana di Fisica, hanno contribuito finanziariamente alla stampa del volume e cioè il Ministero della Difesa, il Comitato Nazionale per le Ricerche Nucleari, l'Istituto Nazionale per le PP. TT., la Fondazione Giorgio Cini di Venezia e i Laboratori CISE di Milano. Un ringraziamento particolarmente caloroso rivolge infine al prof. Ugo Facchini di Milano, al quale, come Segretario Generale del Congresso, spetta il merito dell'ottima riuscita di questo.

Il Socio Gortani presenta il volume «Foraminiferi Padani», edito a cura dell'A.G.I.P. Mineraria, in occasione del Convegno di Milano sui giacimenti gassiferi dell'Europa Occidentale. L'opera, che è stata altamente apprezzata in Italia e all'estero, illustra i risultati, molto importanti non solo per la conoscenza del sottosuolo italiano, ma anche per il progresso della micropaleontologia stratigrafica, ottenuti dai geologi della predetta A.G.I.P. Mineraria in oltre quindici anni di studio sistematico delle microfaune padane.

Il Presidente Giordani ringrazia i Colleghi Montalenti, Polvani e Gortani e presenta quindi una pubblicazione dal titolo «Accademia Belgica – Rapport» che contiene notizie sulla storia dell'Accademia stessa, sulla sua organizzazione e sull'attività da essa svolta fino all'anno accademico 1955–56.

Il Presidente si compiace vivamente per la fervida opera esplicata da quell'Accademia, auspicando un sempre maggior incremento dei rapporti culturali, già tanto amichevoli e fecondi, tra l'Italia e il Belgio.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

#### PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note, per la pubblicazione nei Rendiconti, i Soci Chisini, Cotronei, Margaria, Montalenti, Abetti, Segre, Tonzig, Picone, Signorini e Pensa.

Viene letto e approvato l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria e il Presidente Giordani comunica che, tra le suddette Note, è giunto anche il testo della commemorazione del compianto Socio Nello Beccari, predisposto dal Collega Giuseppe Levi, il quale avrebbe dovuto tenere tale commemorazione nello scorso mese di novembre, se non ne fosse stato impedito, come lo è ancora, dalle sue condizioni di salute. La commemorazione sarà quindi tenuta in sospenso fino alla guarigione del Collega Levi, oppure, se questi lo richiederà espressamente, il relativo testo sarà letto da un altro Socio.

Il Presidente si augura però vivamente che il prof. Levi possa al più presto ritornare in Accademia e, a nome dell'intera Classe, formula un cordiale voto in tal senso, assicurando che provvederà a trasmetterlo al citato Collega.

Il Presidente comunica poi che è uscito il secondo fascicolo delle ferie estive e rivolge un sincero ringraziamento ai Segretari Accademici Signorini e Cotronei che hanno curato la pubblicazione con la consueta alta competenza e massima diligenza. Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

BIERNACKI M. – Sur la position des extrêmes relatifs de certaines fonctions – fonctions surharmoniques ou sousharmoniques (pres. dal Socio M. PICONE).

FORTI G. – Studi sulla fisiologia dell'acido ascorbico. – XXII. Azione inibente dell'acido deidroascorbico sulla fosforilazione ossidativa di mitocondri vegetali (pres. dal Socio S. TONZIG).

SPINELLI D. e MORPURGO C. – Azione del pantenolo sull'uomo e sull'animale succinilcolinizzato (pres. dal Socio R. MARGARIA).



## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 14 dicembre 1957*

- ALVAREZ CONDE José. — *Historia de la Geología, Mineralogía y Paleontología en Cuba*. La Habana, Junta Nacional de Arqueología y Etnología, 1957. Pp. XVI-248, in-8°, con tavv. (Historia de las Ciencias Naturales de Cuba, vol. II).
- BEKLEMIŠEV N. D. — *Hroničeskij brucellev*. Alma-Ata, Akademija Nauk KSSR, 1957. Pp. 304, in-8°, con figg.
- BOLGOV G. P. — Vedi: VEJC B. I., POKROVSKAJA I. V. i BOLGOV G. P.
- BROGLIA Valerio. — Vedi: STAUDINGER Hermann.
- CHIARUGI Alberto. — *Nel quarto centenario della morte di Luca Ghini 1490-1556*. Estr. da «Webbia», vol. XIII, 1957, n. 1.
- CONGRESSO (TERZO) INTERNAZIONALE SUI FENOMENI DELLA IONIZZAZIONE DEL GAS TENUTO A VENEZIA DALL'11 AL 15 GIUGNO 1957. — *Rendiconti*. Milano, 1957. Pp. 1167, in-4°, con figg. (Società Italiana di Fisica).
- Convegno di Genetica*. Atti della I Riunione dell'Associazione Genetica Italiana e della IV Riunione annuale della Biometric Society: Regione Italiana. Roma, 27-28 marzo 1954. Suppl. a «La Ricerca Scientifica», a. XXV, 1955.
- Convegno di Genetica*. Atti della II. Riunione dell'Associazione Genetica Italiana e della V Riunione Annuale della Biometric Society: Regione Italiana. Pavia, 24-25 aprile 1955. Suppl. a «La Ricerca Scientifica», a. XXVI, 1956.
- Convegno di Genetica*. Atti della III Riunione dell'Associazione Genetica Italiana e della VI Riunione annuale della Biometric Society: Regione Italiana. Pisa, 29-30 aprile 1956. Suppl. a «La Ricerca Scientifica», a. XXVII, 1957.
- Convegno di Genetica tenutosi a Napoli nei giorni 1 e 2 giugno 1952 presso l'Istituto di Genetica dell'Università*. Suppl. a «La Ricerca Scientifica», a. XXIII, 1953.
- CUSHING Emory C. — *History of entomology in world war II*. Washington, Smithsonian Institution, 1957. Pp. VI-117, in-8°, con tavv. (Publication, 4294).
- DOKE Tadyoshi. — *The Danger Must Not Be Minianized—Some Observations on Dr. Libby's Report*. Estr. da «Contemporary Japan», vol. XXV, 1957, n. 1.
- Foraminiferi Padani (Terziario e quaternario)*. Atlante iconografico e distribuzione stratigrafica. Milano, Agip Mineraria, 1957. Pp. 8, in-4°, con tavv.
- GARCÍA Godofredo. — *La variabilidad de la masa. La energía intrínseca total. Las ecuaciones diferenciales del movimiento sin recurrir a la teoría de la relatividad de A. Einstein*. Estr. da «[Actas] de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima», a. XX, 1957.
- Genetica ed Ematologia*. Convegno tenutosi a Milano il 4 marzo 1951 presso l'Istituto di Genetica dell'Università. Suppl. a «La Ricerca Scientifica», a. XXII, 1952.
- HIYAMA Yoshio. — *A Measure of Future sr-90 Level from Earth Surface to Human Bone*. Estr. da «Japanese Scientific Monthly», vol. X, 1957, n. 3.
- LUYTEN Willem J. — *A catalogue of 9867 stars in the Southern hemisphere with proper motions exceeding 0."2 annually*. Minneapolis, The Lund Press, 1957. Pp. n. n., in-4°.
- MENNELLA Cristofaro. — *L'energia atomica al servizio dell'umanità*. Voll. I, II, III. Torino..., Società Editrice Internazionale, 1957. Voll. 3, in-8°, con figg. e tavv.
- PEROTTI Luigi. — *Onoranze in Milano al prof. Livio Cambi nel cinquantennio della sua laurea 1906-1956*. Estr. da «La Chimica e l'Industria», a. XXXIX, 1957, luglio.
- POKROVSKAJA I. V. — Vedi: VEJC B. I., POKROVSKAJA I. V. i BOLGOV G. P.

- PONTANI Ugo. — *Una dimostrazione non geometrica del V postulato di Euclide*. Roma, Tip. Arte, 1957. Pp. 4, in-8°.
- REYES Julio C. — *Región del Cerro Bayo y sus alrededores. Bosquejo Geológico y Petrográfico*. San Isidro, 1956. Pp. 99, in-8°, con figg.
- STAUDINGER Hermann. — *Chimica organica colloidale*. 2ª ed. italiana interamente rifatta sulla 3ª ed. originale tedesca, ad opera di Valerio Broglia. Milano, U. Hoepli, 1957. Pp. xx-331, in-8°, con figg.
- VEJC B. I., POKROVSKAJA I. V. i BOLGOV G. P. — *Mineraly Rudnogo Altaja. T. I: Elementy, sul'fidy, sul'fosoli*. Alma-Ata, Akademija Nauk KSSR, 1957. Pp. 344, in-8°, con figg. e tavv. (Mineralogija Polimetalličeskij Mestoroždenij Rudnogo Altaja, I).

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

#### ERRATA CORRIGE

Nella Nota di O. ARRIGONI, G. ROSSI e R. MARRÈ, pubblicata nel fascicolo 5 (novembre 1957), Vol. XXIII, a p. 293, riga 6 dall'alto, si deve leggere: «l'azione attivante del FMN e quella inibente del  $\text{pp-ClHgB}$ ».

---



## INDICI DEL VOLUME





## INDICE PER AUTORI

## A

- AGOSTINELLI C., Figure di equilibrio ellissoidali per una massa fluida elettricamente conduttrice uniformemente rotante, con campi magnetici variabili col tempo, 409.
- ANTONIANI C. e LANZANI G. A., Sintesi enzimatica dell'acetilmetilcarbinolo, 278.
- ARGHIRIADE E., Réseaux et congruences d'ordre supérieur, 246.
- ARRIGONI O., ROSSI G. e MARRÉ E., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XXII. Sulla « monodeidroascorbico » riduttasi in pisello, 287.
- ARRIGONI O., vedi MARRÉ E.
- AVANZI S., Osservazioni preliminari sugli effetti fisiologici e citogenetici della irradiazione di semi di grano duro « Cappelli » con raggi X e neutroni termici, 158.

## B

- BACCI G., La variabilità sessuale nelle popolazioni eterogoniche, 165.
- e RAZZAUTI A., Falso gonocorismo in « *Coris julis* » (L.), 181.
- BAFFONI G. M., Tardiva determinazione numerica di cellule nervose nel rombecefalo di Anfibi. — II. Osservazioni su Anfibi urodeli, 90.
- Influenza dell'ormone tiroideo sull'attività mitotica del rombecefalo di un Anfibi anuro, 495.
- BALDACCI R. F., Sopra un principio variazionale nella teoria degli spostamenti elastici non infinitesimi, 250.
- BALLIO A. e SERLUPI-CRESCENZI G., Sintesi del desammido-DPN dall'acido nicotinico negli eritrociti umani, 275.
- BASSI I. W., vedi NATTA G.
- BELLINI L., Studio delle amilasi nello sviluppo di « *Artemia salina* » Leach, 303.
- BIAGGI C., vedi COLLA C.
- BIOCCA E. e FERRETTI G., *Archeostrongylus italicus* gen. nov. et sp. nov., nuovo nema-

tode borsato parassita di *Hystrix cristata* in Italia Centrale, 467.

- BIOCCA E. e LE ROUX P. L., Suddivisione del genere *Ancylostoma* (Dubini, 1843), in quattro sottogeneri, 470.
- BÖHM C., Sulla minimizzazione di una funzione del prodotto di enti non commutativi, 368.
- BONINO G. B. e FABBRI G., Spettro ultrarosso di assorbimento del ruteniocianuro di potassio allo stato cristallino ed in soluzione acquosa, 191.
- e MIRONE P., Misure quantitative di assorbimento della 2-pirrolaldeide nello spettro ultrarosso, 198.

## C

- CAGLIOTI V., SARTORI G. e SCROCCO M., Spettro I. R. e costanti di forza interne dello ione complesso  $\text{Cr}(\text{CN})_6^3$ , 355.
- CALIFANO L., Commemorazione del Socio Carmelo Ciaccio, 503.
- CALIFANO L., vedi SALVATORE G.
- CALIFANO S., SCARPATI R. e SPERONI G., Ricerche spettroscopiche sui nitrilossidi. — II. Spettri I. R. del trimetilacetonnitrilossido e del terz. butilisocianato, 263.
- CAPRIOLI G., vedi FORTINI T.
- CARRÀ S., POLEZZO S. e SIMONETTA M., Momenti elettrici e distanze interatomiche delle azine, 428.
- CATTANEO L., Osservazioni comparative sulla struttura della corteccia cerebellare di mammiferi neonati, 484.
- CAVINATO A., Geologia e genesi delle rocce bentonitiche italiane. 3.
- CELLITTI C., Sopra una costruzione di sistemi di rappresentanti di classi relative a  $G_2$  di forme quadratiche binarie primitive di seconda specie di determinante  $D > 0$  e  $\equiv 5 \pmod{8}$ , 15.
- Nuove dimostrazioni del teorema di Fermat, del teorema di Fermat generalizzato da Eulero, e del teorema di Wilson, 121.

CHIEFFI G. e DE LUTIO E., Il metabolismo del testosterone da parte di «Lebistes reticulatus» e di «Gambusia holbrooki»: Ricerche «in vivo», 316.

CHIUSOLI G. e MINISCI F., Sulla reattività dei radicali liberi con ossido di carbonio e ossido d'azoto, 140.

CIMINO M., NICOLINI T. e FICHERA E., La stazione Astronomica dell'Osservatorio di Capodimonte (Napoli) ad Uccle (Belgio) per l'Anno Geofisico Internazionale, 254.

CINQUINI S., Sopra le estremali di una classe di problemi variazionali, 22.

— Sopra le estremaloidi di una classe di problemi variazionali, 116.

CIUCU G., Propriétés asymptotiques des chaînes à liaisons complètes, 11.

COLLA C., BIAGGI C. e TRECCANI V., Ricerche sul metabolismo ossidativo microbico dell'antracene e fenantrene. - I. Formazione di acidi ossinaftoici, 66.

COLONNETTI G., Giuseppe Albenga (Cenni Commemorativi), 331.

CORDUNEANU C., Equazioni differenziali negli spazi di Banach, teoremi di esistenza e di prolungabilità, 226.

CORRADINI P., vedi NATTA G.

## D

DE CESARIS COROMALDI L., vedi URBANI E.

DE BENEDETTI S., FARINELLI U., FERRERO F., MALVANO R., PELLI G. e TRIBUNO C., Su un nuovo isotopo del bismuto, 58.

DE LEONIBUS F., vedi LO CASCIO G.

DE LUTIO R., vedi CHIEFFI G.

## F

FABBRI G., vedi BONINO G. B.

FALCONE G., vedi PONTIERI G.

FANTOLI A., Orbita del sistema binario  $\mu$  Draconis. Nota II, 133.

FARINELLI U., vedi DE BENEDETTI S.

FAVINI G. e SIMONETTA M., Spettri elettronici di alcune benzotriazine sostituite, 434.

FENOGLIO M. e RIGAULT G., Ricerche sulla distribuzione di uranio e torio nella formazione dioritica di Cogne (Valle d'Aosta), 107.

FERRERO F., HANSON A. O., MALVANO R. e TRIBUNO C., Sulla reazione fotonucleare  $\text{Mo}^{100}(\gamma, p)\text{Nb}^{99}$ , 55.

FERRERO F., vedi DE BENEDETTI S.

FERRETTI G., vedi BIOCCHIA E.

FICHERA E., vedi CIMINO M.

FOFFANI A. e FOFFANI M. R., Equilibri acido-base. - Nota IV. Azofenil-piridine, 60.

— e FORNASARI E., Comportamento polarografico di N-ossidi aromatici. - Nota V.

Su alcuni N-ossidi 2-aril-chinolinici, 62.

FOFFANI M. R., vedi FOFFANI A.

FORNASARI E., vedi FOFFANI A.

FORTINI T. e CAPRIOLI G., Variazione centromembo del Sole del tripletto verde del Magnesio:  $\lambda 5167,3$  -  $\lambda 5172,7$  -  $\lambda 5183,6$ . Nota II, 51.

## G

GAETA F., Sull'equazione canonica di un complesso  $C_{n-d-1}^g$  di sottospazi  $S_d$  di  $S_n$ , 389.

GHIRETTI F., vedi GHIRETTI MAGALDI A. GHIRETTI-MAGALDI A., GIUDITTA A. e GHIRETTI F., Il sistema fenolasi-chinone riduttasi nei Cefalopodi, 73.

— vedi TOSI L.

GIANNUZZI M. A., Sopra una nota di P. J. D. Gething sulla variazione dei diametri solari osservati a Greenwich, 415.

GIUDITTA A., vedi GHIRETTI-MAGALDI A.

GOTTE L. e MORET V., Sull'elastina. - II. Presenza di mucopolisaccaridi nelle fibre di elastina, 281.

GOTTE L., vedi MORET V.

GRÖBNER V., Nuovi contributi alla teoria dei sistemi di equazioni differenziali nel campo analitico, 375.

GUALTIEROTTI T., vedi MARGARIA R.

## H

HAIMOVICI M., Sulla decomposizione dei sistemi differenziali, 379.

HANSON A. O., vedi FERRERO F.

## J

JARRE G., Sulla velocità di dissociazione di un gas biatomico, 124.

## K

KRYŹANSKI M., Recherches concernant l'allure des solutions de l'équation du type parabolique lorsque la variable du temps tend vers l'infini, 28.

## L

- LANZANI G. A., vedi ANTONIANI C.  
 LE ROUX P. L., vedi BIOCCEA E.  
 LIGUORI M., vedi LO CASCIO G.  
 LO CASCIO G., DE LEONIBUS F. e LIGUORI M.,  
 Esempio di calcolo di una curva approssi-  
 mante una linea di sezione principale della  
 superficie anteriore della cornea, 320.  
 LORINI M., vedi MORET V.

## M

- MALVANO R., vedi DE BENEDETTI S.  
 MALVANO R., vedi FERRERO F.  
 MANDAHN-BARTH G., La validità di *Bulinus*  
*(Physopsis) abyssinicus* (Martens), l'ospite  
 intermedio di *Schistosoma haematobium*  
 in Somalia, 478.  
 MARCHIONNA E., Sopra una relazione fra i  
 generi di una superfice algebrica irrego-  
 lare, 394.  
 MARGARIA R., GUALTIEROTTI T. e SPINELLI  
 D., Analisi delle funzioni nervose elemen-  
 tari nell'uomo, 203.  
 MARIN G., La prima proliferazione corticale  
 della gonade indifferenziata in embrioni  
 di pollo sterilizzati con raggi gamma,  
 486.  
 MARINI M., L'attività secretoria dell'organo  
 sottocommessurale durante lo sviluppo di  
 un Anfibio urodelo, 96.  
 — L'attività neurosecretoria del sistema  
 ipotalamo-ipofisario durante lo sviluppo  
 di un Anfibio urodelo, 173.  
 MARRÉ E. e ARRIGONI O., Reazioni metabo-  
 liche all'auxina. — IV. Su di una possibile  
 base enzimatica dell'inibizione della cre-  
 scita da parte di concentrazioni sopraot-  
 timali in auxina, 454.  
 MARRÉ E., vedi ARRIGONI O.  
 MELLINI E., Contributo alla conoscenza dei  
 fattori determinanti l'esito della competi-  
 zione tra parassiti endofagi in vittime  
 superparassitizzate e multiparassitizzate,  
 294.  
 MINISCI F., vedi CHIUSOLI G.  
 MIRONE P., vedi BONINO G. B.  
 MORET V. e GOTTE L., Estrazione dell'ela-  
 stina dal ligamento nucale. Sue proprie-  
 tà istologiche e morfologiche al micro-  
 scopio elettronico, 153.  
 — — Sul meccanismo d'azione dell'elastasi,  
 442.

- MORET V. e LORINI M., Sulla Biochimica  
 della fermentazione citrica da parte del-  
 l'«*Aspergillus niger*», 77.  
 MORET V., vedi GOTTE L.  
 MORPURGO C. V. e SPINELLI D., Sull'azione  
 dell'acido pantotenico a livello della placca  
 neuromuscolare nel soggetto curarizzato,  
 460.

## N

- NATTA G., CORRADINI P. e BASSI I. W., Sulla  
 struttura cristallina del polibutadiene 1-2  
 isotattico, 363.  
 NICOLINI T., vedi CIMINO M.  
 NOTARNICOLA L., vedi PERRI T.

## O

- OTTAVIANI G., Su una proprietà di un siste-  
 ma di due variabili casuali seguenti la  
 legge di Poisson, degli eventi rari, 230.

## P

- PALUMBI G., Ulteriori dati sulla innerva-  
 zione vegetativa della sostanza nervosa  
 cerebrale, 301.  
 PELLI G., vedi DE BENEDETTI S.  
 PELLIZZER R., Su una particolare trasforma-  
 zione sperimentale di lherzolite, 70.  
 PERRI T. e NOTARNICOLA L., Sull'inizio della  
 determinazione degli arti negli Anfibi  
 anuri, 101.  
 PETTINEO B., Nuova dimostrazione dei teo-  
 remi di esistenza per i problemi al contorno  
 regolari relativi alle equazioni lineari a de-  
 rivata parziali di tipo ellittico, 32.  
 PICCARDI G., Ancora su di un'ipotesi solare,  
 419.  
 PICONE M., Sullo spettro in un parametro da  
 cui dipendono certe equazioni integrali  
 lineari, 347.  
 PIGNEDOLI A., Su un particolare problema  
 di distribuzione della temperatura inte-  
 ressante la teoria dei transitori di giun-  
 zione, 257.  
 POLEZZO S., vedi CARRÀ S.  
 PONTIERI G. e FALCONE G., Sulla biosintesi  
 indotta di penicillinasi in spore batteriche  
 nel corso del germogliamento, 491.  
 — e SCHIANO S., Osservazioni sui granuli  
 citoplasmatici delle forme normali e fila-  
 mentose di *B. megatherium*, 143.



PUCCI C., Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e e parabolico. Nota I, 370.

## R

RAVIOLA E., Contributo istologico ed istochimico alla conoscenza del sistema neurosecretorio ipotalamo-ipofisario, 482.

RAZZAUTI A., vedi BACCI G.

RIGAULT G., vedi FENOGLIO M.

ROMITI A., Sull'equilibrio limite dei materiali pesanti dotati di coesione ed attrito interno, 400.

ROSSI A., Sul comportamento della coda di un Anfibio urodelo trapiantata su Anuri dotati di differente velocità di sviluppo, 307.

ROSSI G., vedi ARRIGONI O.

## S

SALVATORE G. e CALIFANO L., Ricerche su potere patogeno di actinomiceti coltivati nella cavità allantoidea di embrione di pollo, 207.

SARTORI G., vedi CAGLIOTI V.

SCARPATI R., vedi CALIFANO S.

SCE M., Sulla varietà dei divisori dello zero nelle algebre, 39.

— Osservazioni sulle serie di potenze nei moduli quadratici, 220.

SCHIANO S., vedi PONTIERI G.

SCOLLO LAVIZZARI G., vedi URBANI C.

SCORCUCCHI M., Modificazioni nel midollo spinale di Anfibii anuri e urodeli adulti in seguito all'asportazione di un arto, 178.

SCROCCO M., vedi CAGLIOTI V.

SERLUPI-CRESCENZI G., vedi BALLIO A.

SIMONETTA M., vedi CARRÀ S.

SIMONETTA M., vedi FAVINI G.

SPERONI G., vedi CALIFANO S.

SPINELLI D., vedi MARGARIA R.

SPINELLI D., vedi MORPURGO C. V.

STORCHI E., Linearizzazione delle equazioni della plasticità ristretta, 45.

## T

TALLINI G., Sui  $q$ -archi di un piano lineare finito di caratteristica  $p = 2$ , 242.

TOSI L., GHIRETTI-MAGALDI A. e GHIRETTI F., Prime ricerche sul sistema dei cromi di Aplysia, 447.

TRECCANI V., vedi COLLA C.

TRIBUNO C., vedi DE BENEDETTI S.

TRIBUNO C., vedi FERRERO F.

## U

URBANI E., Attività enzimatiche nella metamorfosi di « Bufo vulgaris », 86.

— DE CESARIS COROMALDI L. e SCOLLO LAVIZZARI G., Studio delle dipeptidasi e delle lipasi nello sviluppo embrionale di « Bufo viridis » e di « Rana dalmatina », 82.

## V

VESENTINI E., Osservazioni sulle strutture fibratizzate analitiche sopra una varietà kähleriana compatta, 232.

VINCENSINI M. P., Sur un invariant du groupe des équivalences superficielles de l'espace euclidien à trois dimensions, 217.

## Z

ZACCHEI A. M., Osservazioni sulla sopravvivenza dei gangli nervosi di pollo in coltura, 312.

ZIN G., Elettromagnetismo maxwelliano e principio di Huyghens, 422.

ZINGONI U., Sui rapporti che intercorrono fra temperatura e frequenza nel cuore integro e nel ventricolo isolato di embrione di pollo, 462.

## INDICE PER MATERIE

## A

**Analisi.** — Sopra una costruzione di sistemi di rappresentanti di classi relative a  $G_2$  di forme quadratiche binarie primitive di seconda specie di determinante  $D > 0$  e  $\equiv 5 \pmod{8}$ , C., CELLITI, 15.

**Analisi matematica.** — Sulla minimizzazione di una funzione del prodotto di enti non commutativi, C. BÖHM, 386.

— Sopra le estremali di una classe di problemi variazionali, S. CINQUINI, 22.

— Sopra le estremaloidi di una classe di problemi variazionali, S. CINQUINI, 116.

— Equazioni differenziali negli spazi di Banach, teoremi di esistenza e di prolungabilità, C. CORDUNEANU, 226.

— Nuovi contributi alla teoria dei sistemi di equazioni differenziali nel campo analitico, V. GRÖBNER, 375.

— Sulla decomposizione dei sistemi differenziali, M. HAIMOVICI, 379.

— Recherches concernant l'allure des solutions de l'équation du type parabolique lorsque la variable du temps tend vers l'infini, M. KRZYŻAŃSKI, 28.

— Nuova dimostrazione dei teoremi di esistenza per i problemi al contorno regolari relativi alle equazioni lineari a derivate parziali di tipo ellittico, B. PETTINEO, 32.

— Sullo spettro in un parametrio da cui dipendono certe equazioni integrali lineari, M. PICONE, 347.

— Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico. Nota I, C. PUCCI, 370.

**Anatomia.** — Osservazioni comparative sulla struttura della corteccia cerebellare di mammiferi neonati, L. CATTANEO, 484.

— Contributo istologico ed istochimico alla conoscenza del sistema neurosecretorio ipotalamo-ipofisario, E. RAVIOLA, 482.

**Astrofisica.** — Ancora su di un'ipotesi solare, G. PICCARDI, 479.

**Astronomia.** — Orbita del sistema binario  $\mu$  Draconis. Nota II, A. FANTOLI, 133.

**Astronomia.** — Variazione centro-lombo del Sole del tripletto verde del Magnesio:  $\lambda$  5167,3- $\lambda$  5172, 7- $\lambda$  5183,6. Nota II, T. FORTINI e G. CAPRIOLI, 51.

— Sopra una nota di P.J.D. Gething sulla variazione dei diametri solari osservati a Greenwich, M. A. GIANNUZZI, 415.

**Astronomia geodetica.** — La stazione Astronomica dell'Osservatorio di Capodimonte (Napoli) ad Uccle (Belgio) per l'Anno Geofisico Internazionale, M. CIMINO, T. NICOLINI e E. FICHERA, 254.

## B

**Biochimica.** — Il sistema fenolasi-chinone riduttasi nei Cefalopodi, A. GHIRETTI-MAGALDI, GIUDITTA A. e GHIRETTI F., 73.

— Sull'elastina. — II. Presenza di mucopolisaccaridi nelle fibre di elastina; L. GOTTE e V. MORET, 281.

— Estrazione dell'elastina dal ligamento nucale. Sue proprietà istologiche e morfologiche al microscopio elettronico, V. MORET e L. GOTTE, 153.

— Sul meccanismo d'azione dell'elastasi, V. MORET e L. GOTTE, 442.

— Sulla Biochimica della fermentazione citrica da parte dell'«*Aspergillus niger*» V. MORET e M. LORINI, 77.

— Prime ricerche sul sistema dei citocromi di Aplysia, L. TOSI, A. GHIRETTI-MAGALDI e F. GHIRETTI, 447.

**Biologia.** — Tardiva determinazione numerica di cellule nervose nel rombencefalo di Anfibi. — II. Osservazioni su Anfibi urodeli, G. M. BAFFONI, 90.

— Influenza dell'ormone tiroideo sull'attività mitotica del rombencefalo di un Anfibi anuro, G. M. BAFFONI, 495.

— Il metabolismo del testosterone da parte di «*Lebistes reticulatus*» e di «*Gambusia holbrooki*»: Ricerche «in vivo», G. CHIEFFI e E. DE LUTIO, 316.

— L'attività secretoria dell'organo sottocommissurale durante lo sviluppo di un Anfibi urodello, M. MARINI, 96.

- Biologia.** — L'attività neurosecretoria del sistema ipotalamo-ipofisario durante lo sviluppo di un Anfibio urodelo, M. MARINI, 173.
- Sull'inizio della determinazione degli arti negli Anfibii anuri, T. PERRI e L. NOTARNICOLA, 101.
- Sul comportamento della coda di un Anfibio urodelo trapiantata su Anuri dotati di differente velocità di sviluppo, A. ROSSI, 307.
- Modificazioni nel midollo spinale di Anfibii anuri e urodeli adulti in seguito all'asportazione di un arto, M. SCORCUCCHI, 178.
- Osservazioni sulla sopravvivenza dei gangli nervosi di pollo in coltura, A. M. ZACCHEI, 312.

## C

**Calcolo delle Probabilità.** — Propriétés asymptotiques des chaînes à liaisons complètes, G. CIUCU, 11.

**Chimica.** — Spettro ultrarosso di assorbimento del ruteniocianuro di potassio allo stato cristallino ed in soluzione acquosa, G. B. BONINO e G. FABBRI, 191.

— Misure quantitative di assorbimento della 2-pirrolaldeide nello spettro ultrarosso, G. B. BONINO e P. MIRONE, 198.

— Spettro I.R. a costanti di forza interne dello ione complesso  $\text{Cr}(\text{CN})_6^{3-}$ , V. CAGLIOTI, G. SARTORI e M. SCROCCO, 355.

— Equilibri acido-base. Nota IV: Azofenilpiridine, A. FOFFANI e M. R. FOFFANI, 60.

— Comportamento polarografico di N-ossidi aromatici. Nota V: Su alcuni N-ossidi 2-aril-chinolinici, A. FOFFANI e E. FORNASARI, 62.

— Sulla struttura cristallina del polibutadiene 1-2 isotattico, G. NATTA, P. CORRADINI e I. W. BASSI, 363.

**Chimica biologia.** — Sintesi del desammido-DPN dall'acido nicotinico negli eritrociti umani, A. BALLIO e G. SERLUPI - CRESCENZI, 275.

**Chimica delle fermentazioni.** — Ricerche sul metabolismo ossidativo microbico dell'antracene e fenantrene. - I. Formazione di acidi ossinaftoici, C. COLLA, C. BIAGGI e V. TRECCANI, 66.

**Chimica fisica.** — Ricerche spettroscopiche sui nitrilossidi. - II. Spettri I. R. del trimetilacetonnitrilossido e del terz. butiliso-

cianato, S. CALIFANO, R. SCARPANI e G. SPERONI, 263.

**Chimica fisica.** — Momenti elettrici e distanze interatomiche delle azine, S. CARRÀ, S. POLEZZO e M. SIMONETTA, 428.

— Spettri elettronici di alcune benzotriazine sostituite, G. FAVINI e M. SIMONETTA, 434.

**Chimica organica.** — Sulla reattività dei radicali liberi con ossido di carbonio e ossido d'azoto, G. CHIUSOLI e F. MINISCI, 140.

**Commemorazioni.** — Commemorazione del Socio Carmelo Ciaccio, L. CALIFANO, 503.

— Commemorazione del Corrispondente G. ALBENGA, G. COLONNETTI, 331.

**Comunicazioni varie,** 334, 509.

## E

**Embriologia.** — La prima proliferazione corticale della gonade indifferenziata in embrioni di pollo sterilizzati con raggi gamma, G. MARIN, 486.

**Entomologia** — Contributo alla conoscenza dei fattori determinanti l'esito della competizione tra parassiti endofagi in vittime superparassitizzate e multiparassitizzate, E. MELLINI, 294.

**Enzimologia.** — Sintesi enzimatica dell'acetilmetilcarbinolo, C. ANTONIANI e G. A. LANZANI, 278.

## F

**Fisica.** — Su un nuovo isotopo del bismuto, S. DE BENEDETTI, U. FARINELLI, F. FERRERO, R. MALVANO, G. PELLI e C. TRIBUNO, 58.

— Sulla reazione fotonucleare  $\text{Mo}^{100}(\gamma, p)\text{Nb}^{99}$ , F. FERRERO, A. O. HANSON, R. MALVANO e C. TRIBUNO, 55.

**Fisica matematica.** — Su un particolare problema di distribuzione della temperatura interessante la teoria dei transistori di giunzione, A. PIGNEDOLI, 257.

— Elettromagnetismo maxwelliano e principio di Huyghens, G. ZIN, 422.

**Fisiologia.** — Analisi delle funzioni nervose elementari nell'uomo, R. MARGARIA, T. GUALTIEROTTI e D. SPINELLI, 203.

— Sull'azione dell'acido pantotenico a livello della placca neuromuscolare nel

soggetto curarizzato, C. V. MORPURGO e D. SPINELLI, 460.

**Fisiologia.** — Sui rapporti che intercorrono fra temperatura e frequenza nel cuore integro e nel ventricolo isolato di embrione di pollo, U. ZINGONI, 462.

**Fisiologia vegetale.** — Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XXII. Sulla « monodeidroascorbico » riduttasi in pisello, O. ARRIGONI, G. ROSSI e E. MARRÈ, 287.

— Reazioni metaboliche all'auxina. — IV. Su di una possibile base enzimatica dell'inibizione della crescita da parte di concentrazioni sopraottimali in auxina, E. MARRÈ, e O. ARRIGONI, 454.

## G

**Gasdinamica.** — Sulla velocità di dissociazione di un gas biatomico, G. JARRE, 124.

**Genetica.** — La variabilità sessuale nelle popolazioni eterogoniche, G. BACCI, 165.

**Geologia.** — Geologia e genesi delle rocce bentonitiche italiane, A. CAVINATO, 3.

**Geometria.** — Réseaux et congruences d'ordre supérieur, E. ARGHIRIADE, 246.

— Sui  $q$ -archi di un piano lineare finito di caratteristica  $p = 2$ , G. TALLINI, 242.

— Osservazioni sulle strutture fibrato analitiche sopra una varietà kähleriana compatta, E. VESENTINI, 232.

**Geometria algebrica.** — Sull'equazione canonica di un complesso  $C_n^g - d - 1$  di sottospazi  $S_d$  di  $S_n$ , F. GAETA, 389.

— Sopra una relazione fra i generi di una superficie algebrica irregolare, E. MARCHIONNA, 394.

## M

**Magneto Idrodinamica.** — Figure di equilibrio ellissoidali per una massa fluida elettricamente conduttrice uniformemente rotante, con campi magnetici variabili col tempo, C. AGOSTINELLI, 409.

**Matematica.** — Sulla varietà dei divisori dello zero nelle algebre, M. SCE, 39.

— Osservazioni sulle serie di potenze nei moduli quadratici, M. SCE, 220.

— Sur un invariant du groupe des équivalences superficielles de l'espace euclidien à trois dimensions, M. P. VINCENSINI, 217.

**Meccanica.** — Sopra un principio variazionale nella teoria degli spostamenti elastici non infinitesimi, R. F. BALDACCI, 250.

— Sull'equilibrio limite dei materiali pesanti dotati di coesione ed attrito interno, A. ROMITI, 400.

**Mineralogia.** — Ricerche sulla distribuzione di uranio e torio nella formazione dioritica di Cogne (Valle d'Aosta), M. FENOGLIO e G. RIGAULT, 107.

— Su una particolare trasformazione sperimentale di lherzolite, R. PELLIZZER, 70.

## O

**Opere pervenute in dono all'Accademia,** 342, 512.

## P

**Patologia.** — Esempio di calcolo di una curva approssimante una linea di sezione principale della superficie anteriore della cornea, G. LO CASCIO, F. DE LEONIBUS e M. LIGUORI, 320.

— Sulla biosintesi indotta di penicillinasi in spore batteriche nel corso del germogliamento, G. PONTIERI e G. FALCONE, 491.

— Osservazioni sui granuli citoplasmatici delle forme normali e filamentose di *B. megatherium*, G. PONTIERI e S. SCHIANO, 143.

— Ricerche sul potere patogeno di actinomiceti coltivati nella cavità allantoidea di embrione di pollo, G. SALVATORE e L. CALIFANO, 207.

**Personale accademico.** 333, 508.

**Plasticità** — Linearizzazione delle equazioni della plasticità ristretta, E. STORCHI, 45.

**Plichi suggellati,** 334, 509.

**Presentazione di libri,** 336, 510.

**Presentazione di Note e Memorie,** 341, 511.

## R

**Radiobiologia vegetale.** — Osservazioni preliminari sugli effetti fisiologici e citogenetici della irradiazione di semi di grano duro « Cappelli » con raggi X e neutroni termici, S. AVANZI, 158.



## S

**Statistica matematica.** — Su una proprietà di un sistema di due variabili casuali seguenti la legge di Poisson, degli eventi rari, G. OTTAVIANI, 230.

## T

**Teoria dei numeri.** — Nuove dimostrazioni del teorema di Fermat, del teorema di Fermat generalizzato da Eulero, e del teorema di Wilson, C. CELLITTI, 121.

## Z

**Zoologia.** — Falso gonocorismo in «*Coris julis*» (L.), G. BACCI e A. RAZZAUTTI, 181.

— Studio delle amilasi nello sviluppo di «*Artemia salina*» Leach, L. BELLINI, 303.

**Zoologia.** — *Archeostongylus italicus* gen. nov. et sp. nov., nuovo nematode borsato parassita di *Hystrix cristata* in Italia Centrale, E. BIOCCA e G. FERRETTI, 467.

— Suddivisione del genere *Ancylostoma* (Dubini, 1843), in quattro sottogeneri, E. BIOCCA e L. P. LE ROUX, 470.

— La validità di *Bulinus* (*Physopsis*) *abysinicus* (Martens), l'ospite intermedio di *Schistosoma haematobium* in Somalia, G. MANDAHN-BARTH, 478.

— Ulteriori dati sulla innervazione vegetativa della sostanza nervosa cerebrale, G. PALUMBI, 301.

— Attività enzimatiche nella metamorfosi di «*Bufo vulgaris*», E. URBANI, 86.

— Studio delle dipeptidasi e delle lipasi nello sviluppo embrionale di «*Bufo viridis*» e di «*Rana dalmatina*», E. URBANI, L. DE CESARIS COROMALDI e G. SCOLLO LAVIZZARI, 82.

## INDICI DEI FASCICOLI

## FASCICOLO 1-2.

LUGLIO-AGOSTO 1957.

## NOTE DI SOCI

CAVINATO A., Geologia e genesi delle rocce bentonitiche italiane . . . . . Pag. 3

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

CIUCU G., Propriétés asymptotiques des chaînes à liaisons complètes (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	» 11
CELLITI C., Sopra una costruzione di sistemi di rappresentanti di classi relative a $G_2$ di forme quadratiche binarie primitive di seconda specie di determinante $D > 0$ e $\equiv 5 \pmod{8}$ (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .	» 15
CINQUINI S., Sopra le estremali di una classe di problemi variazionali (pres. dal Socio <i>G. Sansone</i> ) . . . . .	» 22
KRZYŻAŃSKI M., Recherches concernant l'allure des solutions de l'équation du type parabolique lorsque la variable du temps tend vers l'infini (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	» 28
PETTINEO B., Nuova dimostrazione dei teoremi di esistenza per i problemi al contorno regolari relativi alle equazioni lineari a derivate parziali di tipo ellittico (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	» 32
SCE M., Sulla varietà dei divisori dello zero nelle algebre (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> )	» 39
STORCHI E., Linearizzazione delle equazioni della plasticità ristretta (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i> ) . . . . .	» 45
FORTINI T. e CAPRIOLI G., Variazione centro-lembo del Sole del tripletto verde del Magnesio: $\lambda 5167,3 - \lambda 5172,7 - \lambda 5183,6$ . Nota II (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> )	» 51
FERRERO F., HANSON A. O., MALVANO R. e TRIBUNO C., Sulla reazione foto-nucleare $Mo^{100} (\gamma, p) Nb^{99}$ (pres. dal Socio <i>G. Colonnetti</i> ) . . . . .	» 55
DE BENEDETTI S., FARINELLI U., FERRERO F., MALVANO R., PELLI G. e TRIBUNO C., Su un nuovo isotopo del bismuto (pres. dal Socio <i>G. Colonnetti</i> )	» 58
FOFFANI A. e FOFFANI M. R., Equilibri acido-base. Nota IV: Azofenil piridine (pres. dal Corrisp. <i>G. Semeraro</i> ) . . . . .	» 60
FOFFANI A. e FORNASARI E., Comportamento polarografico di N-ossidi aromatici. Nota V: Su alcuni N-ossidi 2-aril-chinolinici (pres. dal Corrisp. <i>G. Semeraro</i> )	» 62
COLLA C., BIAGGI C. e TRECCANI V., Ricerche sul metabolismo ossidativo microbico dell'antracene e fenantrene. - I. Formazione di acidi ossinaftoici (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .	» 66
PELLIZZER R., Su una particolare trasformazione sperimentale di lherzolite (pres. dal Corrisp. <i>C. Andreatta</i> ) . . . . .	» 70
GHIRETTI-MAGALDI A., GIUDITTA A. e GHIRETTI F., Il sistema fenolasi-chinone riduttasi nei Cefalopodi (pres. dal Corrisp. <i>G. Montalenti</i> ) . . . . .	» 73
MORET V. e LORINI M., Sulla Biochimica della fermentazione citrica da parte dell'« <i>Aspergillus niger</i> » (pres. dal Corrisp. <i>A. Roncato</i> ) . . . . .	» 77

URBANI E., DE CESARIS COROMALDI L. e SCOLLO LAVIZZARI G., Studio delle dipeptidasi e delle lipasi nello sviluppo embrionale di « <i>Bufo viridis</i> » e di « <i>Rana dalmatina</i> » (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	Pag. 82
URBANI E., Attività enzimatiche nella metamorfosi di « <i>Bufo vulgaris</i> » (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	» 86
BAFFONI G. M., Tardiva determinazione numerica di cellule nervose nel rombencefalo di Anfibi. - II. Osservazioni su Anfibi urodeli (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	» 90
MARINI M., L'attività secretoria dell'organo sottocommessurale durante lo sviluppo di un Anfibio urodelo (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	» 96
PERRI T. e NOTARNICOLA L., Sull'inizio della determinazione degli arti negli Anfibi anuri (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	» 101

## FASCICOLO 3-4.

SETTEMBRE-OTTOBRE 1957.

## NOTE DI SOCI

FENOGLIO M. e RIGAULT G., Ricerche sulla distribuzione di uranio e torio nella formazione dioritica di Cogne (Valle d'Aosta) (pres. dal Corrisp. <i>M. Fenoglio</i> ) . . . . .	» 107
---	-------

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

CINQUINI S., Sopra le estremaloidi di una classe di problemi variazionali (pres. dal Socio <i>G. Sansone</i> ) . . . . .	» 116
CELLITTI C., Nuove dimostrazioni del teorema di Fermat, del teorema di Fermat generalizzato da Eulero, e del teorema di Wilson (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .	» 121
JARRE G., Sulla velocità di dissociazione di un gas biatomico (pres. dal Corrisp. <i>C. Ferrari</i> ) . . . . .	» 124
FANTOLI A., Orbita del sistema binario $\mu$ Draconis. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .	» 133
CHIOSOLI G. e MINISCI F., Sulla reattività dei radicali liberi con ossido di carbonio e ossido d'azoto (pres. dal Socio <i>A. Quilico</i> ) . . . . .	» 140
PONTIERI G. e SCHIANO S., Osservazioni sui granuli citoplasmatici delle forme normali e filamentose di <i>B. megatherium</i> (pres. dal Socio <i>L. Califano</i> ) . . . . .	» 143
MORET V. e GOTTE L., Estrazione dell'elastina dal ligamento nucale. Sue proprietà istologiche e morfologiche al microscopio elettronico (pres. dal Corrisp. <i>A. Roncato</i> ) . . . . .	» 153
AVANZI S., Osservazioni preliminari sugli effetti fisiologici e citogenetici della irradiazione di semi di grano duro «Cappelli» con raggi X e neutroni termici (pres. dal Socio <i>A. Chiarugi</i> ) . . . . .	» 158
BACCI G., La variabilità sessuale nelle popolazioni eterogoniche (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	» 165
MARINI M., L'attività neurosecretoria del sistema ipotalamo-ipofisario durante lo sviluppo di un Anfibio urodelo (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	» 173
SCORCUCCHI M., Modificazioni nel midollo spinale di Anfibi anuri e urodeli adulti in seguito all'asportazione di un arto (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	» 178
BACCI G. e RAZZAUTI A., Falso gonocorismo in « <i>Coris julis</i> » (L.) (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	» 181

## FASCICOLO 5.

NOVEMBRE 1957.

## NOTE DI SOCI

BONINO G. B. e FABBRİ G., Spettro ultrarosso di assorbimento del ruteniocianuro di potassio allo stato cristallino ed in soluzione acquosa (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i> ) . . . . .	Pag. 191
BONINO G. B. e MIRONE P., Misure quantitative di assorbimento della 2-pirrolaldeide nello spettro ultrarosso (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i> ) . . .	» 198
MARGARIA R., GUALTIEROTTI T. e SPINELLI D., Analisi delle funzioni nervose elementari nell'uomo (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i> ) . . . . .	» 203
SALVATORE G. e CALIFANO L., Ricerche sul potere patogeno di actinomiceti coltivati nella cavità allantoidea di embrione di pollo (pres. dal Socio <i>L. Califano</i> ). . .	» 207

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

VINCENSINI M. P., Sur un invariant du groupe des équivalences superficielles de l'espace euclidien à trois dimensions (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> ) . . .	» 217
SCE M., Osservazioni sulle serie di potenze nei moduli quadratici (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	» 220
CORDUNEANU C., Equazioni differenziali negli spazi di Banach, teoremi di esistenza e di prolungabilità (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	» 226
OTTAVIANI G., Su una proprietà di un sistema di due variabili casuali seguenti la legge di Poisson, degli eventi rari (pres. dal Socio <i>F. P. Cantelli</i> ) . . .	» 230
VESENTINI E., Osservazioni sulle strutture fibrato analitiche sopra una varietà kähleriana compatta (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	» 232
TALLINI G., Sui $q$ -archi di un piano lineare finito di caratteristica $p = 2$ (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	» 242
ARGHIRIADE E., Réseaux et congruences d'ordre supérieur (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	» 246
BALDACCİ R. F., Sopra un principio variazionale nella teoria degli spostamenti elastici non infinitesimi (pres. dal Socio <i>G. Boaga</i> ). . . . .	» 250
CIMINO M., NICOLINI T. e FICHERA E., La stazione Astronomica dell'Osservatorio di Capodimonte (Napoli) ad Uccle (Belgio) per l'Anno Geofisico Internazionale (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .	» 254
PIGNEDOLI A., Su un particolare problema di distribuzione della temperatura interessante la teoria dei transistori di giunzione (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i> ) . . . . .	» 257
CALIFANO S., SCARPATI R. e SPERONI G., Ricerche spettroscopiche sui nitrilossidi. - II. Spettri I. R. del trimetilacetonnitrilossido e del terz. butiliscianato (pres. dal Socio <i>F. Giordani</i> ) . . . . .	» 263
BALLIO A. e SERLUPI-CRESCENZI G., Sintesi del desammido-DPN dall'acido nicotinico negli eritrociti umani (pres. dal Socio <i>E. B. Chain</i> ) . . . . .	» 275
ANTONIANI C. e LANZANI G. A., Sintesi enzimatica dell'acetilmetilcarbinolo (pres. dal Socio <i>F. Giordani</i> ) . . . . .	» 278
GOTTE L. e MORET V., Sull'elastina. - II. Presenza di mucopolisaccaridi nelle fibre di elastina (pres. dal Corrisp. <i>A. Roncato</i> ) . . . . .	» 281
ARRIGONI O., ROSSI G. e MARRÈ E., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - XXII. Sulla « monodeidroascorbico » riduttasi in pisello (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . .	» 287



MELLINI E., Contributo alla conoscenza dei fattori determinanti l'esito della competizione tra parassiti endofagi in vittime superparassitizzate e multi-parassitizzate (pres. dal Socio <i>G. Grandi</i> ) . . . . .	Pag. 294
PALUMBI G., Ulteriori dati sulla innervazione vegetativa della sostanza nervosa cerebrale (pres. dal Socio <i>A. Pensa</i> ) . . . . .	» 301
BELLINI L., Studio delle amilasi nello sviluppo di « <i>Artemia salina</i> » Leach (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	» 303
ROSSI A., Sul comportamento della coda di un Anfibio urodelo trapiantata su Anuri dotati di differente velocità di sviluppo (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	» 307
ZACCHEI A. M., Osservazioni sulla sopravvivenza dei gangli nervosi di pollo in coltura (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	» 312
CHIEFFI G. e DE LUTIO E., Il metabolismo del testosterone da parte di « <i>Lebistes reticulatus</i> » e di « <i>Gambusia holbrooki</i> »: Ricerche « in vivo » (pres. dal Corrisp. <i>G. Montalenti</i> ) . . . . .	» 316
LO CASCIO G., DE LEONIBUS F. e LIGUORI M., Esempio di calcolo di una curva di sezione principale della superficie anteriore della cornea (pres. dal Socio <i>L. Califano</i> ) . . . . .	» 320

## NECROLOGI

COLONNETTI G., Necrologio del Corrispondente G. ALBENGA . . . . .	» 331
Personale accademico . . . . .	» 333
Plichi suggellati . . . . .	» 334
Comunicazioni varie . . . . .	» 334
Presentazione di libri . . . . .	» 336
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	» 341
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 9 novembre 1957 . . . . .	» 342

## FASCICOLO 6.

DICEMBRE 1957.

## NOTE DI SOCI

PICONE M., Sullo spettro in un parametro da cui dipendono certe equazioni integrali lineari . . . . .	» 347
CAGLIOTI V., SARTORI G. e SCROCCO M., Spettro I. R. e costanti di forza interne dello ione complesso $\text{Cr}(\text{CN})_6^{3-}$ (pres. dal Socio <i>V. Caglioti</i> ) . . . . .	» 355
NATTA G., CORRADINI P. e BASSI I. W., Sulla struttura cristallina del polibutadiene 1-2 isotattico (pres. dal Socio <i>G. Natta</i> ) . . . . .	» 363

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

PUCCI C., Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico. Nota I (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	» 370
GRÖBNER V., Nuovi contributi alla teoria dei sistemi di equazioni differenziali nel campo analitico (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	» 375

HAIMOVICI M., Sulla decomposizione dei sistemi differenziali (pres. dal Socio B. Segre) . . . . .	Pag. 379
BÖHM C., Sulla minimizzazione di una funzione del prodotto di enti non commutativi (pres. dal Socio M. Picone) . . . . .	» 386
GAETA F., Sull'equazione canonica di un complesso $C_{n-d-1}^g$ di sottospazi $S_d$ di $S_n$ (pres. dal Socio F. Severi) . . . . .	» 389
MARCHIONNA E., Sopra una relazione fra i generi di una superficie algebrica irregolare (pres. dal Socio O. Chisini) . . . . .	» 394
ROMITI A., Sull'equilibrio limite dei materiali pesanti dotati di coesione ed attrito interno (pres. dal Corrisp. C. Ferrari) . . . . .	» 400
AGOSTINELLI C., Figure di equilibrio ellissoidali per una massa fluida elettricamente conduttrice uniformemente rotante, con campi magnetici variabili col tempo (pres. dal Socio A. Signorini) . . . . .	» 409
GIANNUZZI M. A., Sopra una nota di P.J.D. Gething sulla variazione dei diametri solari osservati a Greenwich (pres. dal Socio G. Armellini) . . . . .	» 415
PICCARDI G., Ancora su di un'ipotesi solare (pres. dal Socio G. Abeiti) . . . . .	» 419
ZIN G., Elettromagnetismo maxwelliano e principio di Huyghens (pres. dal Socio A. Signorini) . . . . .	» 422
CARRÀ S., POLEZZO S. e SIMONETTA M., Momenti elettrici e distanze interatomiche delle azine (pres. dal Socio L. Cambi) . . . . .	» 428
FAVINI G. e SIMONETTA M., Spettri elettronici di alcune benzotriazine sostituite (pres. dal Socio L. Cambi) . . . . .	» 434
MORET V. e GOTTE L., Sul meccanismo d'azione dell'elastasi (pres. dal Corrisp. A. Roncato) . . . . .	» 442
TOSI L., GHIRETTI-MAGALDI A. e GHIRETTI F., Prime ricerche sul sistema dei citocromi di Aplysia (pres. dal Corrisp. G. Montalenti) . . . . .	» 447
MARRÉ E. e ARRIGONI O., Reazioni metaboliche all'auxina. - IV. Su di una possibile base enzimatica dell'inibizione della crescita da parte di concentrazioni sopraottimali in auxina (pres. dal Socio S. Tonzig) . . . . .	454
MORPURGO C. V. e SPINELLI D., Sull'azione dell'acido pantotenico a livello della placca neuromuscolare nel soggetto curarizzato (pres. dal Socio R. Margaria) . . . . .	» 460
ZINGONI U., Sui rapporti che intercorrono fra temperatura e frequenza nel cuore integro e nel ventricolo isolato di embrione di pollo (pres. dal Corrisp. I. Spadolini) . . . . .	» 462
BIOCCA E. e FERRETTI G., <i>Archeostromgylus italicus</i> gen. nov. et sp. nov., nuovo nematode borsato parassita di <i>Hystrix cristata</i> in Italia Centrale (pres. dal Socio V. Puntoni) . . . . .	» 467
BIOCCA E. e LE ROUX P. L., Suddivisione del genere <i>Ancylostoma</i> (Dubini, 1843), in quattro sottogeneri (pres. dal Socio V. Puntoni) . . . . .	» 470
MANDAHL-BARTH G., La validità di <i>Bulinus</i> ( <i>Physopsis</i> ) <i>abyssinicus</i> (Martens), l'ospite intermedio di <i>Schistosoma haematobium</i> in Somalia (pres. dal Socio V. Puntoni) . . . . .	» 478
RAVIOLA E., Contributo istologico ed istochimico alla conoscenza del sistema neurosecretorio ipotalamo-ipofisario (pres. dal Socio A. Pensa) . . . . .	» 482
CATTANEO L., Osservazioni comparative sulla struttura della corteccia cerebellare di mammiferi neonati (pres. dal Socio A. Pensa) . . . . .	» 484
MARIN G., La prima proliferazione corticale della gonade indifferenziata in embrioni di pollo sterilizzati con raggi gamma (pres. dal Corrisp. U. D'Ancona) . . . . .	» 486
PONTIERI G. e FALCONE G., Sulla biosintesi indotta di penicillinasi in spore batteriche nel corso del germogliamento (pres. dal Socio L. Califano) . . . . .	» 491
BAFFONI G. M., Influenza dell'ormone tiroideo sull'attività mitotica del rombencefalo di un Anfibio anuro (pres. dal Socio G. Cotronei) . . . . .	» 495

## C O M M E M O R A Z I O N I

CALIFANO L., Commemorazione del Socio Carmelo Ciaccio . . . . .	Pag. 503
Personale accademico . . . . .	» 508
Plichi suggellati . . . . .	» 509
Comunicazioni varie . . . . .	» 509
Presentazione di libri . . . . .	» 510
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	» 511
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 14 dicembre 1957	» 512
Indice per Autori . . . . .	» 517
Indice per materie . . . . .	» 521
Indici dei fascicoli . . . . .	» 525

---





